Aspects épistémologiques et didactiques de la liaison points-vecteurs.

André Pressiat

UNIVERSITÉ DE PARIS VII
DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Présentée par André PRESSIAT

ASPECTS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES DE LA LIAISON "POINTS – VECTEURS"

Thèse soutenue le 28 mai 1999 devant la commission d'examen

JURY :

Yves CHEVALLARD, professeur, ***président,***

Jacques COLOMB, professeur, ***directeur de thèse,***

Jean-Luc DORIER, Maître de Conférences, ***rapporteur,***

Aline ROBERT, professeur, ***rapporteur,***

Jacqueline ROBINET, Maître de Conférences, ***examinateur.***

UNIVERSITÉ DE PARIS VII
DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ : DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Présentée par André PRESSIAT

ASPECTS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES DE LA LIAISON "POINTS - VECTEURS"

Thèse soutenue le 28 mai 1999 devant la commission d'examen

JURY :

Yves CHEVALLARD, professeur, ***président*,**

Jacques COLOMB, professeur, ***directeur de thèse*,**

Jean-Luc DORIER, Maître de Conférences, ***rapporteur*,**

Aline ROBERT, professeur, ***rapporteur*,**

Jacqueline ROBINET, Maître de Conférences, ***examinateur*.**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à Jacques Colomb, directeur du département “Didactiques des disciplines” à l'Institut National de Recherche Pédagogique, qui a dirigé mon travail en conjuguant patience et exigence. Ses questions, ses conseils, ses suggestions m'ont été précieux pour en évaluer les grandes étapes, et pour mieux les articuler. D'un bout à l'autre de ce long périple, j'ai toujours trouvé auprès de lui une grande qualité d'écoute, et des encouragements maintes fois renouvelés.

Je remercie Jean-Luc Dorier, Aline Robert et Yves Chevallard d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail de thèse, ainsi que pour l'attention toute particulière qu'ils lui ont accordé. Je remercie enfin Jacqueline Robinet d'avoir accepté de siéger dans le jury.

Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait Yves Chevallard en acceptant d'être président du jury, et je l'en remercie vivement.

Je remercie les collègues de travail qui ont su me manifester leur intérêt pour ce travail de thèse, en me demandant régulièrement des nouvelles sur son état d'avancement et qui m'ont ainsi apporté de précieux encouragements : André Rouchier, Claude Landré, Michèle Artaud, Nadette Fauvin et Jacques Pinaud à l'IUFM d'Orléans-Tours ; Yves Olivier et Michel Dofal au Rectorat de l'académie d'Orléans-Tours ; l'ensemble de l'équipe de Didactique des mathématiques de l'INRP et en particulier Georges Combier et Thérèse Raisonnier.

Je remercie Nicole Gillet du Centre de Formation et d'Études sur l'Enseignement des Disciplines pour son aide précieuse sur le plan administratif.

Je remercie mes amis Jean-Pierre, Alfredo, Xavier et Mounia, Suzanne et Michel pour leur curiosité envers un secteur d'activité différent des leurs, et pour les échanges toujours stimulants qui en ont résulté.

Je remercie enfin ma famille, que j'ai soumis à rude épreuve, qui a respecté mon engagement dans ce travail et dont le soutien a toujours été discret et efficace.

Sommaire

Première partie

Introduction et problématique

Deuxième partie

Approche épistémologique

Troisième partie

Les vecteurs dans les programmes d'enseignement en France
Leur emploi dans les problèmes d'alignement et dans l'étude des configurations

Quatrième partie

Organisations mathématiques locales et éléments d'organisations didactiques relatives au calcul vectoriello-ponctuel

Conclusion

Première partie

Introduction et problématique.

1 Introduction

L'objet de cette thèse est d'étudier les problèmes épistémologiques et didactiques liés à l'enseignement des vecteurs, dans leur utilisation en géométrie enseignée au Collège et au Lycée. Il ne s'agit donc pas d'un travail portant sur l'algèbre linéaire, même si certaines questions qui en relèvent seront rencontrées en cours de route. En revanche, l'attention sera portée sur les relations entre les points et les vecteurs, aussi bien sur le plan épistémologique que didactique.

Mon intérêt pour cette question a d'abord eu pour origine ma propre pratique de professeur de l'enseignement du second degré, qui m'a dans un premier temps confronté à un enseignement de la géométrie reposant sur la trétralogie : espaces vectoriels sur **R**, espaces affines associés à un espace vectoriel, espaces vectoriels euclidiens, espaces affines euclidiens, en se limitant à des dimensions inférieures à trois. Comme de nombreux collègues, j'ai donc été amené à « faire vivre » dans la classe et chez mes élèves des vecteurs « abstraits », au rang desquels les « vieux » vecteurs, classe de bipoints équipollents, n'étaient qu'un cas particulier. Comment travailler avec, comment se les imaginer ? Convient-il de les représenter à l'aide de schémas, et si oui lesquels ? Puis, à faire réapparaître des vecteurs qui de nouveau, ressemblaient aux « vieux » vecteurs, mais n'avaient cependant pas de « longueur » ; plus précisément il n'était pas possible de comparer les longueurs de deux vecteurs non colinéaires, pas plus que de parler de l'angle qu'ils font. Puis à rendre possibles ces deux préoccupations relatives aux longueurs (qu'on appelle désormais des normes) et aux angles de couples de vecteurs par le biais du choix d'une multiplication scalaire, forme bilinéaire symétrique définie positive, puis à pouvoir mesurer de tels angles à condition d'avoir préalablement orienté le plan vectoriel. Et, enfin, à retrouver, quand on s'intéresse aux points, tout ce qu'il faut pour pouvoir parler de la distance qui sépare deux d'entre eux, des angles d'un triangle, et enfin de leurs mesures. En tant que professeur, j'ai été amené à développer des savoirs et des savoir-faire didactiques sur ces questions quelque peu délicates, qui sont dans l'ensemble restés dans une sphère semi-privée, locale, limitée au petit nombre de collègues avec qui j'avais des échanges sur ce sujet. Le réinvestissement de ces théories dans des espaces vectoriels de dimension inférieure à trois dont les « vecteurs » étaient des fonctions fournissait une gamme de problèmes dans lesquels on pouvait voir une initiation à l'analyse fonctionnelle. Le passage par l'analytique, très fréquent, générait lui aussi un vivier très riche d'exercices et de problèmes, dont la résolution nécessitait de nombreuses techniques. Puis les programmes ont changé, depuis le collège jusqu'en terminale, de manière telle que la tétralogie évoquée ci-dessus voie son rôle se réduire à la portion congrue. Les distances entre points sont toujours « déjà-là », et notamment au Collège, où elles sont amenées à jouer un rôle fondamental, et il en est de même des mesures d'angles. Sans retracer ici toutes les étapes du processus, qui a subi de nombreuses modifications successives, les vecteurs ont vu leur rôle changer ; en terminale, les isométries vectorielles planes (surtout les rotations et les similitudes vectorielles) n'étaient plus seulement vues pour étudier plus tard les isométries et similitudes ponctuelles : l'un des buts à atteindre en ce qui les concerne était de les mobiliser pour étudier des configurations ponctuelles assez complexes[1]. Le retour à la géométrie des figures, traitée à l'aide de l'outil vectoriel, conduisait le professeur (et ses élèves) à identifier d'autres gestes, d'autres techniques d'utilisation des vecteurs, ceux-ci intervenant dans des types de problèmes complètement nouveaux. D'où venaient ces problèmes, quelle légitimité pouvait-on donner à leur présence dans les programmes de terminale ? Comment évaluer les élèves à ce sujet ?

Une deuxième source de motivation, relative à cette question épistémologique et didactique, est apparue à la suite d'une recherche INRP à laquelle j'ai participé, et qui avait pour thème l'articulation Troisième-Seconde, du point de vue de l'enseignement d'une notion, et de son apprentissage par les élèves. Une notion mathématique figurant à la fois dans le programme de Troisième et dans celui de Seconde a été choisie : les vecteurs et leur addition. Une douzaine de classes de chacun des niveaux ont été choisies pour y faire des observations sur l'enseignement du thème en question ; des entretiens avec le professeur de chacune d'elles ont été conduits pour évoquer sa stratégie et ses choix ; des questionnaires élaborés par l'équipe INRP ont été proposés aux élèves, en plus des évaluations organisées par les professeurs dans les classes. Cette observation a eu lieu au moment de la mise en place des « nouveaux » programmes (de 1989 en Troisième, de 1990 en Seconde). Le changement de statut des vecteurs en classe de Quatrième (définition de la translation d'abord, des vecteurs ensuite ; « retour » à la définition naïve en terme de direction, sens, longueur ; en troisième, définition de l'addition des vecteurs à partir de la composée de deux translations) met mal à l'aise certains enseignants, qui ont l'impression de ne plus faire vraiment de mathématiques. En fait, de nombreux professeurs continuent à présenter les vecteurs comme ils l'ont fait pendant de nombreuses années, mais en s'efforçant, pour rester dans le cadre du nouveau programme, de ne plus employer un langage aussi précis. En Seconde, on constate le même phénomène, qui trouve place dans certains

[1]L'une des plus « classiques » était formée d'un quadrilatère quelconque et de triangles isocèles rectangles tracés sur chacun de ses côtés, à l'extérieur (ou à l'intérieur) du quadrilatère. Elle est connue sous le nom de configuration de Von Aubel (en fait, on devrait écrire Van Aubel).

manuels où les axiomes du plan affine sont énoncés comme « propriétés » fondamentales au statut incertain. La question des notations et du vocabulaire est d'autant plus présente que les programmes l'identifie comme telle : au Collège la notation d'un vecteur à l'aide d'une seule lettre surmontée d'une flèche ne figure pas au programme, alors qu'elle figure explicitement dans celui de la classe de Seconde. Pourtant, la présentation des vecteurs en Quatrième amène le professeur à présenter ce que la tradition nomme « vecteur libre », sans disposer de notation pour cela. Et l'on voit de nombreux professeurs de Seconde faire de cette notation un enjeu didactique fort, croyant à tort que les élèves n'ont jamais été mis en rapport avec de tels « vecteurs libres », accentuer sur ce point une hypothétique différence entre les vecteurs « du Collège » (qui ne seraient que de pauvres vecteurs liés) et ceux du Lycée qui se « libèrent » à travers cette notation nouvelle. Très souvent cependant, et parfois de manière caricaturale, cette nouvelle notation, qui paraît-il est fondamentale, n'est plus utilisée dans les exercices, tous les vecteurs y intervenant étant de « vieux » vecteurs désignés par deux noms de points surmontés d'une flèche. Ce décalage entre les réels besoins en matière de désignation des vecteurs en terme d'écrit se retrouve également à l'oral, mais cette question n'est pas nouvelle, et se posait déjà avec les programmes antérieurs. Le professeur se voit contraint d'expliquer que les vecteurs, qui sont « libres », n'ont ni origine ni extrémité (sinon, ils seraient « liés »), et en même temps, lorsqu'il explique comment on construit la somme de deux vecteurs, il enfreint lui-même cette règle en parlant de « mise bout à bout », ou même « d'extrémité du premier et d'origine du second ». Conscients de cette infraction, certains professeurs demandent à leurs élèves d'excuser cet abus de langage au nom de l'efficacité, de la nécessaire clarté des explications relatives à une technique exigible.

Ces constats montrent que le rapport personnel que chaque professeur a avec les objets mathématiques qu'il est chargé d'enseigner, rapport qui s'est construit au cours de ses études au Collège-Lycée et à l'Université puis au cours de sa pratique professionnelle, interviennent très fortement sur la légitimité qu'il accorde à un programme d'enseignement. Sur la question des vecteurs, si la légitimité était dans l'ensemble très forte pour les anciens programmes (époque dite des mathématiques modernes), elle semble l'être beaucoup moins pour les nouveaux, et parfois même être absente. Existe-t-il des constructions de la géométrie plane, faite au niveau universitaire, dans laquelle les vecteurs seraient définis après les translations, et les sommes de vecteurs définies à partir de la composition des translations ? En d'autres termes, existe-t-il un savoir de type universitaire dont ces nouveaux programmes seraient une transposition à des fins d'enseignement ? Cette question semble fort peu abordée dans les formations organisées pour les professeurs au sujet de ces nouveaux programmes. La réponse est cependant affirmative : on en trouve trace dès 1985, dans l'ouvrage de Madame Jacqueline Lelong-Ferrand, paru aux PUF, qui fournit une telle reconstruction de la géométrie affine, en s'inspirant du livre d'Artin « Algèbre géométrique ». Ainsi, deux changements de programmes (à des époques différentes) sont à l'origine d'un questionnement de type épistémologique qui va me conduire à choisir ce sujet de thèse.

– d'une part, celui que je viens d'évoquer au sujet d'une reconstruction axiomatique de la géométrie affine ;

– d'autre part, une question que m'avait inspiré bien des années auparavant l'accent mis sur les distances dans les programmes du Collège : comment caractériser les espaces métriques qui sont isomorphes au plan euclidien ? Mon enquête m'avait alors conduit, à partir de l'ouvrage bien connu de Marcel Berger[2], à prendre connaissance des travaux de Menger, à travers le premier livre de Blumenthal[3] sur ce sujet.

En ce qui concerne les aspects didactiques, mes visites de professeurs stagiaires dans des classes de Seconde m'ont amené à constater la difficulté qui était la leur à faire vivre auprès de leurs élèves des problèmes d'alignement, dont la résolution était attendue par des techniques vectorielles. La difficulté d'une algébrisation de la preuve (que l'emploi par le professeur de locutions telles que « relation vectorielle » objectivise, sans pour autant rendre cette algébrisation explicite pour l'élève) était sous estimée, et mise sous le coup d'un manque de capacité de raisonnement chez les élèves (« ils ne savent pas ce qu'il faut démontrer ») ou de faiblesse dans certaines techniques débordant le domaine vectoriel proprement dit (« ils ne savent pas démontrer une égalité »). Des échanges sur cette question avec des professeurs plus expérimentés, il ressortait que les causes de ces dysfonctionnements étaient presque toujours imputés à des carences ne relevant pas spécialement du calcul vectoriel, mais plutôt de lacunes « méthodologiques » diverses : confusion entre hypothèses et conclusion, techniques ambiguës de démonstration d'une égalité consistant à l'écrire et à la transformer en une égalité plus simple qui soit vraie, sans que l'équivalence des égalités en question soit explicitée. L'heure étant à l'enseignement modulaire, on a même vu apparaître des activités de type « modules » construites explicitement pour combler ce type de lacune méthodologique, en mettant en scène différentes méthodes pour « démontrer une égalité ». Cependant, un traitement préventif de ce type de carence semblait ne pas suffire. Le dysfonctionnement de cette partie du programme est alors bien repéré, et fera bientôt l'objet d'articles dans les revues professionnelles[4].

C'est alors que les deux aspects, épistémologique et didactique, se sont rejoints : dans l'enquête entreprise sur le plan épistémologique relative à l'émergence des espaces

[2]Géométrie (5 volumes), Cedic/Nathan - 1979, ainsi que l'ouvrage qui lui fait suite intitulé « Géométrie, problèmes de géométrie commentés et rédigés » par Marcel Berger, Jean-Pic Berry, Pierre Pansu et Xavier Saint-Raymond, 1982.

[3]Theory and applications of distance geometry, Chelsea Publishing Company, deuxième édition, 1970.

[4]Voir le numéro 17 de la revue « Repères », l'article de Nicole Vogel.

vectoriels et des espaces affines, mon attention se portera de manière plus précise sur le traitement vectoriel du type de problèmes repéré sous les termes de « problèmes d'alignement et de concours », ainsi que sur la technique d'emploi des transformations vectorielles pour étudier des configurations de la géométrie euclidienne.

2 - Vers un cadre théorique du point de vue didactique.

Nombreux sont les mathématiciens qui, dans des ouvrages traitant du calcul vectoriel, font part de leurs préoccupations didactiques qui sont bien naturelles dans un tel contexte. Nous citerons deux exemples.

* Ainsi, Éric Lehmann dans un ouvrage destiné aux étudiants de premier cycle universitaire publié chez Belin en 1984[5], consacre le chapitre 3 à la géométrie vectorielle en dimension 2 ou 3. Le premier paragraphe concerne les définitions des vecteurs en géométrie classique. Après avoir rappelé que cette géométrie fait intervenir l'ensemble des points noté E et l'ensemble des vecteurs noté $\vec{E}$, ainsi qu'une application de $E \times E$ dans $\vec{E}$ dont il détaille les propriétés, il poursuit ainsi : « Chaque exposé déductif de la géométrie à partir d'une axiomatique comportera une définition de $\vec{E}$. Mais de nombreuses définitions différentes sont possibles. Toutes ces définitions sont équivalentes et le choix est sans importance théorique. Certaines définitions permettront des images intuitives plus claires que d'autres, mais en fait chacune de ces définitions est un modèle de $\vec{E}$. Face à cette situation, on choisit le plus simple (compte tenu de nos connaissances). Nous allons rappeler trois modèles de $\vec{E}$. ». Il évoque alors chacun des « modèles » en question, précisant pour chacun de ces modes de représentation des vecteurs (en fait, c'est ce qu'il faut entendre par le mot « modèle ») les avantages et les inconvénients qu'il lui trouve. Citons brièvement les conclusions auxquelles il aboutit :

Premier mode de représentation : les vecteurs comme (classe d'équivalence de) bipoints.

On représente un vecteur $\vec{V}$ par un bipoint (A, B) tel que $\vec{AB} = \vec{V}$, et en général, on dessine une flèche d'origine A et d'extrémité B.

Avantages :

• On voit la direction du vecteur $\vec{V}$ et sa norme (la norme de $\vec{V}$ est égale à la longueur du segment AB).

• Le produit d'un vecteur par un nombre paraît naturel.

---

[5]Éric LEHMANN, 1984, *Mathématiques pour l'étudiant de 1ère année, Tome 1, Algèbre et géométrie*, collection Dia Université, Belin.

Inconvénients :

• Le vecteur a l'air d'être « en A », alors que $\vec{V}$ n'est pas « localisé ».

• La somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ peut paraître artificielle.

Deuxième mode de représentation : les vecteurs de l'espace « sont » des translations.

Une translation est définie comme une isométrie conservant le parallélisme.

Avantages :

• La non-localisation du vecteur est évidente.

• La somme de deux vecteurs se ramène à la composition de deux translations.

Inconvénients :

• Le produit $x\vec{V}$, x désignant un nombre réel, n'est pas « naturel ».

• La direction d'une translation n'est claire que si on a dessiné un couple de points.

Troisième mode de représentation : les vecteurs de l'espace « sont » les points de E, muni d'un point origine O.

Avantage :

• Un vecteur est représenté par le symbole le plus simple possible : un point.

Inconvénient :

• Une fois l'origine O fixée, on n'arrive plus à distinguer les points de E et les vecteurs de $\vec{E}$: on ne distingue pas toujours ce qui est lié au choix de ce point O particulier et ce qui en est indépendant.

À titre d'exercice, E. Lehmann demande à l'étudiant, lecteur de son manuel, de chercher les définitions de $\vec{E}$ qu'il a apprises au cours de sa scolarité, et ne prend guère de risque en lui posant la question « Est-ce qu'elles sont différentes [de celles qui viennent d'être exposées ?], si son lecteur a été scolarisé en France.

Nous verrons plus loin qu'il n'en est pas de même si on prend en compte l'enseignement dans la plupart des pays anglo-saxons, dans lesquels un autre type de représentation (le « rayon vecteur » ou « vecteur-position » à partir d'une origine) est beaucoup utilisé : c'est un mélange du premier et du troisième mode évoqué par Lehmann. Mais nous verrons que ce n'est pas seulement un mode de représentation, favorisant plus ou moins l'intuition personnelle de tel ou tel individu : c'est un moyen de travailler, d'énoncer et de mettre au travail des résultats, bref, un véritable outil du travail mathématique, qui permet à toute une communauté de mathématiciens (élèves, étudiants et professeurs) d'étudier et de résoudre des problèmes avec d'autres techniques que celles utilisées en France.

En d'autres termes, une approche de la question débordant les contraintes et habitudes locales (liées aux institutions et pratiques d'un pays particulier) est nécessaire, si on ne veut pas en être prisonnier dans l'analyse à laquelle nous souhaitons nous livrer.

* Le deuxième exemple appartient justement aux institutions d'un pays anglo-saxon. Dans leur ouvrage intitulé « Metric affine geometry », Ernst Snapper et Robert J. Troyer, paru en 1971 chez Dover, le chapitre consacré aux espaces affines comporte 23 paragraphes et 111 pages. Au paragraphe 14, intitulé « L'espace tangent », on trouve une remarque, pp. 64 et 65, dont nous donnons ci-dessous une traduction, assurée par nos soins.

« *Une remarque annexe sur l'enseignement au Lycée.*

Nous pensons que le meilleur moyen d'introduire l'algèbre linéaire au 11ème ou 12ème niveau au lycée est de choisir un point c dans un plan affine réel X et d'identifier chaque point x avec la flèche ou vecteur ayant c comme origine et x comme extrémité. L'addition vectorielle peut être définie en « complétant le parallélogramme » et la multiplication scalaire en « étirant ou contractant le vecteur dans la bonne proportion et dans la bonne direction[6] ». Les axiomes usuels d'un espace vectoriel de dimension 2 sur **R** apparaissent alors comme des théorèmes simples de la géométrie élémentaire enseignée au lycée. Ce que l'on fait parfois dans le cadre de la géométrie analytique, l'origine d'un système de coordonnées étant choisi comme point c. Ceci n'est pas recommandé, car cela induit l'élève en erreur en l'amenant à penser qu'un système de coordonnées est nécessaire pour construire un espace vectoriel à partir du plan. Rien, bien entendu, ne pourrait être plus loin de la vérité ; dans ce but, tout ce dont on a besoin, c'est de fixer un point c. Dans l'espace vectoriel X(c) qui en résulte, on peut choisir un système de coordonnées si l'on veut, mais il est absolument indispensable de s'assurer que le concept d'espace tangent X(c) ne dépend pas de ce système de coordonnées.

On devrait, en outre, faire comprendre à l'élève de lycée que différents points c et b dans le plan donnent naissance à différents espaces vectoriels qui sont reliés par la translation T_A telle que $A = \overrightarrow{c,b}$. On peut présenter ceci de manière très élémentaire. En bref, nous pensons que le moyen le plus efficace d'introduire l'algèbre linéaire au niveau du lycée consiste à prendre comme point de vue celui de la géométrie différentielle à l'égard du plan. ».[7]

Ainsi, ces auteurs, en considérant le « mode de représentation » que nous avons évoqué ci-dessus (le « rayon-vecteur » issu d'un point fixé, et non pas « origine » pour éviter toute allusion à un éventuel système de coordonnées) le considèrent d'un point de vue

[6]En anglais, le mot « direction » signifie à la fois la direction et le sens, selon la terminologie française.

[7]Nous verrons plus loin que ce point de vue permet en effet d'interpréter d'autres techniques de résolution pour des problèmes liés à des configurations complexes telles que celles évoquées à la note 1.

beaucoup plus significatif qu'un simple mode de représentation : ils le voient d'abord comme un moyen simple de dégager un plan vectoriel du plan affine ordinaire. Ensuite, ils voient l'occasion d'imprimer sur l'élève un premier contact avec la géométrie différentielle : le plan affine ordinaire est une variété en chaque point de laquelle l'espace tangent est un plan vectoriel, deux plans vectoriels en des points distincts étant en relation par un moyen géométrique simple, qui permet de « déplacer parallèlement » les vecteurs : ce moyen, c'est une translation du plan affine ordinaire. Dans une variété différentiable de dimension 2, de tels espaces tangents continuerons d'exister, mais il n'en sera pas de même des relations entre les (différents) espaces vectoriels tangents en des points (distincts) ; l'analogue des translations devra par conséquent être construit : c'est la théorie du déplacement parallèle de Levi-Civita ou ses généralisations (connexions ou dérivations covariantes). Un tel projet d'enseignement, dont la légitimité par rapport à la géométrie différentielle est très grande, ne manque pas de souffle. Le problème de sa faisabilité n'est pas abordé, ce que l'on ne peut guère reprocher aux auteurs de cette brève « note annexe ».

3 - Cadre théorique du point de vue de la didactique des mathématiques.

Le commentaire fait au paragraphe précédent sur la « note annexe » de Snapper et Troyer met en évidence l'un des ingrédients d'un phénomène complexe qui a été analysé par Yves Chevallard dans son ouvrage intitulé « La transposition didactique »[8]. Il convient, en effet, que le savoir enseigné au niveau du lycée soit légitime par rapport à l'institution constituée par l'ensemble des producteurs de mathématiques, les mathématiciens professionnels. C'est en tant que tels qu'ils s'expriment, et on imagine la portée de tels propos en France s'ils avaient été déclarés publiquement par un lauréat d'une médaille Fields. Les exemples de telles interventions de mathématiciens y sont bien connus, notamment à l'occasion dans la période ayant précédé l'élaboration des programmes dits « de mathématique moderne ». De telles interventions jouent le rôle d'accélérateur de la transposition, et constituent une incitation profonde à fabriquer, à découper dans le savoir universitaire, puis à modifier, restructurer, reproblématiser, des outils qui sont très efficaces et très importants dans certaines spécialités de la science mathématique. Dans notre travail, nous aurons ainsi l'occasion d'étudier ce travail de transposition en ce qui concerne les espaces affines. Dans quels buts ont-ils été créés dans les mathématiques « savantes » ? Comment et dans quelles conditions sont-ils

[8]CHEVALLARD Yves, 1991, *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné* avec un exemple de transposition didactique par Yves Chevallard et Marie-Alberte Johsua, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

devenus un objet de l'enseignement des mathématiques au niveau du lycée et même du collège ?

À la lecture de ce qui précède, on aura compris que le cadre théorique dans lequel nous nous placerons prendra en compte les théories de Yves Chevallard. Les recherches en Didactique des Mathématiques conduites dans le cadre de l'École française peuvent grossièrement se répartir selon quatre cadres, quatre théories, quatre manières de structurer ce domaine complexe que constitue l'étude des questions relatives à l'étude des mathématiques et à l'organisation de cette étude. Chacune d'elles est repérée par le nom de son créateur, et par le nom du concept de base qui sert d'emblème à sa théorie :

- la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau ;
- la théorie des champs conceptuels de Gérard Vergnaud ;
- la théorie de la dialectique outil-objet de Régine Douady ;
- la théorie anthropologique de Yves Chevallard.

Ce dernier s'est expliqué sur l'emploi du qualificatif « anthropologique » dans la postface à la deuxième édition de son ouvrage « La transposition didactique ». Dans cette entreprise scientifique récente que constitue la didactique des mathématiques en France, on a évidemment cherché à positionner son projet scientifique par rapport à ceux qui existent déjà, tels que la sociologie ou la psychologie. Yves Chevallard défend dans cette postface un rattachement à l'anthropologie. Nous allons donner une lecture personnelle de l'évolution du modèle élaboré par Yves Chevallard, en distinguant plusieurs étapes importantes.

31 - La modélisation mathématique

Yves Chevallard a proposé dans les études qu'il a conduites, notamment sur l'enseignement de l'Algèbre[9], une théorisation de l'activité mathématique, à l'aide de la notion de modélisation, mot dont il étend le sens qu'il a ordinairement dans l'expression « modélisation mathématique d'un système extra-mathématique », en considérant que l'activité mathématique consiste à modéliser des systèmes qui peuvent être aussi bien mathématiques (il parle alors du « mathématisé » pour désigner le système mathématique que l'on va modéliser, et du « mathématique » pour parler du modèle que l'on fabrique) qu'extra-mathématique (physique, chimie, biologie, économie,

---

[9] Voir la trilogie d'articles qu'il lui a consacré dans la revue « Petit *x* », dans les numéros suivants.
Petit *x* n°5. Le passage de l'Arithmétique à l'Algébrique dans l'enseignement des Maths au Collège. Première partie : l'évolution de la transposition didactique. (1985).
Petit *x* n°19. Le passage de l'Arithmétique à l'Algèbre dans l'enseignement des Maths au Collège. Deuxième partie : la notion de modélisation. (1989).
Petit *x* n°23. Le passage de l'Arithmétique à l'Algébrique dans l'enseignement des Maths au Collège. Troisième partie : Voies d'attaque et problèmes didactiques. (1989-1990).

démographie, ...). Dès ce moment-là, il attire l'attention sur plusieurs caractéristiques du processus de modélisation :[10]

– il y a récurrence dans ce processus : un objet mathématique peut très bien, à son tour, être pris comme système, comme mathématisé.

– la relation de modélisation est réversible (à ce sujet, il cite l'exemple des équations du second degré à une inconnue et les problèmes de recherche de deux nombres dont on connaît la somme et le produit).

Puis il introduit une distinction entre les modèles locaux et les modèles régionaux : les premiers sont ceux auxquels on a le plus souvent affaire, les seconds faisant référence à un niveau théorique. À titre d'exemple de modèle régional, il cite la géométrie analytique, et remarque que la production d'un modèle local s'inscrit en référence à une théorie, même si cette référence n'est pas toujours explicite.

Des exemples de projets d'enseignement ont été construits en s'appuyant sur cette notion de modélisation par Josep Gascon et son équipe, à l'Université de Barcelone. Nous allons en donner un exemple communiqué par l'auteur à l'École d'été de didactique des mathématiques en 1995[11], qui nous permettra d'une part de préciser les différents moments de la modélisation en prenant cet exemple comme support, d'autre part de montrer que la résolution de problèmes, dont on fait souvent l'essentiel de l'activité mathématique, n'est qu'un aspect de l'activité de modélisation (et n'est donc qu'un aspect de l'activité mathématique).

Dans le cadre de cette théorie de la modélisation, « l'objectif de l'activité mathématique est de produire des connaissances sur des systèmes (mathématiques ou extra-mathématiques) » en construisant des modèles mathématiques de ces systèmes. « Les problèmes n'acquièrent de sens que dans le contexte du système étudié : les questions surgissent du système étudié, les solutions reviennent au système étudié », doivent y être rapportées. « Les modèles mathématiques ne sont pas ici le point de départ, ni le but de l'étude ; ils sont des outils de production de connaissances sur les systèmes modélisés. ».

Les étapes de la modélisation, illustrées à l'aide d'un exemple

1ère étape : Une situation problématique, et des questions

Exemple :

La situation problématique

On considère une population dont on veut étudier l'évolution. Il s'agit d'une espèce qui se reproduit par « générations séparées ». On connaît la population de départ X_0.

---

[10]Voir les pages 57 et 58 de l'article cité ci-dessus dans le numéro 19 de Petit *x*.

[11]Les citations qui suivent, entre guillemets, sont extraites de la conférence.

Questions
• Combien y aura-t-il d'individus après un nombre n de générations ?
• Est-ce que la population croît de façon illimitée ? ou bien décroît jusqu'à sa disparition ? Ou encore devient stable autour d'un nombre donné d'individus ?
• Au bout de combien de générations aura-t-on un nombre donné d'individus ?
• Quelles caractéristiques de la population déterminent les réponses à ces questions ?

2ème étape : Délimitation du système et construction du modèle mathématique.

Exemple (suite):

Construction du modèle
Soit X_n le nombre d'individus à la n-ième génération. On veut étudier la suite (X_n). L'hypothèse la plus simple est de considérer que le taux de croissance de la population est constant.
$\frac{X_{n+1}-X_n}{X_n} = r$. On obtient le modèle (de Malthus) :

$$X_{n+1} = (1+r)\, X_n .$$

Supposons en outre qu'il y a une émigration ou une immigration e constante. On a alors le modèle :

$$X_{n+1} = (1+r)\, X_n + e.$$

3ème étape : Travail du modèle.

Exemple (suite):
Dans le cas où $e = 0$, un travail sur le modèle permet d'arriver à l'expression

$$X_n = X_0\,(1+r)^n,$$

qui permet de répondre aux questions de départ :
croissance illimitée si $r > 0$,
décroissance et disparition si $r < 0$.
Dans le cas où $e \neq 0$ et $r \neq 0$, le travail sur le modèle nous conduit à réaliser un changement de variable $Y_n = X_n + k$, de façon à ce que (Y_n) soit une suite géométrique. On arrive alors à

$$X_n = (1+r)^n\,(X_0 + \frac{e}{r}) - \frac{e}{r} .$$

Si $e > 0$, et $r < 0$, la population tend vers $-\frac{e}{r}$.

Si $e < 0$, et $r > 0$, la population croît de façon illimitée si $X_0 > -\frac{e}{r}$, décroît si $X_0 < -\frac{e}{r}$.

4ème étape : Vers de nouveaux problèmes

Exemple (suite):
• Étant donné le taux de croissance r et deux valeurs de la population X_i et X_j, est-il possible de connaître X_n pour une valeur donnée de n ?
• Étant donné r et une population initiale X_0, quel rapport doit-il y avoir entre r et e pour que la population tende vers une valeur constante ?
• Si une population a eu un accroissement de 80% en 10 générations, peut-on connaître les valeurs de r et de e ? ».

Du modèle aux germes de champ de problèmes

« Les problèmes qui surgissent dans la 4ème étape n'ont plus nécessairement à être interprétables dans les termes du système : le modèle s' « autonomise ».
Le travail du modèle peut permettre de grouper les problèmes. On obtient ainsi des champs de problèmes, ou plutôt des germes de champs de problèmes, que l'étude du modèle permettra de faire émerger.

Exemple (suite):
• Étude des suites arithmético-géométriques

$$X_{n+1} = aX_n + b.$$

En appliquant la technique de la translation, on obtient :
Si $a \neq 1$, $X_n = a^n (X_0 + \frac{b}{a-1}) - \frac{b}{a-1}$.
Si $a = 1$, $X_n = X_0 + nb$. »

Évolution d'un champ de problèmes

« Un champ de problèmes n'est jamais un ensemble bien déterminé de problèmes ; il se forme au fur et à mesure qu'avance l'étude.
Tout au long de l'étude, la variation des techniques peut produire des élargissements du champ de problèmes.

Exemple (suite)

La routinisation de la « technique de la translation » produit une nouvelle technique :
On sait en effet que pour une suite arithmético-géométrique

$$X_{n+1} = aX_n + b.$$

la solution, dans le cas où $a \neq 1$, peut s'écrire sous la forme
$X_n = Aa^n + B$. Pour déterminer les inconnues A et B, on peut résoudre le système obtenu en écrivant qu'elles vérifient $X_0 = c = A + B$, et $X_1 = ac + b = Aa + B$.
On obtient ainsi une nouvelle technique que l'on peut appeler « technique des coefficients indéterminés ».

Élargissement du champ de problèmes.

Exemple (suite)

Dans le cas d'une suite arithmético-géométrique, des égalités

$$X_{n+1} = aX_n + b$$
$$\text{et } X_{n+2} = aX_{n+1} + b$$

on déduit

$$X_{n+2} = (a+1)X_{n+1} - aX_n .$$

cas particulier de

$$X_{n+2} = a_1X_{n+1} + a_2X_n ,$$

suite récurrente d'ordre 2 dont la relation de récurrence est linéaire.

Le processus d'étude engendre des besoins théoriques.

Le besoin de **justifier** le travail réalisé, et en particulier **les nouvelles techniques**, se fait sentir.

Exemple (suite)

La technique « des coefficients indéterminés » doit être justifiée, ce qui conduit pour les suites récurrentes de la forme

$$X_{n+2} = a_1 X_{n+1} + a_2 X_n ,$$

au théorème suivant : l'ensemble des suites vérifiant une telle relation de récurrence linéaire est un espace vectoriel de dimension 2.

Ce travail théorique peut conduire à l'**émergence de nouvelles techniques** :

Exemple (suite)

Dans le cas des suites récurrentes de la forme

$$X_{n+2} = a_1 X_{n+1} + a_2 X_n ,$$

surgit alors une nouvelle technique : la recherche de deux solutions linéairement indépendantes (base de l'espace vectoriel des solutions).

et à de **nouveaux élargissements du champ de problèmes.**

Exemple (suite)

On peut élargir le champ de problèmes aux suites où la récurrence est linéaire, mais non homogène, qui lui même va générer de nouvelles techniques : recherche d'une solution particulière....

Enfin, on peut par ailleurs chercher à améliorer le modèle initial du système car, ici par exemple, l'hypothèse « r est constant » semble irréaliste. Comment le modifier pour prendre en compte les variations de r en fonction de X_n ?

On peut par exemple lui faire subir l'adaptation suivante : au lieu de considérer que $\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n}$ est constant, on peut, dans le cas où la population a tendance à croître d'une génération à la suivante lorsqu'elle est faible et à décroître d'une génération à l'autre lorsqu'elle est forte, utiliser un modèle dans lequel $\frac{X_{n+1} - X_n}{X_n}$ est égal à $a - a X_n$, modèle que les biologistes ont beaucoup étudié (le modèle logistique).

En posant $Y_n = \frac{a+1}{a} X_n$, on obtient un nouveau modèle pour la population, qui est un système dynamique chaotique se présentant sous la forme $Y_{n+1} = f(Y_n)$ où f est la fonction numérique du second degré définie par $f(x) = (a+1)\, x(1 - x)$.

Nous reviendrons sur la modélisation mathématique pour en décrire certains aspects à l'aide des organisations mathématiques, dernier état à notre connaissance du développement de la théorie proposée par Yves Chevallard, et nous préciserons seulement à ce moment-là l'utilisation que nous ferons de la notion de modélisation.

Nous allons maintenant focaliser notre attention sur un deuxième aspect complémentaire du travail de Chevallard ; il concerne cette fois-ci les outils du travail mathématique.

32 - Les outils sémiotiques du travail mathématique

Dans l'article intitulé « Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique »[12], Yves Chevallard soutient que l'activité mathématique n'est pas une activité intellectuelle qui se situerait hors du monde, mais qu'au contraire elle est indissociable de la manipulation d'objets matériels que l'on peut ranger parmi les catégories suivantes : les mots (registre de l'oral), les gestes, les écrits ou dessins (mots, graphiques, symbolismes, calculs, ...), et les objets matériels au sens courant du terme. Ces objets émergent dans des pratiques : c'est la raison pour laquelle il les appelle des praxèmes. Parmi les différents registres précédents (oral, gestuel, écrit), pour des raisons de standardisation, on se restreint à celui de l'oral et surtout de l'écrit, ce qui peut donner à penser que l'activité mathématique peut être réduite à un discours oral ou écrit, et peut par conséquent être restituée par simple lecture ou audition. Selon lui, la culture a tendance à ne retenir que la valence sémiotique des praxèmes (c'est-à-dire le fait que ces derniers servent à exprimer un certain travail) et à passer sous silence leur valence instrumentale, c'est-à-dire le fait qu'ils constituent de véritables outils pour le travail mathématique, qui ne se fait pas seulement « dans la tête », mais aussi avec les discours que l'on prononce, les gestes que l'on fait, et les signes que l'on écrit. Yves Chevallard illustre ceci à l'aide de l'exemple suivant. Si je résous le petit problème « Si 3 cahiers coûtent 18 francs, combien coûtent 5 cahiers ? » en procédant ainsi : « Soit $f(x)$ le prix de x cahiers. La fonction f est supposée linéaire, et on a : $f(3) = 18$. Il vient donc : $f(5) = f(\frac{3 \times 5}{3}) = \frac{5}{3} \times 18 = 30$. Donc 5 cahiers coûtent 30 francs. », le praxème « f » sert d'une part à me montrer ce que je suis en train de faire (et à le montrer à d'autres, qui peuvent ainsi contrôler mon travail) et d'autre part me permet d'accomplir mon travail. Ainsi, selon lui, il n'y a pas d'abord la pensée et ensuite son expression par des écrits et des calculs : la pensée n'existe qu'à travers l'activité, qui est ici une activité de calcul. Un élève qui proposerait la solution suivante au problème précédent :

$3 = 18$

$1 = 18 : 3$

$5 = 5 \times 6 = 30$

donc, 5 cahiers coûtent 30 francs.

montre une activité qui, malgré l'emploi incorrect du signe « = », n'est pas aberrante.

---

[12] Séminaire n° 122 (1991-1992), Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Faute d'un praxème indisponible chez lui (le praxème *f* vu précédemment, ou l'inconnue *x*), l'élève a détourné le signe « = » de son emploi usuel. En revanche, un élève ne sachant pas résoudre le problème précédent, pourra très bien résoudre convenablement celui-ci :

Si 4 bonbons coûtent 2 francs, combien coûtent 6 bonbons ?

Cet élève, en effet, disposera ici d'un outil de travail très simple, constitué par un praxème oral qui permet de dire, et donc de faire, ce qui suit :

2 est la moitié de 4, donc 6 bonbons coûtent la moitié de 6, soit 3 francs.

Certes, cet outil de travail ne permet de s'attaquer qu'à un nombre très réduit de problèmes de proportionnalité. Comme le dit Yves Chevallard « Le travail des mathématiciens consiste à créer d'autres systèmes de praxèmes, fournissant des outils de plus en plus adéquats à l'activité mathématique. Des outils de travail qu'il faut apprendre à manipuler et dont il faut savoir et pouvoir se servir. Ce sont eux qui autorisent la pratique mathématique et c'est à travers eux que se constituent les objets de cette pratique. ».

En revenant aux vecteurs, nous allons montrer que les praxèmes qui leur sont attachés, et en particulier les différentes écritures permettant de les désigner, mais également de faire du travail avec elles, ont longtemps été un sujet de polémique entre les différents mathématiciens et physiciens qui ont contribué à l'élaboration du calcul vectoriel moderne. Nous montrerons également que selon les institutions et selon les pays les praxèmes liés aux vecteurs ne sont pas les mêmes, et nous en examinerons les conséquences pour les techniques de résolution de certains types de problèmes, en particulier, les problèmes d'alignement et de concours., ainsi que l'étude des configurations de la géométrie euclidienne élémentaire.

Par la suite, Yves Chevallard a élaboré les notions d'« ostensif » et de « non-ostensif » qui permettent de désigner les deux aspects d'un concept mathématique : l'ostensif correspond au praxème, et le non-ostensif désigne l'objet mathématique, qui émerge des pratiques mettant en œuvre ces praxèmes ou ostensifs.

Nous montrerons que la notation d'un vecteur à l'aide d'une seule lettre surmontée d'une flèche qui figure actuellement au programme de Seconde, en tant que praxème, n'est guère utilisée dans les types d'activités et de problèmes qui figurent au programme d'enseignement de cette classe. Nous verrons que la pression mise par les manuels scolaires (et par les professeurs eux-mêmes) pour valoriser ce praxème ne trouve pas de contrepartie réelle dans l'activité mathématique demandée aux élèves dans *les types de tâches qu'on leur demande de savoir faire. En revanche, nous montrerons que d'autres ostensifs relatifs aux vecteurs et aux points, présents dans d'autres institutions, y sont beaucoup mieux adaptés, mais que leur mise en place réclame des conditions bien précises pour être viable.*

33 - Praxéologies mathématiques et praxéologies didactiques

La dernière étape de théorisation concernant l'étude des questions relatives aux mathématiques et à leur enseignement faite par Yves Chevallard est souvent décrite à l'aide du sigle « les 4 T ». La particularité de ce modèle théorique (ici, synonyme de théorie) réside dans le fait que les « 4 T » :

tâches
techniques
technologies contrôlant ces techniques,
théories contrôlant et intégrant elles-mêmes ces technologies,

vont permettre de rendre compte à la fois des mathématiques elles -mêmes (en effet, on voit immédiatement que l'on va pouvoir donner dans le cadre de l'activité mathématique une signification à chacun de ces mots, qu'il conviendra cependant de bien préciser), et de leur enseignement, et plus généralement de leur étude. En ce qui concerne ce dernier aspect, des tâches d'organisation de l'étude sont identifiées par les institutions chargées de l'organiser, et par les professionnels de l'enseignement que sont les professeurs. Les techniques relatives à l'accomplissement de ces tâches existent également. Mais ces techniques sont très personnalisées, le métier de professeur étant souvent encore considéré comme peu qualifié, de ce point de vue. Enfin, à partir du niveau suivant (technologies, puis théories), l'état des lieux est pauvre, embryonnaire et le développement de technologies justificatives de techniques est justement l'un des objets de la didactique des mathématiques. Les « 4T » vont donc permettre de décrire des **organisations mathématiques** de ***différents niveaux***, ainsi que des **organisations didactiques** mettant en œuvre ***différents moments.***
Pour pouvoir décrire avec quelque précision ces organisations mathématiques et didactiques (Chevallard utilise le mot « praxéologie » à la place du mot « organisation »), il convient de préciser quels sont les termes primitifs de sa théorie.

Chevallard appelle « œuvre » toute production humaine dont l'objet est d'apporter une réponse à une ou plusieurs questions, théoriques ou pratiques. Ces questions sont la raison d'être de l'œuvre.

Ainsi, le Calcul vectoriel est une œuvre. Quelles sont ses raisons d'être, c'est-à-dire les questions qui lui ont donné naissance ? Nous étudierons cette question dans notre deuxième partie, sans la restreindre à l'Algèbre linéaire, mais en gardant comme préoccupation la liaison points-vecteurs. Notre investigation portera donc à la fois sur les vecteurs, les espaces vectoriels et les espaces "ponctuels", affines et métriques.

Se former, pour une personne, c'est « entrer en contact avec un certain nombre d'œuvres ».
Il existe des œuvres particulières, les institutions, dont le but est d'organiser le contact entre une personne et certaines œuvres ; par exemple, la famille, l'École.
Ce contact peut se faire spontanément, ou alors être le résultat d'une intention. C'est le cas en ce qui concerne l'École, institution qui a été créée par les pouvoirs politiques au cours d'un long processus, pour permettre aux jeunes d'entrer en contact avec des œuvres sélectionnées en fonction de besoins que la société (ou ceux qui la dirigent) identifie(nt) comme nécessaires à son bon fonctionnement.

Pour décrire plus finement ce qui précède, Chevallard introduit les notions d'*objet*, de *personne* , de *rapport personnel,* et *d'univers cognitif.*
Dans la théorie, tout est objet.
« Le ***rapport personnel*** d'un individu X à un objet o est l'ensemble des interactions, sans exception, que X peut entretenir avec o. Par exemple, le manipuler, l'utiliser, en parler, y rêver, ...
On dira que « o existe pour X » ou que « X connaît o » si X possède un rapport personnel à o, ce que l'on notera : $R(X, o) \neq \varnothing$. »
« La ***personne*** est le couple formé par un individu X et par le système de ses rapports personnels $R(X, o)$ à un moment de son histoire.
Dans son évolution au cours du temps, la personne change, l'individu restant un invariant. »
L'***univers cognitif*** d'un individu X est l'ensemble des couples (o, $R(X, o)$) tels que $R(X, o) \neq \varnothing$. On le note $\mathcal{U}(X)$. La formation d'un individu, c'est la formation de $\mathcal{U}(X)$.

Puis, Chevallard décrit le lien entre les individus et les institutions en terme d'***assujettissement***. Être *sujet* d'une institution, cela veut dire à la fois être *soumis à* l'institution, mais également *être soutenu* par l'institution.

Les relations entre individus et objets ont leurs duales en termes d'institutions et d'objets.

« Étant donné un objet o et une institution I, on dira que o existe pour I, ou que I connaît o si I possède un rapport institutionnel à o, R(I, o), qui est le rapport du sujet idéal de I, c'est-à-dire le rapport à o qui devrait être celui d'un « bon » sujet de I. »
De même, on peut définir l'univers cognitif de I, ensemble $\mathscr{U}$(I) des couples (o, R(I, o)) tels que R(I, o) $\neq \varnothing$.

En devenant sujet d'une institution I, un individu X, ayant au départ un univers cognitif $\mathscr{U}$(X), va être assujetti aux rapports institutionnels R(I, o), qui vont modifier ses rapports personnels R(X, o) pour les o qui existent pour I, de manière à ce qu'ils ressemblent le plus possible aux R(I, o), à moins que X ne soit un « mauvais sujet » pour I. Les rapports personnels d'un individu X sont le résultat de ses assujettissements institutionnels successifs, dans les institutions où il a été acteur.

En fait, un objet ne vit pas seul dans un univers cognitif : les objets sont regroupés en organisations, et il se peut qu'un univers cognitif évolue sans que la quantité d'objets qu'il contient varie : c'est alors le réseau des relations entre ces objets qui se modifie. Ainsi, pour un individu X, l'entrée dans une œuvre $\mathscr{O}$ va s'accompagner par l'apparition dans son univers cognitif $\mathscr{U}$(X) de nouveaux objets, la disparition d'autres objets, et par des modifications du réseau de relations entre tous ces objets. Son univers cognitif varie, passant d'un état $\mathscr{U}$(X) à un état $\mathscr{U}'$(X).

Le travail du professeur Y dans l'institution I que constitue une classe pour aider les élèves à rentrer dans une œuvre $\mathscr{O}$ consiste précisément à aider ses élèves X_i à faire évoluer leur rapport personnel R(X_i, o) à certains objets de cette œuvre de manière à ce qu'il soit le plus conforme possible au rapport institutionnel R(I, o) à ces mêmes objets, et ceci dans un temps limité : lorsque ce changement s'est effectivement produit, il y a eu apprentissage.

C'est au moment où le professeur engage cette action dont le but est de provoquer cette évolution des univers cognitifs de départ $\mathscr{U}$(X_i) de ses élèves que peuvent apparaître des conflits cognitifs entre les $\mathscr{U}$(X_i) et l'univers cognitif $\mathscr{U}$(I) de l'institution I dans laquelle on étudie l'œuvre $\mathscr{O}$ en question, conflits qui peuvent provoquer du désintérêt ou de l'agressivité chez certains élèves (C'est en particulier le cas lorsque d'autres assujettissements sont considérés par l'élève comme plus bénéfiques pour lui que les assujettissements scolaires, ou lorsque ces derniers lui apparaissent comme néfastes).

Une œuvre 𝒪 vit en général dans plusieurs institutions I, I', I", ... On appelle transposition institutionnelle d'une œuvre 𝒪 le processus global qui amène l'œuvre 𝒪 à vivre dans une institution I à partir d'une institution I'.

Nous verrons ce phénomène se produire plusieurs fois en ce qui concerne les vecteurs, les institutions étant alternativement l'Algèbre en relation avec la Géométrie de l'espace, différentes branches de la Physique, et en particulier l'Électricité, la Géométrie "ordinaire" de l'espace à trois dimensions, ...

Lorsqu'elle a lieu vers une institution I à vocation didactique telle qu'un système d'enseignement ou l'un de ses niveaux (une classe), la ***transposition*** de l'œuvre 𝒪 dans I, est qualifiée de ***didactique.*** Elle a pour but d'adapter l'œuvre 𝒪, de l'apprêter pour que les sujets de I puisse devenir des acteurs de l'œuvre 𝒪 ainsi adaptée.

Notre troisième partie a précisément pour but d'étudier l'évolution au cours du XXème siècle des différentes transpositions didactiques de morceaux de l'œuvre que constitue le calcul vectoriel, en France. Les niveaux que nous prendrons en compte seront celui du collège, du lycée et dans une moindre mesure celui des classes préparatoires aux grandes écoles.

Dans notre quatrième partie, nous examinerons certains aspects de transpositions didactiques relatives au calcul vectoriel dans quelques pays anglo-saxons.

Ainsi, une œuvre est :

– d'une part, une réponse à un ensemble de questions qui lui ont donné naissance.

– d'autre part une organisation dans laquelle se trouvent plusieurs objets liés par un réseau de relations, avec lesquels les acteurs de l'œuvre ont certains rapports.

331 - Les organisations mathématiques

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire les « 4T » concernant les organisations mathématiques[13].

[13]Nous renvoyons, pour davantage de détails, le lecteur aux articles suivants de Chevallard :

– « La fonction professorale esquisse d'un modèle didactique », publié dans les Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques de 1995 (édition coordonnée par Robert Noirfalise, IREM de Clermont-Ferrand , et Marie-Jeanne Perrin-Glorian, IUFM d'Arras et Équipe DIDIREM Paris VII ;

– « Familière et problématique, la figure du professeur », publié dans la revue « Recherches en didactique des mathématiques », Volume 17/3, 1997, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

Des questions aux Tâches

Une question, en français, c'est une demande d'information.
En latin, ce mot désigne également l'enquête, la recherche en vue d'obtenir cette information.
En fait, on s'intéresse rarement à une question ou une tâche isolée, mais plutôt à des types de questions ou des types de tâches.
Chacun peut citer de nombreuses questions ou tâches mathématiques :

1) Déterminer les nombres réels x tels que $x^2 + x - 1 = 0$;
2) Quel est le reste de la division euclidienne de 2^{1999} par 10 ?
3) Le nombre $1 + 3\sqrt{2}$ est-il un nombre rationnel ?
4) Quels sont les nombres réels x tels que $x^3 - x = \frac{1}{2}$?

Types de tâches et Techniques

Tâches routinières pour X et tâches problématiques pour X

Un type de tâches $\mathscr{T}$ est dit routinier pour X quand X est amené à accomplir régulièrement et avec succès des tâches $\mathscr{T}$ de ce type.
On admet alors qu'il dispose d'une « manière de faire » ou « technique » (du grec tekhné, savoir-faire) relative à $\mathscr{T}$.

Remarque :
Ce qui précède est valable pour des tâches n'ayant rien à voir avec les mathématiques. Ainsi, Marcel Mauss a évoqué les techniques du corps pour des activités aussi usuelles que la marche. De même, le mot « technique » a un sens beaucoup plus large ici que dans le langage courant. Ainsi, ouvrir la porte d'une voiture, s'asseoir à son volant exigent une certaine technique, même si ces gestes sont devenus routiniers pour beaucoup de gens. La rééducation après la fracture d'une jambe montre qu'il en est de même pour la marche.

Exemples :
– La tâche 1) évoquée ci-dessus est routinière pour un élève de Terminale S, problématique pour un élève de Troisième ou de Seconde ;
– La tâche 2) est problématique pour un élève actuel de Terminale.
– ...

Remarques relatives aux tâches et aux techniques

• Toute tâche qui est routinière pour X a été problématique.
Exemple : la marche.
• Une technique a toujours une portée limitée.
Exemple :
La technique de décomposition en facteurs premiers pour trouver le PGCD et le PPCM de deux nombres échoue lorsqu'ils sont suffisamment grands.

• Tout type de tâches doit être construit : aucun type de tâches n'existe spontanément.

• Pour un type de tâches $\mathcal{T}$ qui existe pour un individu X, on peut considérer la question: *Comment accomplir des tâches T du type $\mathcal{T}$?*

Si ce type de tâches est problématique pour X, et si X veut tout de même accomplir des tâches T, alors il va devoir étudier la question ci-dessus, dans le but de disposer d'au moins une technique τ dont la portée suffit pour effectuer T.
Alors de deux choses l'une :
– ou bien, X cherche et trouve une œuvre $\mathcal{O}$ qui lui offre la réponse à la question ;
– ou bien, il cherche à l'élaborer lui-même.

• Lorsque X possède une technique τ relative à un type de tâches $\mathcal{T}$, et que X est amené à exécuter fréquemment des tâches de ce type avec cette technique, ces dernières se routinisent, puis se naturalisent et ces tâches ne sont alors plus considérées comme des tâches, et les techniques en question ne sont plus vues comme des techniques. Elles sont considérées comme naturelles, comme n'ayant jamais été apprises.

Une description plus fine de la notion de technique

On peut décrire une technique comme un système formé d'un *dispositif* et de *gestes*.
Accomplir une tâche T selon une technique τ suppose :
– un dispositif, c'est-à-dire un ensemble structuré de moyens et d'instruments (parmi lesquels figurent des ostensifs, y compris matériels, et des non ostensifs) ;
– un ensemble réglé de gestes opérés dans ce dispositif.
Le mot « geste » a ici une signification très générale.

Technologie d'une technique

Une technologie θ d'une technique est un discours qui justifie τ et qui la rend intelligible. On admet qu'aucune technique ne peut exister sans technologie : dans toute institution I, l'existence d'une technologie, même fruste, est indispensable pour qu'une technique puisse y vivre.

Une autre fonction d'une technologie est celle de production d'une technique.
On peut donc distinguer deux composantes dans l'activité mathématique
– la mise au point de techniques relatives à des types de tâches ou questions ;
– la mise au point de technologies relatives à des techniques déjà existantes.

Technologie et théorie

Une technologie θ doit elle-même être produite, justifiée et être intelligible : ce rôle est assuré à son égard par une autre technologie Θ, que l'on appellera *théorie*.

Une théorie se distingue d'une technologie par le fait qu'elle a une générativité plus grande, c'est-à-dire que davantage de résultats peuvent en être dérivés plus directement. Mais ce n'est pas toujours le cas. Parfois il y a équivalence entre un résultat théorique et un résultat technologique qui en découle. Il n'y a pas de différence de nature entre les deux niveaux : c'est la raison pour laquelle on parlera souvent du niveau « technicologico-théorique ». Enfin, dans certaines organisations mathématiques, ce dernier niveau technicologico-théorique reste non précisé, et assez flou.

Organisations mathématiques

Partant d'un type de tâches $\mathscr{T}$ ou ce qui revient au même d'un type de questions $\mathscr{Q}$, une œuvre $\mathscr{O}$ permet d'apporter un type de réponse $\mathscr{R}$ qui est une organisation formée de :

- un type de tâches $\mathscr{T}$ associé au type de questions $\mathscr{Q}$;
- une technique τ relative au type de tâches $\mathscr{T}$;
- une technologie θ relative à cette technique τ ;
- une théorie Θ relative à la technologie θ.

Si l'œuvre est mathématique, une telle réponse $\mathscr{R} = (\mathscr{T}, \tau, \theta, \Theta)$ est appelée **organisation mathématique** ou encore **praxéologie mathématique** (du grec *praxis*, action, et *logos*, discours).

Dans ce qui précède, nous avons généré une organisation mathématique à partir des tâches, qui constitue ce que Chevallard appelle le niveau ponctuel : une œuvre est ainsi

vue comme apportant des réponses $\mathcal{R}_i = (\mathcal{T}_i, \tau_i, \theta_i, \Theta_i)$ à un ensemble de types de questions $\mathcal{Q}_i$.
Mais on peut analyser, découper l'œuvre de deux autres manières, qui sont les plus fréquemment utilisées :
– on fixe le niveau technologique θ (et donc également le niveau théorique Θ), et on fait varier τ et $\mathcal{T}$ à θ (et Θ) constant(s) : on obtient alors ce que Chevallard appelle une **organisation mathématique locale**.
– on fixe le niveau théorique Θ et on fait varier tous les niveaux inférieurs qu'elle contrôle : on obtient ainsi plusieurs technologies θ_k, relatives à plusieurs techniques τ_j qui elles-mêmes s'appliquent à différents types de tâches $\mathcal{T}_i$. On obtient alors une **organisation mathématique régionale**.
– au dernier niveau, où tous les éléments du quadruplet varient, on obtient l'organisation mathématique globale.

– Nous montrerons que, dans les programmes actuels de la classe de Seconde, certains types de problèmes (en particulier les problèmes d'alignement, ainsi que quelques problèmes simples de concours) sont mal outillés du point de vue des techniques disponibles pour leur résolution : en d'autres termes, les besoins techniques relatifs à ces types de problèmes ont été sous estimés par les concepteurs de ces programmes. Nous tenterons d'expliquer pourquoi un tel phénomène a pu se produire. Nous mettrons en évidence d'autres techniques que celles suggérées par ces programmes (qui font de ces questions de simples applications de la colinéarité de deux vecteurs), techniques plus élaborées qui nécessiteront une justification et une légitimation, c'est-à-dire une technologie. Nous verrons que les éléments de cette technologie figurent dans certains ouvrages universitaires français récents, mais dans une perspective d'enseignement bien différente.
– Nous montrerons également que, dans ces mêmes programmes, certains types de problèmes ne sont pas affichés, ce qui contribue à les marginaliser alors que leur étude est indissociable de celle des problèmes d'alignement et de concours.

332 - Retour à la modélisation

Dans un article en cours de publication[14], Pilar Bolea, Marianna Bosch et Josep Gascon évoquent le processus d'algébrisation d'une organisation mathématique : dans leur

[14]BOLEA P. (Université de Saragosse), BOSCH M. (Université autonome de Barcelone), GASCON J. (Université autonome de Barcelone), *Le caractère problématique du processus d'algébrisation : proportionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire.*

modèle, l'algèbre élémentaire n'apparaît pas comme une œuvre mathématique au même titre que les autres œuvres qui s'étudient à l'école, mais comme un *instrument de modélisation* d'œuvres mathématiques ; ils considèrent l'algèbre comme un processus, *le processus d'algébrisation*, qui affecte des œuvres mathématiques préalablement constituées.

> *Nous montrerons qu'il est possible d'interpréter la vectorialisation du plan, de l'espace, mais aussi des figures géométriques comme une entreprise de modélisation, cherchant à se dégager de celles proposées par la géométrie euclidienne élémentaire ou par la géométrie analytique. Nous aurons alors l'occasion de mettre en évidence des lacunes dans l'enseignement de cette modélisation vectorielle, la principale tenant au fait qu'elle est très souvent assurée par le professeur, par l'intermédiaire des énoncés de problèmes.*

Les auteurs essaient ensuite de caractériser les modélisations algébriques par rapport aux autres types de modélisations mathématiques (qu'ils appellent « pré-algébriques ») en précisant certains traits distinctifs des premières[15] :

– les modélisations algébriques modélisent explicitement les techniques mathématiques, provoquant ainsi leur développement ;

– la modélisation algébrique permet de poser et d'étudier des problèmes liés à la description, l'interprétation, la justification et la portée des techniques constitutives de l'œuvre modélisée (description des types de problèmes que l'on peut résoudre, conditions d'existence de solutions, ...). Ces techniques se situent ainsi au niveau technologique par rapport aux techniques de départ.

– une modélisation (intra)mathématique est d'autant plus algébrique qu'elle permet de modéliser intégralement les différents composants de l'œuvre constituant le système modélisé, et d'établir des interrelations entre ces composants.

– au fur et à mesure que la modélisation algébrique se développe, les modèles qui en résultent tendent à devenir indépendants du système modélisé et à engendrer de nouveaux types de problèmes de plus en plus éloignés de ce système.

Enfin, ils identifient des indicateurs du degré d'algébrisation d'une œuvre, parmi lesquels nous en retiendons trois :

– la possibilité de prendre en compte et de décrire la structure globale des problèmes auxquels l'œuvre fournit une réponse ;

> *Ainsi peut-on évoquer les problèmes d'alignement et de concours. Nous étudierons les diverses manières dont le calcul vectoriel peut prendre en compte et décrire la structure de ces problèmes, sans nous restreindre à celle qui est utilisée dans les programmes actuels de lycée.*

---

[15]Dans ce qui suit, nous citons des extraits de l'article.

Nous conduirons un travail analogue au sujet des problèmes d'étude de configurations classiques de la géométrie euclidienne.

– la possibilité de réaliser des justifications, des démonstrations et interprétations relatives à cette structure globale des problèmes, en recourant aux composants de l'œuvre considérée. On peut alors poser la question des conditions d'existence d'une solution à ces problèmes, et pas seulement celle de la détermination d'une solution. En d'autres termes, on étudie des types de problèmes et non pas des problèmes considérés un à un.

Sur ce dernier point, nous aurons l'occasion de montrer que l'étude des problèmes d'alignement porte davantage sur des spécimens de ce type de problèmes que sur le type de problèmes lui-même, faute d'une technique de résolution commode à formuler et ayant une portée suffisamment grande.

– l'usage du jeu entre paramètres et variables, aussi bien dans la « pratique » que dans la « théorie » associée, dans un travail mathématique où l'on manipule des formules.

Nous montrerons que la plupart des exercices proposés au début du lycée sur le thème des problèmes d'alignement, ainsi que les techniques proposées pour les résoudre, évitent l'emploi de paramètres dans les « formules » qui y sont manipulées.

Pour résumer, on pourrait dire, d'une manière un peu provoquante, que l'usage qui est actuellement fait du calcul vectoriel dans l'étude des problèmes d'alignement et de concours au début du lycée est pré-algébrique. Autrement dit, on fait un usage pré-algébrique d'un outil de modélisation algébrique de la géométrie élémentaire. Le problème que nous essaierons de résoudre est alors le suivant : quelle organisation mathématique proposer, avec quels ostensifs, pour éviter une telle situation ?

333- Des organisations mathématiques aux organisations didactiques.

Lorsque qu'une personne veut obtenir une réponse à un type de questions (ou à un type de tâches), nous avons vu précédemment qu'il a le choix entre deux solutions : étudier seul la question ou étudier une œuvre déjà constituée pour fournir une telle réponse.

Nous nous plaçons ici dans le cas où les responsables politiques de la société ont défini une liste d'œuvres à étudier à travers un programme d'étude, et ont créé des institutions dont le but est précisément d'organiser l'étude de ces œuvres pour toute une communauté d'étude. Les éléments de la théorie en rapport avec ces questions sont les notions de « système didactique », de « programme d'étude » et de « moments de l'étude » .

Système didactique

La définition qu'en donne Yves Chevallard complète de manière heureuse le trop fameux « triangle didactique », objet dont la sémioticité a permis une large vulgarisation qui n'a pas eu que des effets bénéfiques sur l'appréciation du travail des didacticiens. En effet, la définition utilise les notions évoquées précédemment.
Étant donné un type de questions $\mathcal{Q}$, ou ce qui revient au même, un type de tâches $\mathcal{T}$, dès qu'un ensemble $\mathcal{X}$ de personnes est amené à étudier $\mathcal{Q}$, on dit qu'il se forme autour de $\mathcal{Q}$, un système didactique $\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Q})$. $\mathcal{X}$ s'appelle communauté d'étude.

Cette définition est très large, mais correspond à de nombreuses réalités professionnelles (équipe de chercheurs universitaires, de l'industrie, en économie, ... , équipe de techniciens devant mettre en place une nouvelle machine dans un atelier, ...). Ce qui montre que les phénomènes à étudier par la didactique dépassent très largement ceux du monde scolaire et universitaire. Les effectifs de $\mathcal{X}$ peuvent être très variables : il se peut que $\mathcal{X}$ soit un singleton, une paire, ou un ensemble de plusieurs dizaines d'éléments.

Mais on s'intéresse ici plus particulièrement à des systèmes didactiques dans lesquels intervient un second groupe de personnes, noté $\mathcal{Y}$, que Chevallard appelle les aides à l'étude. Un tel système didactique est noté alors $\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Q})$. Les membres Y de ce groupe ont déjà étudié le type de questions $\mathcal{Q}$, et leur travail va consister à aider les X de $\mathcal{X}$ à étudier $\mathcal{Q}$. Le professeur de la classe, désigné par Yπ, est un élément important de $\mathcal{Y}$, mais il est rarement le seul élément de $\mathcal{Y}$. Dans cet ensemble, peuvent également figurer d'autres professeurs, le conseiller d'éducation (études surveillées), des élèves d'un autre niveau (tutorat), des parents, des professeurs ou étudiants donnant des leçons particulières, ... Parmi l'ensemble des Y, on peut cependant identifier la fonction de directeur d'étude concernant le type de questions $\mathcal{Q}$, que Chevallard désigne par la lettre δ, fonction assumée par le professeur Yπ dans le système scolaire. On a alors affaire à un système didactique dirigé.

Programme d'étude

Le fonctionnement d'un système didactique $\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Q})$ a pour but relativement au type de questions $\mathcal{Q}$, de produire une organisation ou praxéologie ($\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{T}$, τ, θ, Θ) que les étudiants devront maîtriser.
À l'école, le type de questions $\mathcal{Q}$ se réfère à une œuvre $\mathcal{O}$ déjà constituée, qui propose déjà une telle praxéologie : c'est celle que le fonctionnement de $\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Q})$ va devoir créer.

En fait, pour modéliser l'étude à l'école, on est amené à partir des œuvres $\mathcal{O}$ plutôt que des types de questions $\mathcal{Q}$: pour l'étude d'une œuvre $\mathcal{O}$ donnée, le système didactique se note alors $\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Q})$.

Mais alors un problème se pose : il convient d'identifier un certain nombre de types de questions $\mathcal{Q}$ pour lesquels l'œuvre $\mathcal{O}$ propose une réponse sous la forme d'une praxéologie ($\mathcal{Q}$, τ, θ , Θ). Dresser une telle liste de types de questions $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, ..., $\mathcal{Q}_n$ ou de types de tâches $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, ..., $\mathcal{T}_n$, qu'il conviendra d'étudier, c'est fabriquer un **programme d'étude.**

Ce programme est en général ensuite restructuré de la manière suivante :

– les types de questions et les *organisations ponctuelles* correspondantes sont étiquetées comme *sujets d'étude*.

– ces sujets d'études sont regroupés plus ou moins clairement dans des *organisations locales*, étiquetées comme *thèmes d'étude*.

– ces thèmes d'étude sont à leur tour réunis dans des *organisations régionales*, étiquetées comme *secteur d'étude*;

– enfin, l'*œuvre* elle-même est un *domaine d'étude*.

Un des aspects essentiels de l'étude consiste à identifier les types de questions associés à un programme d'étude.

Même lorsqu'un programme d'étude P explicite des types de questions (par exemple, dans les programmes actuels, dans les rubriques intitulées « Travaux pratiques »), cette explicitation n'est, en général, pas exhaustive. Le programme se contente de nommer les « grands » types de questions, dans l'étude desquels d'autres types de problèmes, passés sous silence par les programmes, apparaîtront. Il appartient alors au professeur d'établir un programme d'étude P' plus fin que P, dont la liste de type de questions $\mathcal{Q}_i$ est plus complète.

> *Nous mènerons une telle étude en ce qui concerne le « grand » type de questions repéré usuellement sous la terminologie « Problèmes d'alignement, problèmes simples de concours », dans le cadre de l'œuvre « Calcul vectoriel » au début du lycée. Nous serons ainsi amenés à définir ce programme P' plus fin évoqué ci-dessus, et à mettre en évidence des types de problèmes qui mériteraient d'être étudiés, peut-être même davantage que les problèmes d'alignement. Nous la conduirons partiellement en ce qui concerne l'étude des configurations de la géométrie euclidienne à l'aide des vecteurs, et des transformations vectorielles.*

L'étude du fonctionnement du système didactique $\mathscr{S}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Q})$ peut alors être remplacée par l'étude des systèmes didactiques $\mathscr{S}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Q}_1)$.

Il existe, pour un élève, deux façons d'étudier une œuvre qui sont très inefficaces, car elles ne permettent pas de rentrer vraiment dans l'œuvre en question. La première est bien connue et facilement repérable par les professeurs enseignant dans des classes préparant à un examen : son nom, le bachotage, est emblématique, et recouvre une façon d'étudier qui, même si elle est réputée comme peu satisfaisante, n'en est pas pour autant analysée. La théorie de Chevallard permet de caractériser ainsi le bachotage : les élèves qui s'y livrent restent au niveau des questions ou tâches particulières, sans même se rendre compte qu'il existe des techniques bien identifiées qui peuvent être dégagées de leurs multiples emplois particuliers dans des tâches très variées. Quant aux niveaux supérieurs (technologico-théoriques), ils sont fort peu pris en compte par de tels élèves, qui veulent des « trucs » à la fois peu coûteux à acquérir et efficaces dans leur mise en œuvre, mais ne cherchent pas à les justifier ou à les comprendre, cette légitimation de techniques n'ayant guère de place dans leur projet d'étude.
La deuxième consiste à attaquer par le haut la réponse praxéologique fournie par l'étude de l'œuvre, c'est-à-dire par les technologies θ et la théorie Θ, en négligeant les niveaux des techniques et des types de tâches, parce qu'ils sont considérés comme faciles (ce sont de simples applications) ou sans grand intérêt.
Se posent alors légitimement les questions suivantes :
1) Comment s'y prendre pour étudier une œuvre (ou simplement l'un de ses sujets $\mathscr{Q}_1$, ou l'un de ses thèmes) lorsqu'on est un X appartenant au $\mathscr{X}$ d'un système didactique $\mathscr{S}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Q}_1)$?
2) Dans un tel cadre $\mathscr{S}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Q}_1)$, que peut faire un Y appartenant à $\mathscr{Y}$ pour aider les X de $\mathscr{X}$ à étudier une œuvre (ou simplement l'un de ses sujets, ou l'un de ses thèmes) ?

Afin de pouvoir modéliser les praxéologies didactiques, et dans le but d'analyser le processus d'étude d'une œuvre (ou d'une de ses parties), Yves Chevallard a identifié plusieurs dimensions de l'étude, qu'il nomme des moments.

Les moments de l'étude.

Il entend par ce terme de « moments » des phases par lesquels les X de $\mathscr{X}$ et les Y de $\mathscr{Y}$ passent nécessairement au cours de l'étude d'une œuvre, même s'il est difficile de préciser une fois pour toute l'ordre chronologique dans lequel ils vont se succéder, certains pouvant d'ailleurs se produire plusieurs fois au cours du processus. Chacun des

« moments » peut être considéré comme l'une des dimensions de l'étude. L'ordre dans lequel ils apparaissent ci-dessous n'est donc pas obligatoire.

En se plaçant dans le cas de l'étude d'un thème (organisation mathématique locale, correspondant à une technologie θ fixée, qui permet de contrôler des techniques τ_j permettant elles-mêmes de traiter des types de questions $\mathcal{Q}_i$), dans le cadre d'un système didactique que nous noterons $\mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \theta)$, il distingue les moments suivants.

Premier moment de l'étude

C'est celui de la **première rencontre** avec l'**un des types de questions** $\mathcal{Q}$ associé à θ, de l'**identification** de ce type de question, et éventuellement d'une **première rencontre avec un embryon de technique** τ relative à $\mathcal{Q}$.

Ce moment de première rencontre peut se reproduire plusieurs fois, comme on redécouvre une personne que l'on croyait connaître.
Ce moment est essentiel pour donner du sens au type de questions, pour comprendre de quel type de tâches ou type de questions on va s'occuper dans la suite.

> *Nous montrerons, en ce qui concerne les problèmes d'alignement en Seconde, et l'étude des configurations de la géométrie euclidienne avec des outils vectoriels que ce premier moment fonctionne mal : un élève a du mal à identifier le type de questions, à lui donner du sens. Nous examinerons l'influence à ce sujet de la rédaction des énoncés de problèmes .*

Deuxième moment de l'étude

C'est celui de l'**exploration du type de questions** $\mathcal{Q}$ associé à θ, et de **l'élaboration d'une technique** τ relative à ce type de questions.

Chevallard considère que l'élaboration de techniques relatives à des types de questions est au cœur de l'activité mathématique, et que l'organisation actuelle de l'étude en sous estime l'utilité, allant jusqu'à réduire cette élaboration à une simple juxtaposition de techniques toujours nouvelles pour des problèmes toujours nouveaux. À cette vision de l'élève, Chevallard oppose celle d'un apprenti, qui comme ses autres camarades apprentis, et sous la conduite d'un maître artisan, met au point des techniques mathématiques.

On notera que ce deuxième temps met en jeu à la fois l'étude d'un type de questions et l'élaboration d'une technique selon un processus dialectique :
– se lancer dans l'étude suppose au moins un embryon de technique ;
– une technique permet d'étudier et de résoudre des problèmes d'un même type.

Une autre contrainte, évidente compte tenu de ce qui précède, mais rarement remplie en pratique est la suivante : il convient de disposer d'un ensemble de problèmes, pour pouvoir tester sur ceux-ci la technique qui émerge de l'étude des premiers d'entre eux.

> *Dans notre enquête épistémologique relative au calcul vectoriello-ponctuel, nous rencontrerons quelques rares exemples d'auteurs qui favorisent dans leur manuel ce deuxième moment de l'étude dans les questions d'alignement et de concours. L'ensemble de problèmes proposés en fin de chapitre pour assurer une exploration des types de problèmes et conforter l'élaboration des techniques fera l'objet d'une étude particulière dans des manuels scolaires sur les deux types de problèmes que nous privilégions.*

Troisième moment de l'étude

C'est celui de **l'élaboration** de **l'environnement technologico-théorique** (θ , Θ) relatif à la technique τ .

Traditionnellement, et pour des raisons d'économie apparente de temps, les stratégies d'étude font de ce moment technologico-théorique la première étape de l'étude, ce qui permet de traiter d'un seul coup la technologie θ contrôlant de nombreuses techniques et de nombreux types de problèmes, qui pourront ainsi apparaître comme des applications de θ.

Quatrième moment de l'étude

C'est celui du **travail de la technique**.

Le but est ici d'améliorer la fiabilité et l'efficacité de la technique (en retouchant s'il le faut un peu la technologie).
En même temps, ce moment fournit l'occasion à celui qui étudie d'améliorer sa propre maîtrise de la technique.

Il nécessite lui aussi une « banque de problèmes et d'exercices » appartenant au type étudié, dont les éléments seront choisis judicieusement pour pouvoir mettre à l'épreuve et affiner la technique.

Nous montrerons que ce quatrième moment est certainement le plus problématique dans les organisations didactiques actuelles.
Lorsque la technique en question est précise et bien délimitée, elle est souvent donnée sous sa forme la plus élaborée, pour réduire le temps d'enseignement.
Dans le cas où elle n'est pas facile à décrire (c'est précisément ce qui arrive dans les deux questions qui nous occupent), le temps consacré à ce moment risque de devenir trop important, sans que le succès soit garanti.
La question d'un corpus de problèmes adaptés se pose également.

Cinquième moment de l'étude

C'est celui de **l'évaluation**, moment nécessaire au processus d'étude.

Remarque :
Un indice de cette nécessité peut être lu dans le refus de s'y soumettre souvent exprimé par les élèves qui savent très bien ne pas être vraiment rentrés dans l'étude : ils devinent que l'évaluation va objectiver cette « non-entrée » dans l'étude, et la sanctionner. En l'absence d'évaluation, ces élèves (« bachoteurs » ou « théoriciens fuyant la pratique ») pourraient en toute quiétude persister dans leur attitude et ne jamais rentrer dans l'étude.

Nous aurons l'occasion de mettre en évidence que l'absence d'évaluation institutionnelle (devoir en classe, épreuves d'examen) sur un thème est un indice fort de dysfonctionnement de l'organisation mathématique dans lequel il est inséré.

Sixième moment de l'étude

C'est celui de **l'institutionnalisation** de l'organisation mathématique qui vient d'être élaborée.
L'institutionnalisation a pour objet de préciser cette organisation, en distinguant :
– les éléments qui, tout en ayant contribué à sa construction, seront laissés de côté ;
– les éléments qui rentreront de manière définitive dans l'organisation.
Les élèves sont eux-mêmes très clairement conscients de la nécessité d'un tel tri, qu'ils sollicitent parfois du professeur en lui demandant « Et cela, faudra-t-il le savoir ? ».

Ainsi, au moment de l'institutionnalisation, chaque organisation ponctuelle ($\mathcal{Q}_i$, τ_i , θ, Θ) relative à chacun des types de questions $\mathcal{Q}_i$ que le professeur a retenu dans son programme d'étude P', va s'intégrer dans l'organisation locale déjà construite et contenant déjà les organisations ponctuelles ($\mathcal{Q}_j$, τ_j , θ, Θ) déjà étudiées antérieurement. Le processus d'étude amène ainsi à faire des synthèses partielles successives, qui enrichissent mais souvent simplifient l'organisation mathématique locale, définissant ainsi l'univers cognitif $\mathcal{U}/\mathcal{S}/$ de l'institution que constitue le système didactique $\mathcal{S}/\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \theta/$.

Nous tenterons de préciser les contours d'une autre organisation mathématique possible intégrant les problèmes d'alignement et de concours, ainsi que l'étude des configurations de la géométrie élémentaire à l'aide du calcul vectoriel.

Nous évoquerons succinctement la question des synthèses partielles successives, notamment en liaison avec la question de la reprise de l'étude à un niveau donné d'un thème dont l'étude a déjà commencé dans les classes antérieures sur les deux thèmes suivants :

– passage des problèmes d'alignement et de concours traités sans la théorie du barycentre, à leur traitement lorsqu'on dispose de cette théorie ;

– passage de l'étude des problèmes sur les configurations de la géométrie euclidienne élémentaire sans disposer du produit scalaire à leur étude quand on dispose de cet outil.

Deuxième partie

Approche épistémologique

Dans cette partie, nous nous proposons de retracer les grandes étapes de l'émergence des notions mathématiques qui sont au cœur de notre travail : les vecteurs, la notion d'espace vectoriel, la notion d'espace affine.

– La première partie, consacrée aux vecteurs et aux espaces vectoriels, fera largement appel à l'ouvrage de Michael J. CROWE, « A History of vector analysis »[1], dans lequel l'auteur étudie les travaux de Hamilton et de Grassmann sur ce thème, et compare leur influence sur les créateurs du calcul vectoriel moderne, Gibbs et Heaviside. Nous complèterons son travail sur certains aspects, en utilisant la récente traduction en français de l'ouvrage fondamental de Grassmann, l'Ausdehnungslehre de 1844, faite par Dominique Flament[2].

– la deuxième partie sera consacrée à l'émergence de la notion d'espace affine, en partant des travaux de Hermann Weyl, dans son ouvrage « Espace, temps, matière », jusqu'à la publication d'ouvrages universitaires à des fins d'enseignement tels que ceux de Dieudonné et de Snapper et Troyer.

– dans la troisième partie, nous examinerons plus brièvement l'émergence d'espaces plus généraux ayant un lien étroit avec le plan euclidien : les espaces métriques et les espaces vectoriels normés.

– enfin, dans la dernière partie, nous recenserons les théories mathématiques les plus répandues concernant la géométrie élémentaire, autres que celle d'Euclide : nous focaliserons notre attention sur celles qui ont été produites au cours de ce siècle, et qui sont à l'origine des changements de programmes relatifs à l'enseignement de la géométrie. Celle de Hilbert est bien connue, notamment pour les difficultés qu'une transposition au niveau de l'enseignement secondaire engendre ; nous détaillerons celle de Birkhoff, moins connue – ou, du moins, moins citée en France – qui représente une tentative pour alléger l'édifice, en intoduisant plus tôt des axiomes concernant les distances (en supposant connu le corps des réels).

Dans la conclusion, après avoir fait un tour d'horizon des questions qui ont conduit les mathématiciens et physiciens à mettre au point les « systèmes vectoriels », nous dégagerons les avantages et les inconvénients des théories faisant intervenir les vecteurs, comme matériau mathématique susceptible d'être employé à des fins de transposition didactique.

---

[1]Michael J. CROWE, 1967, *A history of vector analysis, The evolution of the idea of a vectorial system,* University of Notre Dame Press, Notre Dame, London.

[2]FLAMENT D., 1994, *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, La Lineale Ausdehnungslehre*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris.

1 - Émergence des vecteurs et de la notion d'espace vectoriel

Les premiers systèmes vectoriels ont été créés dans les années 1840.

11 - Les premiers pas

Avant cette période, trois idées ont ouvert la voie vers les principaux systèmes vectoriels : le parallélogramme des forces, la géométrie de situation de Leibniz et la représentation géométrique des nombres complexes.

111 - Le parallélogramme des vitesses et des forces.

Le rapport entre ce fameux parallélogramme et l'addition vectorielle est tellement étroit qu'il semble évident que les systèmes vectoriels trouvent là leur origine. En fait, il semble bien que l'influence de ce parallélogramme en la matière, malgré son importance, n'ait qu'un caractère indirect. En effet, on trouve l'idée du parallélogramme des vitesses chez plusieurs auteurs grecs anciens, tels Archimède et Héron d'Alexandrie ; quant au parallélogramme des forces, on le rencontre au XVIe et au XVIIe siècle. Au début du XIXe siècle, on voit apparaître dans plusieurs traités un usage fréquent de parallélogrammes relatifs à des entités physiques : l'idée essentielle est la construction d'un diagramme permettant de rendre évidente la détermination d'une résultante. Il n'est pas nécessaire pour cela de penser que l'on additionne des lignes, et il est difficile de voir là une stimulation pour la création d'un système vectoriel. En revanche, l'usage de ces parallélogrammes a fourni un exemple frappant de l'utilisation possible des vecteurs dans les applications en physique.

112 - La géométrie de situation de Leibniz

Notre référence, pour ce paragraphe, est l'ouvrage « la caractéristique géométrique », publié chez Vrin[3] en 1995.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) n'est devenu géomètre que durant son séjour à Paris (1672-1676) ; il lit la Géométrie de Descartes en 1674, et émet à son sujet des critiques par rapport à la réduction de la géométrie à l'algèbre : « Je ne cherche presque plus rien en Géométrie, que l'art de trouver d'abord de belles constructions. Je voy de plus en plus que l'Algebre n'est pas la voye naturelle pour y arriver ; et qu'il y a moyen de faire une autre characteristique propre aux lignes, et naturelle pour les

---

[3]G.W. LEIBNIZ, 1995, *la caractéristique géométrique*, texte établi, introduit et annoté par Javier ECHEVERRIA, traduit, annoté et préfacé par Marc PARMENTIER, Librairie philosophique J.Vrin, Paris, pp. 147-149.

solutions linéaires, au lieu que l'Algebre est commune à toutes les grandeurs, et qu'il faut des détours et des operations forcées ordinairement pour tirer la conclusion du calcul qui ne sont pas encor conniües à tout le monde. Si cette characteristique de Geometrie estoit établie, comme je voy qu'elle pourroit estre, elle meneroit infailliblement là où l'on veut aller, autant qu'il est possible, aussi bien que l'Algebre. »[4]. Il veut dépasser la géométrie cartésienne, de manière à inclure les courbes et les figures mécaniques exclues par Descartes de la Géométrie. Dans la lettre de Leibniz à Huygens de septembre 1679, il précise ainsi le but qu'il se fixe : « Il nous faut encor une autre Analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement *situm* comme l'Algebre exprime *magnitudinem*. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et meme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs ; et je Vous en envoye un essay, qui me paroist considerable. ».

J. Echeverria distingue quatre phases dans la démarche de Leibniz :

– la lecture d'Euclide et d'autres géomètres (Pascal, Desargues, Descartes), pour examiner et critiquer leurs axiomes, leurs définitions, leurs notations et leurs démonstrations ;

– l'analyse des définitions des objets, des relations et des figures géométriques, dans le but de trouver des relations plus générales et de meilleures définitions (*definitio realis*, exhibant d'elle-même la possibilité du défini) ;

– l'introduction des caractères, conformément à son projet général de Caractéristique Universelle : il veut raisonner par le seul truchement des caractères, laissant de côté tout recours à l'intuition et aux figures ;

– l'obtention des définitions, des théorèmes, des démonstrations de manière combinatoire, en calculant.

Compte tenu de l'intérêt qu'elle présente pour notre sujet, nous allons détailler la troisième phase, en citant le texte de Leibniz :

« Les caractères sont des objets exprimant les relations entre d'autres objets, plus faciles à manier qu'elles. A toute opération sur les caractères correspond donc une proposition portant sur les objets et avant de considérer ceux-ci nous pouvons souvent attendre d'avoir achevé l'opération. [...]. Les caractères sont en second lieu d'autant plus utiles qu'ils sont plus exacts, c'est-à-dire qu'ils mettent en évidence davantage de relations entre les objets.[...]. Mais il faut savoir qu'il y a différentes façons, plus ou moins commodes, de traduire en caractères les mêmes objets. ». Leibniz compare alors l'efficacité des anciens chiffres grecs et romains, à celle des chiffres arabes ou indiens, et fait un parallèle avec l'insuffisance de la méthode de Descartes en géométrie : « Les Caractères Algébriques en effet n'expriment pas tout ce qu'il y a à étudier dans

[4]Lettre de Leibniz à Gallois écrite en décembre 1678.

l'espace (ils supposent que certains Éléments ont déjà été découverts et démontrés), ne représentent pas directement et en elle-même la situation des points et ne l'atteignent qu'au terme d'un grand circuit passant par les grandeurs. Il en résulte qu'il est relativement difficile d'exprimer dans un calcul des choses qui sautent aux yeux sur la figure, et plus difficile encore d'en reporter sur elle les résultats.». Il ajoute « Je note d'ailleurs que les Géomètres ont coutume de compléter leurs figures par des descriptions et des explications afin que ce qui n'est pas visible sur elles, une égalité ou une proportion entre certaines lignes par exemple, le soit à défaut dans le commentaire. [...]. Or même s'ils ne respectent pas cette règle assez scrupuleusement, ils nous ont ainsi livré comme les bribes d'une Caractéristique Géométrique ; lorsqu'ils disent par exemple *rect. ABC*, ils veulent dire le triangle construit en traçant à angle droit AB sur BC ; lorsqu'ils disent *AB égal BC égal AC*, ils désignent un triangle équilatère ; lorsqu'ils disent que *deux des trois segments AB, BC, AC sont égaux au troisième*, ils veulent dire que les trois points A, B, C sont sur une même droite. Ayant noté que le seul fait de symboliser les points d'une figure par des lettres suffisait à en manifester les propriétés, j'en suis venu à me demander si toutes les relations liant les points de chaque figure ne pouvaient pas être symbolisés par elles en sorte que la figure soit complètement représentée par une caractéristique et que des résultats qu'on obtient à grand peine en traçant des lignes embrouillées, quand on les obtient, on les découvre simplement en combinant et en transposant des lettres. [...]. Mais ceci recèle une chose de plus grande conséquence : ces caractères permettront en effet d'exprimer les vraies définitions de tout ce qui relève de la Géométrie et d'en poursuivre l'analyse jusqu'aux principes, c'est-à-dire jusqu'aux axiomes et aux postulats, alors que l'Algèbre ne se suffisant pas à soi-même, se voit contrainte d'utiliser des propositions établies géométriquement ; or, en prétendant tout ramener à deux propositions : la première portant sur la somme de deux carrés, la seconde sur la comparaison de triangles semblables[5], elle se voit réduite à tout détourner de son ordre naturel. Lorsque nos caractères nous aurons fourni, une fois pour toutes, la démonstration des Éléments, il sera facile d'apporter aux problèmes des solutions indiquant, sans autre travail, les constructions et des démonstrations graphiques évidentes ; les Algébristes au contraire, ayant trouvé la valeur des inconnues, doivent encore s'occuper des constructions et ayant trouvé les constructions, chercher les démonstrations graphiques. Il est donc étonnant que personne n'ait observé que l'existence de démonstrations et de constructions graphiques expurgées de tout calcul et beaucoup plus succintes, doit comporter l'indication immédiate d'une solution graphique[...]. La raison ayant empêché la découverte d'une analyse graphique réside seulement dans le fait qu'on n'a pas encore inventé de caractères capables de représenter directement la situation des points et qu'il

[5]Allusion aux théorèmes de Pythagore et de Thalès.

est difficile de se sortir d'affaire sans leur aide en présence d'objets multiples et intriqués. Mais dès que nous parviendrons à représenter exactement en lettres les figures et les corps, nous ferons faire un étonnant pas en avant non seulement à la Géométrie mais aussi à l'optique, la phoronomique, la mécanique, et plus généralement à tout ce qui dépend de l'imagination. Nous aborderons ces disciplines par une méthode sûre, pour ainsi dire analytiquement, par suite cette technique merveilleuse nous rendra la mise au point de machines aussi facile que la construction des problèmes de géométrie. De la sorte, sans peine et sans débours, des machines très complexes, les réalités naturelles elles-mêmes, pourront être décrites et transmises à la postérité sans l'aide de figures. [...] ».

Après avoir tracé les grandes lignes de cet ambitieux projet, Leibniz évoque les difficultés que sa mise en œuvre lui ont fait rencontrer : « Mais puisque rien de tel n'est, que je sache, venu à l'esprit de personne, et qu'aucun secours ne vient de nulle part, me voici contraint de reprendre la chose à ses premiers commencements ; nul ne pourrait croire combien cela est difficile sans s'y être essayé ; je l'ai entrepris plus de dix fois à diverses époques, par divers biais tous convenables et féconds en quelque chose, mais qui ne manifestaient pas toutes mes exigences. Enfin, après avoir beaucoup élagué pour parvenir au plus simple, j'ai compris que j'avais abouti lorsque, sans rien introduire qui fût extrinsèque, je parvins moi-même à tout démontrer en utilisant des caractères spécifiques. Mais, alors même que j'avais saisi le principe de cette caractéristique, je piétinai longtemps en voyant qu'il me fallait commencer par des Elements faciles en eux-mêmes et bien connus par ailleurs, mais dont la mise en œuvre devait être si soigneuse qu'elle en devint une tâche ingrate. J'ai cependant poursuivi, j'ai surmonté cette épreuve, je me suis enfin hissé à des résultats plus substantiels. »
L'un des moyens essentiels utilisés par Leibniz est la définition du *situs* : « des points en nombre quelconque peuvent être déplacés en conservant leur situation mutuelle ; pour concevoir que leur situation mutuelle reste inchangée on peut supposer qu'ils sont les extrémités d'une ligne rigide de nature indifférente. ». Plus loin, il améliore cette définition, en introduisant une notation : « on désigne par A.B la situation mutuelle des points A et B, c'est-à-dire un extensum (rectiligne ou curviligne, peu importe) qui les relie et demeure le même tant que cette situation ne varie pas ». En utilisant la notion de situation, il définit ensuite la notion de congruence, et introduit à ce sujet une nouvelle notation, voisine de la lettre γ[6]. « $A\gamma B$ signifiera donc que le point A est congru au point B, en d'autres termes qu'il peut lui être substitué sans qu'on puisse le distinguer ». Il définit de même la congruence de couples de points : « $A.B \ \gamma \ C.D$ signifiera que la situation entre les points A et B est la même qu'entre les points C et D » ; puis fait de même pour des triplets de points, des *n*-uplets de points. En s'intéressant au lieu des

[6]Dans la suite, nous utiliserons cette lettre γ à la place du symbole employé par Leibniz.

points Y tels que A.B γ A.Y, il définit la sphère de centre A et de rayon AB ; le lieu des points Y tels que A.Y γ B.Y est un plan (ensemble des points équidistants des points A et B) ; l'ensemble des points Y tels que A.YγB.YγC.Y est une droite[7], ... A l'aide de ces définitions et de ces écritures, il traite quelques problèmes : il démontre que la relation A.YγB.YγC.YγD.Y détermine un point ; que l'intersection de deux plans est une droite. Leibniz utilise la congruence γ pour énoncer des axiomes : le premier dit que AγB, c'est-à-dire qu'un point quelconque est congru à tout autre, ce qui distingue l'espace géométrique de l'espace physique ; le deuxième dit que la relation A.Bγ B.A est toujours vraie, choix qu'il commente ainsi « la situation de A à l'égard de B est la même que celle de B à l'égard de A, dans la mesure où leur situation mutuelle est une relation n'introduisant aucune différenciation entre les points. Or ceux-ci ne comporteront par eux-mêmes aucune différence, puisqu'ils sont toujours congrus ».

Ces choix interdisent à Leibniz de voir A.B et B.A comme deux entités distinctes, étape indispensable pour que Leibniz ait pu développer un système vectoriel.

Nous verrons plus loin que le calcul vectoriel proposé par Grassmann fournira une réponse au projet que Leibniz a su définir sans pouvoir le conduire à son terme, réponse qui lui permettra en 1846 de gagner un prix promis par la revue « Jablonowskischen Gesellschaft » pour récompenser la création d'un système satisfaisant aux contraintes énoncées par Leibniz dans sa lettre à Huygens, lettre qui venait d'être rendue publique en 1833.

Enfin, sur le plan didactique, nous reprendrons en compte les objectifs définis par Leibniz pour sa Caractéristique Géométrique, pour cerner des fonctions du calcul vectoriel que le système d'enseignement a tendance à sous-estimer.

113 - La représentation géométrique des nombres complexes

Les nombres complexes constituent un espace vectoriel de dimension deux, et leur représentation géométrique permet de fournir une description analytique du plan. C'est en cherchant des nombres permettant de faire la même chose pour l'espace de dimension trois que Hamilton a créé les quaternions, découverte que nous aborderons au paragraphe 22 suivant.

On connaît l'importance qu' a eu cette représentation géométrique des nombres complexes pour que ces derniers puissent être considérés comme des entités mathématiques à part entière. Alors que dès 1545 Cardan les utilise dans son

[7]Leibniz donnera successivement plusieurs définitions de la droite : celle citée ici n'est pas la meilleure, car elle nécessite trois points, alors que deux sont suffisants.

Ars Magna pour résoudre des équations, cette reconnaissance ne date donc que du XIXe siècle. Plus précisément, six mathématiciens ont contribué à la découverte de la représentation géométrique des nombres complexes : Wessel, Gauss, Argand, l'Abbé Buée, Mourey et Warren.

* La première tentative en la matière, qui a échoué, a été réalisée par John Wallis[8] au XVIIe siècle. La première publication achevée sur le sujet est due à Caspar Wessel (1745-1818) ; elle date de 1799, mais elle n'a pas été remarquée par les mathématiciens européens avant 1897, date de la publication d'une traduction en français de son mémoire. L'origine de ce dernier, selon les termes de l'auteur, est de trouver un moyen de représenter analytiquement la direction, plus précisément d'exprimer une ligne droite de façon à ce qu'à l'aide d'une seule équation dans laquelle figurent une ligne droite inconnue et d'autres lignes droites connues, on puisse exprimer à la fois la longueur et la direction de la ligne droite inconnue. Wessel définit une addition des lignes qui n'est autre que l'addition vectorielle, addition qu'il définit en dimension 3. Puis il se restreint au plan pour définir leur multiplication : deux lignes étant données, leur produit a pour longueur le produit des longueurs des facteurs, et l'inclinaison du produit est égale à la somme des inclinaisons (angle que fait la ligne avec "l'unité positive"). À ce sujet, il précise :

Let + 1 designate the positive rectilinear unit and $+\varepsilon$ a certain other unit perpendicular to the positive unit and having the same origin ; then the direction angle of + 1 will be equal to 0°, that of – 1 to 180°, that of $+\varepsilon$ to 90°, and that of $-\varepsilon$ to – 90° or 270°. By the rule that the direction angle of the product shall equal the sum of the angles of the factors, we have : $(+1)(+1) = +1$; $(+1)(-1) = -1$; $(+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon$; $(-1)(+\varepsilon) = -\varepsilon$; $(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon$; $(+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1$; $(+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1$; $(-\varepsilon)(-\varepsilon) = -1$. From this it is seen that ε is equal to $\sqrt{-1}$; and the divergence of the product is determined such that not any of the common rules of operation are contravened.

Il donne ensuite les deux expressions complexes $a + \varepsilon b$ et $r(\cos v + \varepsilon \sin v)$ permettant de représenter anaytiquement n'importe quelle ligne droite. Wessel a également développé un calcul vectoriel en dimension 3 : pour cela, il considère trois rayons deux à deux perpendiculaires d'une sphère de rayon r, qu'il désigne par r, ηr, εr. Chaque point de l'espace est représenté par une expression de la forme $x + \eta y + \varepsilon z$. Par analogie avec les nombres complexes, il pose $\varepsilon\varepsilon = -1$ et $\eta\eta = -1$. Il arrive à définir le produit de $x + \eta y + \varepsilon z$ par $\cos u + \varepsilon \sin u$ (resp. de $x + \eta y + \varepsilon z$ par $\cos v + \eta \sin v$). En revanche, il ne considère jamais de rotations ayant pour axe celui de « l'unité positive », car cela l'aurait conduit à définir les produits $\eta\varepsilon$ et $\varepsilon\eta$, difficulté qu'il a sans doute rencontrée sans pouvoir la surmonter.

---

[8]Voir l'ouvrage *A source book in mathematics* (1959), D.E. SMITH, vol. I, New York.

* La première publication de Gauss sur le sujet date de 1831, mais on en trouve des traces dans l'un de ses travaux dès 1799. Cette publication est, parmi les six que nous évoquerons, celle qui est la plus courte et la plus précise, mais aussi celle qui a eu le plus d'influence : c'est à travers elle que la plupart des grands mathématiciens vont entrer en contact avec la représentation géométrique des nombres complexes.

* Le « Mémoire sur les quantités imaginaires » de l'abbé Buée (1805) n'avait pas la même qualité. Hamilton signale cependant que Buée a tenté d'étendre ses méthodes à l'espace.

* Le travail de Jean Robert Argand (1806), intitulé « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques » donne la représentation géométrique moderne de l'addition et de la multiplication des complexes, et montre comment on peut en déduire des théorèmes de trigonométrie, de géométrie élémentaire et d'algèbre. Argand a tenté, sans succès, d'étendre sa méthode à l'espace. Servois, après avoir lu les travaux d'Argand en a publié une critique accompagnée de ses propres idées sur le sujet. De ce travail de Servois, Hamilton dira qu'il constitue la meilleure approche d'une anticipation des quaternions.

* Le traité de Warren (1828) « A treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities » est méticuleux, en particulier en ce qui concerne les propriétés de commutativité, associativité et distributivité (même s'il n'utilise pas ces mots). Il n'aborde pas l'extension de sa méthode à l'espace.

* C. V. Mourey en annonce une à la fin de son traité « La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendument imaginaires » ; mais, s'il l'a trouvée, elle n'a jamais été publiée.

Après 1831, beaucoup d'autres mathématiciens ont tenté d'étendre à l'espace ce que les nombres complexes sont à la géométrie plane. Parmi eux, Hamilton a découvert les quaternions.

12 - Hamilton et les quaternions.

La découverte des quaternions par Hamilton date de 1843. On a vu au paragraphe précédent (113) que la recherche de nombres jouant pour l'espace un rôle analogue à celui que les nombres complexes jouent pour le plan était un thème de travail bien installé et très vivant dans la communauté mathématicienne de l'époque. Pour préciser la problématique de Hamilton, il faut cependant aller au delà, car sa contribution à l' Algèbre ne se limite pas à l'invention à laquelle son nom reste attaché. En 1837, Hamilton publie un essai intitulé « Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples ; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time ». Dans le préliminaire, écrit en 1835, Hamilton tente de développer le système des nombres réels en s'appuyant sur des intuitions liées à la notion de temps ; il pense ainsi pouvoir justifier l'emploi des nombres négatifs associés à des instants. La dernière partie de l'essai ne comporte rien de moins que la théorie des nombres complexes considérés comme couples de nombres réels. Aucune allusion à l'interprétation géométrique des nombres complexes n'y apparaît : comme pour Gauss, il semble que, pour Hamilton, cette interprétation soit davantage une aide à l'intuition qu'un moyen de fonder, de construire mathématiquement les nombres complexes. Hamilton définit les opérations (addition et multiplication) sur les couples de nombres réels, et montre qu'ils sont équivalents aux nombres complexes de la forme $a + bi$.

In the THEORY OF SINGLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ is *absurd*, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER ; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol $\sqrt{-1}$ is *significant*, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely (as we have just now seen) the *principal square-root of the couple* $(-1, 0)$. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed ; and we may write, if we choose, for any couple (a_1, a_2) whatever, $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}$.

Dans cet essai, il est clair que Hamilton a vu l'importance des propriétés telles que l'associativité, la commutativité, la distributivité, ce qui va lui fournir un autre angle d'attaque pour construire une théorie des triplets, théorie qu'il annonce dans la conclusion de cet essai.

En fait, les recherches de Hamilton relatives aux triplets remontent à 1830, et il a échangé à ce sujet avec d'autres mathématiciens (Graves et De Morgan). Il reprend ses recherches en 1843, en essayant de trouver de nouveaux nombres ayant les propriétés suivantes :

– l'associativité pour l'addition et la multiplication : si N, N' et N'' sont trois de ces nombres, $(N + N') + N'' = N + (N' + N'')$ et $N(N'N'') = (NN')N''$.

– la commutativité pour l'addition et la multiplication : $N + N' = N' + N$ et $NN' = N'N$.

– la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $N(N' + N'') = NN' + NN''$.

– la division est définie sans ambiguité : il y a un nombre X et un seul tel que $NX = N'$ (et en général, X est de la même forme que N et N').

– les nouveaux nombres vérifient la loi des modules. Si trois triplets sont tels que

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j)(a_2 + b_2 i + c_2 j) = a_3 + b_3 i + c_3 j,$$

alors

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2.$$

– les nouveaux nombres ont une interprétation géométrique dans l'espace tridimensionnel.

En langage moderne, on voit que Hamilton se place davantage dans la perspective d'une extension de corps que dans celle d'un calcul vectoriel avec ses deux multiplications (produit scalaire et vectoriel).

Hamilton découvre les quaternions le 16 octobre 1843 ; il a fait de sa découverte une saisissante description dans une lettre à son fils :

« ... an under-current of thougt was going in my mind, which gave at least a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close ; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thougt and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even been allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse – unphilosophical it may be seen – to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols i, j, k ; namely

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

which contains the Solution of the Problem, but of course, as an inscription, has long since mouldered away. A more durable notice remains, however, on the Council Books of the Academy for that day (October 16th, 1843), which records the fact, that I then asked for and obtained leave to read a Paper on Quaternions, at the First General Meeting of the Session : which reading took place accordingly, on Monday the 13th of the November following.».

Les quaternions sont les nombres de la forme $w + ix + jy + kz$ où w, x, y et z sont des nombres réels et i, j et k des vecteurs unitaires dirigeant les axes respectifs des x, y et z, les vecteurs unitaires vérifiant les relations :

$$\begin{array}{ccc} ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$
$$ii = jj = kk = -1.$$

La première publication de Hamilton concernant les quaternions date de 1844 : elle reprend le texte d'une conférence faite devant l'Académie royale irlandaise dans la revue « the Philosophical Magazine ». Hamilton y explique que, contrairement à ce qui se passe pour le a du $a + ib$ des nombres complexes, le w de $w + ix + jy + kz$ n'indique pas une « distance sur un axe ». On y trouve également l'origine des mots « vecteur » et « scalaire » :

The algebraically *real* part may receive ... all values contained on the one *scale* of progression of number from negative to positive infinity ; we shall call it therefore the *scalar part*, or simply the *scalar* of the quaternion, and shall form its symbol by prefixing, to the symbol of the quaternion, the characteristic Scal., or simply S., where no confusion seems likely to arise from using this last abbreviation. On the other hand, the algebraically *imaginary* part, being geometrically constructed by a straight line or radius vector, which has, in general, for each determined quaternion, a determined length and determined direction in space, may be called the *vector part*, or simply the *vector* of the quaternion ; and may be denoted by prefixing the characteristic Vect., or V. We may therefore say that *a quaternion is in general the sum of its own scalar and vector parts*, and may write Q = Scal.Q + Vect.Q = S.Q + V.Q or simply Q = SQ +VQ.

Hamilton illustre l'emploi des symboles V et S dans le cas particulier des quaternions dont la partie scalaire est nulle :

si $\alpha = xi + yj + zk$ et $\alpha' = x'i + y'j + z'k$,

$S\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$ et $V\alpha\alpha' = i(xy' - x'y) + j(zx' - xz') + k(xy' - x'y)$

Avec les notations du calcul vectoriel moderne, on reconnaît en $S\alpha\alpha'$ l'opposé du produit scalaire et en $V\alpha\alpha'$ le produit vectoriel de α par α'.

En 1846 et 1847, Hamilton introduit la nouvelle opération

$$\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$$

dont le carré symbolique vérifie la formule : $-\nabla^2 = (\frac{d}{dx})^2 + (\frac{d}{dy})^2 + (\frac{d}{dz})^2$, formule dont l'importance en physique est considérable.

En 1848, il publie un long article dont le but est de développer la théorie des quaternions en s'inspirant de la méthode qu'il avait utilisée pour construire les nombres complexes dans l'Essai de 1837 ; la même année, il fait des conférences à l'Université de Dublin : le texte de ces dernières est repris et considérablement augmenté dans son premier livre « Lectures on quaternions », publié en 1853. Le livre est long et difficile à lire. En 1859, Hamilton entreprend l'écriture des « Elements », livre beaucoup plus clair qui constitue une référence de grande valeur pour les mathématiciens. Les applications qui y figurent concernent la géométrie plutôt que la physique. L'ouvrage publié par Tait en 1866, un an après la mort de Hamilton, intitulé « Elementary Treatise on Quaternions » est court, lisible et d'un grand intérêt pour ceux qui veulent acquérir les méthodes relatives aux quaternions.

13 - D'autres « systèmes vectoriels »

131 - Möbius et le calcul barycentrique

Dans la préface de son ouvrage « Der barycentrische Calcul », publié en 1827 à Leipzig, Möbius indique que le concept de centre de gravité est à l'origine de ses recherches, ce qui l'a conduit à considérer des points pondérés de l'espace.
Dans le premier chapitre, il précise qu'il distinguera le segment allant du point A au point B – qu'il note AB – du segment allant de B en A , noté BA ou – AB. Il définit une addition pour de tels segments orientés, mais uniquement dans le cas où ils sont portés

par des droites parallèles. Sa définition du centre de gravité d'un système de points pondérés repose sur le théorème suivant :
Étant donné un système de points A, B, ..., N avec les coefficients respectifs *a*, *b*, ..., *n* dont la somme n'est pas nulle, on peut toujours trouver un point et un seul, le centre S, ayant la propriété suivante : si des droites parallèles sont tracées par les points donnés et par le point S dans une direction quelconque et si ces lignes coupent un plan quelconque en des points A', B', ..., S' on a toujours :

$$a.\,\mathrm{AA'} + b.\mathrm{BB'} + \ldots + n.\mathrm{NN'} = (a + b + \ldots + n).\mathrm{SS'}.$$

En particulier, si le plan passe par S, on a :

$$a.\,\mathrm{AA'} + b.\mathrm{BB'} + \ldots + n.\mathrm{NN'} = 0.$$

Plus loin, il allège les notations utilisées, en écrivant A à la place de AA', B à la place de BB', ... , S à la place de SS'. La première des égalités précédentes devient alors :

$$a.\mathrm{A} + b.\mathrm{B} + \ldots + n.\mathrm{N} = (a + b + \ldots + n).\mathrm{S},$$

égalité dans laquelle un lecteur contemporain reconnaît une définition possible du barycentre de points pondérés. Il convient de préciser que les coefficients associés aux points peuvent prendre des valeurs négatives. C'est à partir de telles considérations que Möbius a découvert les coordonnées homogènes.
Ce travail original de Möbius a été bien accueilli, mais les méthodes employées ne se sont guère répandues.

En 1843, dans un nouvel ouvrage « Die Elemente der Mecanik des Himmels », il étend la définition de la somme (et de la différence) aux cas où les segments orientés ne sont plus portés par des droites parallèles, après avoir eu des contacts avec Bellavitis et Grassmann.

Dans son dernier ouvrage « Ueber geometrische Addition und Multiplication », écrit en 1862, mais seulement publié en 1887, Möbius définit le produit des vecteurs AB et CD, qu'il note $\overline{\mathrm{AB.CD}}$. Ce produit n'est ni un vecteur, ni un nombre, mais une figure plane située dans n'importe quel plan parallèle aux droites AB et CD. Cette figure est le parallélogramme construit à l'aide des deux vecteurs. Pour déterminer l'aire de ce parallélogramme, les conventions usuelles de signe sont utilisées. Il définit ensuite le produit géométrique d'un vecteur et d'un parallélogramme : le résultat en est le parallélépipède déterminé par le vecteur et deux côtés adjacents du parallélogramme. Enfin, il définit le produit projectif de deux vecteurs, noté $\underline{\mathrm{AB.CD}}$, qui n'est autre que le produit scalaire. Comme nous le verrons plus loin, ce dernier ouvrage est très influencé par la théorie de Grassmann.

132 - Bellavitis et le calcul des Équipollences.

Giusto Bellavitis (1803 - 1880) est le créateur d'un calcul dont le nom sonne familièrement aux oreilles d'un professeur de mathématiques ayant exercé en France dans les années 1970-1980. La relation d'équipollence était alors un objet enseigné, prélude à la définition d'un vecteur comme classe d'équivalence de cette relation.
La première publication de Bellavitis sur ce sujet date de 1832 : elle insiste davantage sur la méthode que sur les détails. Une deuxième publication a eu lieu en 1833, une troisième en 1835 ; dans cette dernière, Bellavitis utilise le terme « équipollence » et donne un exposé complet de sa théorie, dont voici quelques extraits[9].

4. 1° Une ligne droite (retta), désignée comme d'habitude par deux lettres, est considérée comme allant de la première à la deuxième, si bien que AB et BA ne doivent pas être considérées comme désignant la même entité, mais comme deux quantités égales ayant des signes opposés.

   2° Deux lignes droites sont dites équipollentes si elles sont égales, parallèles et dirigées dans le même sens.

   3° Si deux ou plusieurs lignes droites sont situées de telle façon que la deuxième extrémité de chacune d'elles coïncide avec la première extrémité de celle qui la suit, alors la droite qui forme avec les droites données un polygone (régulier ou non) et qui est tracée de la première extrémité de la première à la dernière extrémité de la dernière est appelée leur somme équipollente (composta-equipollente). Elle est notée à l'aide de signes + intercalés entre les lignes droites à combiner, avec le signe "$\underline{\Omega}$" indiquant l'équipollence. Ainsi, on a :

$$AB + BC \mathrel{\underline{\Omega}} AC$$

$$AB + BC + CD \mathrel{\underline{\Omega}} AD, \text{etc.}$$

   De telles équipollences demeurent vraies lorsqu'on remplace chacune des lignes droites par une ligne droite équipollente, quelles que soient leurs positions dans l'espace. Il en résulte que l'on peut ajouter un nombre quelconque de lignes droites de toutes sortes, et que le résultat ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les considère.
   (...)

   5° Dans les équipollences comme dans les équations, une ligne droite peut être transférée d'un membre dans l'autre pourvu que le signe soit changé....

   6°L'équipollence AB $\underline{\Omega}$ n.CD, où n désigne un nombre positif signifie que simultanément AB et CD sont parallèles et de même sens, et que leurs longueurs vérifient la relation exprimée par l'équation AB = n.CD.

---

[9]Traduction faite par nos soins à partir de l'ouvrage de Crowe.

5. 1° Restreignons nous à des lignes droites situées dans un même plan. L'inclinaison de la ligne droite AB est l'angle HAB que ce segment forme avec l'horizontale AH, dessinée de gauche à droite, avec la précision que les angles sont mesurés positivement en partant de la droite et vers le haut de 0° à 360°.

2° L'angle d'inclinaison de CD sur AB est égal à l'inclinaison de CD diminuée de celle de AB.

3° L'équipolence AB $\underline{\Omega}$ $\frac{CD.EF}{GH}$ signifie que les longueurs AB, CD, etc. doivent satisfaire l'équation obtenue à partir de l'équipollence en remplaçant le signe d'équipollence par le signe égal, mais également que

$$\text{inc. AB} = \text{inc. CD} + \text{inc. EF} - \text{inc.GH}$$

(...) La droite équipollente à 1 est considérée comme horizontale, c'est-à-dire sans inclinaison.

(...)

6° Dans les équipollences, les termes sont transposés, substitués, ajoutés, soustraits, multipliés, divisés, etc., bref toutes les opérations algébriques qui seraient légitimes dans le traitement des équations sont également possibles avec les équipollences et les équipollences qui en résultent sont toujours vraies. Comme nous l'avons dit au 5°, des équipollences non-linéaires ne peuvent se référer qu'à des figures contenues dans un même plan.

On voit apparaître dans la théorie de Bellavitis un calcul ayant beaucoup de ressemblance avec ceux qui rendent compte de la représentation géométrique des nombres complexes. Sur ce point précis, Bellavitis signale que ses premères idées sur cette méthode des équipollences lui étaient venues après la lecture de travaux de l'Abbé Buée, mais qu'il avait alors pensé que les vérités géométriques ne pouvaient pas reposer sur la théorie des nombres imaginaires[10]. L'un des buts de sa théorie était de rendre son autonomie à la géométrie : ses droites (ou segments) orientés étaient considérés comme des *entités* géométriques, et non pas comme des *représentations*.

Bellavitis a donné dans ses publications et dans son livre sur les équipollences de nombreuses et ingénieuses applications de sa théorie à des problèmes de mathématique et de physique.

Charles Ange Laisant, durant le dernier quart du XIXe siècle, a consacré beaucoup d'énergie à faire connaître en France les travaux de Bellavitis.

Signalons enfin que Bellavitis a longuement tenté d'étendre sa théorie à l'espace tri-dimensionnel, mais qu'il n'y est pas parvenu.

---

[10]Durant toute sa vie, Bellavitis a été opposé aux nombres imaginaires, qu'il considérait comme indignes d'appartenir à une science fondée sur la seule raison.

14 - Grassmann et son Calcul de l'Extension.

Contrairement à Hamilton qui, dès 16 ans, lisait « La Mécanique Céleste » de Lagrange (et y détectait une erreur) et qui, au moment de sa découverte des quaternions, était déjà un mathématicien célèbre, Grassmann (1809-1877) est resté professeur de Collège-Lycée pendant la plus grande partie de sa vie et n'a jamais pu obtenir de poste de professeur à l'Université.

Theorie der Ebbe und Flut (1840)

Son premier travail mathématique, qui date de 1840, intitulé « Théorie du flux et du reflux » n'a été publié qu'en 1911. Il nous intéresse ici parce qu'il contient la première présentation d'une théorie utilisant des vecteurs. En réponse à une lettre de Saint-Venant, en 1847, Grassmann donne des explications intéressantes sur l'origine de ce travail.

« Comme je lisais l'extrait de votre article sur la somme et la différence géométrique qui était publié dans les « Comptes rendus », j'ai été frappé par la ressemblance merveilleuse entre vos résultats et des découvertes que j'avais faites dès 1832 ... J'ai conçu la première idée de la somme ou de la différence de deux ou plusieurs segments et également le produit géométrique de deux ou trois segments cette année-là (1832). Cette idée est en tout point identique à celle présentée dans l'extrait de votre article. Mais comme j'ai été occupé pendant longtemps par d'autres recherches, je n'ai pas pu développer cette idée. C'est seulement en 1839 que j'ai été conduit à y revenir et à poursuivre cette analyse géométrique jusqu'à ce qu'elle puisse être applicable à toute la mécanique. J'ai été en mesure d'appliquer cette méthode d'analyse à la théorie des marées et, sur ce point, je fus abasourdi par la simplicité des calculs résultant de cette méthode. ».[11]

Dans la préface de son ouvrage fondamental, l'Ausdehnungslehre (1844), Grassmann explique en détail ce qu'il avait découvert en 1832 :[12]

« Le point de départ vint de la considération de quantités négatives en géométrie : j'étais habitué à voir les distances AB et BA comme des quantités opposées. Il en résultait la conclusion que si A, B et C sont des points d'une ligne droite, alors dans tous les cas AB + BC = AC, ceci étant vrai aussi bien lorsque AB et BC sont dirigés dans le même sens que s'ils sont de sens contraire (quand C est entre A et B). Dans ce dernier cas, AB et BC ne sont pas considérés simplement comme des longueurs, mais simultanément leurs sens sont pris en considération car ils sont de sens contraires. Ainsi fut mis à jour la distinction entre somme de longueurs et somme de distances ayant une direction fixe.

---

[11]Traduction faite par nos soins à partir de l'ouvrage de Crowe.

[12]Traduction faite par nos soins à partir de l'ouvrage de Crowe.

Il en résultait la nécessité de définir ce dernier concept de somme non seulement dans le cas où les distances ont des sens égaux ou opposés, mais aussi dans tous les autres cas. Ceci peut être fait de la manière la plus simple en faisant que AB + BC = AC reste vrai quand A, B et C ne sont pas sur une même ligne droite.

Ce fut alors le premier pas vers une analyse qui devait par la suite conduire à une nouvelle branche des mathématiques, qui est présentée ici. Je n'ai cependant réalisé à l'époque ni la fécondité ni la richesse du champ que j'avais ouvert ; ce que j'avais trouvé semblait plutôt être à peine digne d'être noté jusqu'à ce qu'on le combine avec une autre idée.

Quand je poursuivis mes recherches sur le concept de produit géométrique, dont l'idée avait été établie par mon père (dans son " Raumlehre " partie I, 174, et sa " Trigonometrie ", p. 10), je conclus que non seulement les rectangles, mais aussi les parallélogrammes peuvent être considérés comme produit de deux côtés adjacents, pourvu que les côtés soient considérés non seulement comme des longueurs, mais plutôt comme des grandeurs orientées. Quand je combinai ce concept de produit géométrique avec l'idée antérieurement établie de somme géométrique, l'harmonie la plus frappante en résulta. Ainsi quand je multipliai la somme de deux vecteurs par un troisième coplanaire aux deux premiers, le résultat coïncida (et doit toujours coïncider) avec celui obtenu en multipliant chacun des deux premiers vecteurs par le troisième et en additionnant (en faisant attention aux valeurs positives et négatives) les deux produits. [Ainsi, A(B + C) = AB + AC].

Cette harmonie me permit de voir qu'une partie entièrement nouvelle de l'analyse se révélait, pouvant conduire à des résultats importants. Cette idée resta endormie pendant quelque temps, car les devoirs de ma charge me conduisirent vers d'autres tâches ; d'autre part, je fus au début ennuyé par un étrange résultat : bien que les lois de la multiplication ordinaire (y compris la relation de la multiplication avec l'addition) soient préservées dans ce nouveau type de multiplication, on ne peut cependant intervertir les facteurs que si simultanément on change le signe (i.e. changer + en – et – en +).

Un travail sur la théorie des marées, que j'avais entrepris il y a longtemps, me conduisit à la Mécanique Analytique de Lagrange et, de ce fait, je repris ces idées d'analyse. Tous les développements dans ce travail furent transformés selon les principes de cette nouvelle analyse d'une manière si simple que les calculs devenaient souvent plus de dix fois plus courts que dans l'œuvre de Lagrange.

(...)

Ainsi, je me sentis autorisé à espérer que j'avais trouvé dans cette nouvelle analyse la seule méthode naturelle selon laquelle les mathématiques doivent être appliquées à la nature, et selon laquelle la géométrie peut aussi être traitée, chaque fois qu'elle conduit à des résultats généraux et fructueux. Alors je décidai de faire de la présentation, du développement et de l'application de cette analyse la tâche de ma vie. Quand je réussis à consacrer tout mon temps libre à cette tâche, la plupart des lacunes présentes dans mes premiers et irréguliers développements furent comblées. (...). »

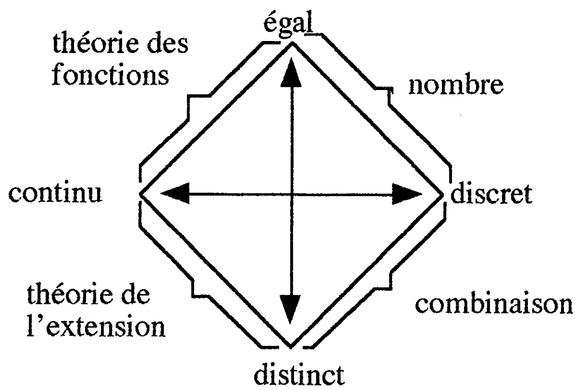
Dans ce premier ouvrage (Theorie der Ebbe und Flut), Grassmann présente dès 1839 une grande partie de l'analyse vectorielle :
– l' addition et la soustraction vectorielle ;
– les deux types principaux de multiplication des vecteurs (produit vectoriel et produit scalaire) ;
– la différentiation vectorielle ;
– la fonction linéaire.
Ce fait très frappant donne une lumière particulière à la publication tardive de cet ouvrage qui n'eut lieu qu'en 1911.

L'Ausdehnungslehre (1844)

L'œuvre maîtresse de Grassmann est l'Ausdehnungslehere qu'il écrit très rapidement (de Pâques 1842 à la fin de 1843) et qui est publié en 1844. Cette rapidité d'écriture est étonnante si l'on prend en compte le fait que la présentation en fut remaniée plusieurs fois. En effet, vers 1842, Grassmann a découvert de nouvelles applications et extensions de ses premières découvertes. Dans la préface, il écrit :
« Quand j'entrepris de développer, de manière cohérente et depuis les commencements les résultats que j'avais trouvés, prêtant attention au fait de ne faire appel à aucun principe éprouvé dans quelque branche des mathématiques, il m'apparut que l'analyse que j'avais découverte ne se rattachait pas, contrairement à ce qui m'avait d'abord semblé, au domaine de la géométrie. Je réalisai vite que j'avais découvert une partie d'une nouvelle science dont la géométrie elle-même est uniquement une application particulière.
Il était évident pour moi depuis longtemps que la géométrie ne peut en aucune manière être considérée comme une branche des mathématiques (comme on peut le dire de l'arithmétique ou de la théorie combinatoire) ; au lieu de cela, la géométrie renvoit à quelque chose qui est déjà donné dans la nature, à savoir l'espace. Je m'étais également aperçu qu'il devait y avoir une branche des mathématiques qui conduise, de manière purement abstraite, aux lois semblables à celle de la géométrie, qui apparaît comme limitée à l'espace. Par le moyen de cette nouvelle analyse, il apparut possible de mettre sur pied une telle branche purement abstraite des mathématiques ; en effet, cette nouvelle analyse, construite sans faire appel à aucun principe établi en dehors de son propre domaine, et procédant par abstraction, constituait elle-même cette science. »

Ce point de vue très original va conduire Grassmann à construire une théorie applicable en dimension n (au lieu d'en rester à la dimension 3). Il pensait avoir découvert un système purement formel, qui était au-dessus de la géométrie, et indépendant d'elle et même de toutes les mathématiques connues à son époque. Il appelle ce système « la théorie des formes » et évoque cette dernière au début de l'Ausdehnungslehre, dans une introduction philosophique qui va constituer pour les mathématiciens une barrière infranchissable et nuira beaucoup à l'influence de l'ouvrage.

Dans cette introduction, Grassmann établit une distinction entre les sciences réelles et les sciences formelles : les premières représentent dans la pensée ce qui existe indépendamment d'elle, et leur vérité consiste à correspondre avec ce qui existe. Les sciences formelles ont pour objet ce qui a été produit par la seule pensée, et leur vérité se trouve dans la correspondance entre les processus de pensée eux-mêmes. À ce sujet il précise : « La preuve dans les sciences formelles ne procède pas en dehors de la sphère de la pensée ; au contraire, elle demeure purement dans la combinaison de différents actes de pensée. C'est la raison pour laquelle les sciences formelles n'ont pas besoin d'axiomes ; au lieu de cela, les définitions constituent leur fondement. ». Toujours dans son introduction, Grassmann précise quatre concepts avec lesquels sa théorie des formes pourrait développer toutes les mathématiques : le discret, le continu, l'égal et le différent.



Voici comment il justifie la place (et la nécessité) d'une théorie de l'extension, qu'il va proposer dans l'Ausdehnungslehre[13] :

« Du croisement de ces deux contrastes, dont le premier se rapporte à la manière d'engendrer [Art der Erzeugung] et le second aux éléments d'engendrement [Elemente der Erzeugung], résultent les quatre espèces de formes et les branches de la théorie des

[13]Le schéma et la citation de Grassmann qui le suit sont tirés de l'ouvrage de Gilles CHÂTELET : Les enjeux du mobile. Mathématique, physique, philosophie. Collection Des Travaux /Seuil , Octobre 1993.

formes qui y correspondent. À savoir, la forme discrète se sépare d'abord en nombre et combinaison (ce qui est lié ensemble). Le nombre est la forme algébrique discrète, c'est-à-dire il est le rassemblement de ce qui est posé comme égal ; la combinaison est la forme combinatoire discrète, c'est-à-dire le rassemblement de ce qui est posé comme divers. Les sciences du discret sont alors la théorie des nombres et la théorie des combinaisons.
De la même manière, la forme continue ou grandeur se sépare en forme algébrique-continue ou grandeur intensive et en forme combinatoire-continue ou grandeur extensive. La grandeur intensive est alors ce qui est devenu par la génération de l'égal ; la grandeur extensive ou extension est ce qui est devenu par la génération du divers. Celle-là constitue, en tant que grandeur variable, la base de la théorie des fonctions, du calcul différentiel et intégral ; celle-ci constitue la base de l'Ausdehnungslehre. »

Pour illustrer cette dialectique entre le continu et le différent, prenons l'exemple du concept d'espace que Grassmann va définir : un premier élément est donné a priori (par exemple : le point), puis par la poursuite continue du même changement fondamental (dans les deux sens) l'élément initial engendre un système de 1er échelon (la droite). De même, par la poursuite continue d'un autre changement fondamental, les éléments d'un système de 1er échelon engendrent un système de 2ème échelon (un plan), et ainsi de suite, sans limitation de dimension. C'est sur ce mode de génération que repose la théorie de l'extension de Grassmann.

La première partie de l'Ausdehnungslehre : aperçu de la Théorie des Formes.

Nous avons déjà signalé que cette partie est très abstraite, et qu'elle constituera un obstacle important à la lecture de l'ouvrage par les mathématiciens de l'époque. Un étudiant d'aujourd'hui y verrait sans doute l'analogue d'une définition des lois de composition (que Grassmann appelle des connexions) et de certaines de leurs propriétés (commutativité, associativité, distributivité, mais ces mots ne sont pas employés).
a et b désignant des formes (qui peuvent être des nombres, des points, des vecteurs, etc.), il définit une première connexion, notée $\frown$ qui appliquée à a et à b donne $a \frown b$; puis il explique que, compte tenu de sa nature cette connexion vérifie les deux équations:

$$a \frown b = b \frown a$$

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c.$$

Il montre alors que pour une telle connexion, on peut dans les formules réarranger les termes et omettre les parenthèses.
Puis il définit une deuxième forme, notée $\smile$ telle que $(a \smile b) \frown b = a$.

Ce n'est qu'après avoir développé les propriétés de ces deux connexions qu'il dit que la première peut être appelée « addition » et la deuxième « soustraction ». Il définit ensuite l'analogue d'un élément neutre et de l'opposé.
Puis il définit deux autres types de connections : la première, notée $\curlywedge$, est appelée multiplication et doit seulement vérifier :

$$(a \wedge b) \curlywedge c = a \curlywedge c \wedge b \curlywedge c$$ (distributivité à droite de $\curlywedge$ par rapport à $\wedge$).

Rien n'est imposé qui puisse ressembler à la commutativité ou à l'associativité. Enfin, il définit la division, qui doit vérifier la loi $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$.

Grassmann va par la suite appliquer sa théorie des formes (qui sont sans contenu) en leur assignant des valeurs bien différentes : nombres, points, vecteurs, surfaces orientées, etc. Toutes les formes et connexions seront interprétées en termes de lois évoquées par Grassmann dans cette première partie, qui apparaît donc comme l'une des plus importantes. Ainsi, la mauvaise réception de cette première partie n'est pas uniquement la conséquence de son caractère « philosophique » ; elle contient en germe toute une puissance mathématique qu'il a sans doute été difficile aux lecteurs de l'époque d'anticiper, compte tenu de l'aspect très dépouillé, très abstrait des notions primitives utilisées.

La suite du livre est partagé en deux sections : la première est intitulé « La grandeur d'extension », la deuxième « La grandeur élémentaire ».

L'addition vectorielle

Le premier chapitre de la première section est centré sur la production de différents systèmes d'échelon quelconque, comme nous l'avons expliqué précédemment. C'est à ce moment-là que Grassmann introduit les vecteurs, prouve qu'ils satisfont aux lois relatives à l'addition et à la soustraction, et s'attarde sur l'addition vectorielle. Compte tenu de son importance, nous allons détailler ce point[14].

Dans la terminologie de Grassmann, un vecteur est « un segment appartenant à une manière de changement ». À ce stade de son exposé, deux vecteurs colinéaires sont deux vecteurs appartenant à la même manière de changement. Dans le but de rendre sa théorie indépendante du reste des mathématiques, il n'utilise pas le concept de nombre, et donc n'introduit pas de multiplication d'un vecteur par un scalaire. Il déduira plus tard les nombres de la division de deux grandeurs d'extension de même espèce.

---

[14]Voir L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en question, coordonné par J.L. DORIER - La Pensée Sauvage - 1997.

Pour définir l'addition, il commence par le cas de deux segments appartenant à la même manière de changement, puis de deux segments appartenant à des manières de changement originelles, c'est-à-dire les n manières de changement qui lui ont permis d'engendrer le système de $n^{\text{ème}}$ échelon dans lequel il se place. Il fonde cette addition sur l'intuition géométrique. Puis il examine l'aspect formel de l'addition en utilisant sa théorie des formes. Que se passe-t-il si on change l'ordre dans lequel on effectue les manières de changement originelles dans la somme définissant un segment ? Cette modification n'ayant aucune signification réelle, Grassmann l'accepte, soulignant son caractère arbitraire. En revanche, il démontre en détail la propriété d'associativité. Puis en combinant les deux propriétés précédentes, toujours à l'aide de sa théorie des formes, il démontre le résultat suivant :
si p_1 et p_2 sont deux segments quelconques et si selon les manières de changement originelles

$$p_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \ldots.$$

$$p_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \ldots.$$

alors $$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) + \ldots.$$

formule qui donne une signification de la somme conforme à la manière originelle d'engendrer. Ainsi, les deux aspects « formel » et « réel » de sa théorie sont en harmonie.

Dans le but de s'affranchir du mode originel d'engendrer le sytème, il démontre ensuite le théorème suivant :
Quelles que soient les m manières de changement indépendantes que l'on choisisse dans un système du $m^{\text{ème}}$ échelon, tout vecteur de ce système peut s'écrire sous la forme d'une somme de ces m vecteurs, et cette expression est unique.
Pour démontrer ce théorème, il établit d'abord ce qu'en langage moderne on appelle le lemme de l'échange :
Si le système peut être engendré par m manières de changement quelconques, alors je peux introduire à la place de l'une quelconque d'entre elles une manière de changement p qui est indépendante des $(m - 1)$ autres et qui appartient aussi au système. Alors, je peux engendrer le système donné par celle-ci en liaison avec les $(m - 1)$ autres.

À la fin de ce premier chapitre, Grassmann montre comment ses idées peuvent être utilisées pour fonder de manière sûre la géométrie et il donne la définition vectorielle du centre de gravité d'un corps, ainsi que les lois relatives aux forces et à la vitesse de ce centre de gravité. Compte tenu de leur importance pour la suite de notre travail, nous allons détailler cette partie de l'ouvrage, en prenant comme référence la traduction récente en français de l'Ausdehnungslehre par Dominique Flament[15].

Grassmann soutient d'abord que « *la géométrie manque toujours d'un début scientifique et que le fondement pour tout l'édifice de la géométrie souffre jusqu'à présent d'un défaut qui rend nécessaire une transformation complète de celui-ci.* ». Ensuite, il précise les critères que doivent vérifier de bons axiomes :

« *Ces axiomes seront alors pris correctement s'ils donnent dans leur totalité l'intuition complète de l'espace, et si aucun axiome est posé qui ne contribuerait pas à compléter cette intuition. Ici apparaît maintenant la vraie cause du début défectueux de la géométrie dans sa présentation jusqu'à aujourd'hui ; à savoir, en partie des axiomes sont oubliés qui expriment des intuitions spatiales d'origine et qui doivent alors être tacitement supposés lorsque leur application devient nécessaire, en partie des axiomes sont posés qui n'expriment pas une intuition fondamentale de l'espace et qui se révèlent donc, après considération plus détaillée, superflus ; et dans tous les cas, les axiomes donnent dans leur totalité l'impression d'un agrégat de phrases les plus claires qui sont arrangées en sorte qu'on peut démontrer d'une manière la plus commode possible. Les axiomes de la géométrie comme nous devons les supposer expriment en revanche les propriétés fondamentales de l'espace comme celles-ci sont données à notre imagination à l'origine ; à savoir, ils expriment la simplicité et la restriction relative de l'espace.* ».

Ensuite, il propose des axiomes conformes à ses critères. Pour traduire la simplicité de l'espace, il énonce l'axiome suivant :

L'espace est constitué de la même manière en tous lieux et en toutes directions, c'est-à-dire, en tous lieux et en toutes directions les mêmes constructions peuvent être exécutées ;

axiome qui se divise en deux :

1) une égalité est imaginable si le lieu est différent,

2) une égalité est imaginable si la direction est différente, et notamment aussi si les direction sont opposées.

Il introduit alors des définitions[16] qui vont lui permettre d'exprimer d'une « manière plus décisive » ces deux axiomes.

---

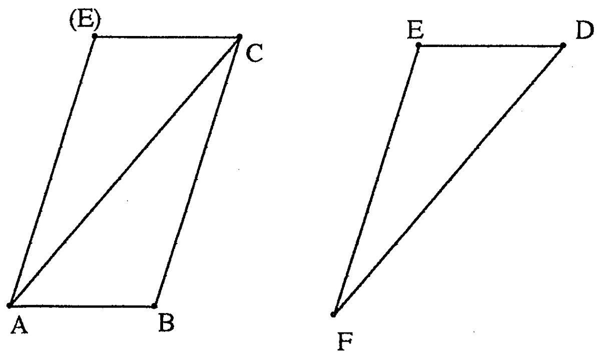
[15]FLAMENT D., 1994, Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, La Lineale Ausdehnungslehre, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris.

[16]Grassmann a précisé antérieurement les définitions suivantes : Des constructions « égales et synchrones » sont des « constructions qui s'effectuent tout à fait de la même manière en des lieux différents » (il note AB $=\!\!|\!\!|\!\!=$ CD pour signifier que AB est égal et synchrone à CD) ; des constructions « absolument égales » sont des constructions « qui ne se distinguent que par leurs lieux et par leurs directions » ; des constructions « égales et allant en des sens opposés » des constructions « qui s'effectuent en des lieux différents de la même manière dans des directions opposées ». Il précise que ces qualificatifs s'appliquent également aux résultats des constructions.

1) Ce qui s'effectue par des constructions égales et synchrones est lui-même égal et synchrone ;
2) Ce qui s'effectue par des constructions opposées est lui-même opposé ;
3) Ce qui s'effectue par des constructions absolument égales (même en des lieux différents et en des directions différentes) est lui-même absolument égal.
4) L'espace est un système du troisième échelon.

On voit que les énoncés de ces axiomes font intervenir sa théorie abstraite de l'extension, et l'on constate ici le fait qu'il ne s'agit pas d'une axiomatique au sens que ce mot a pris ensuite, chez Hilbert par exemple.

Alors ces "axiomes" lui permettent de démontrer très simplement l'énoncé suivant, permettant de caractériser un parallélogramme : si les quatre côtés d'un quadrilatère, décrits continûment l'un après l'autre, deux sont opposés, alors les deux autres le sont.



En effet, si AB et DE d'une part, BC et EF d'autre part sont opposés, alors d'après (2) AC est opposé à DF, c'est-à-dire CA ⫤⊫ DF. Donc, si C est amené en D, CA doit être amené sur DF, et alors A est en F, et les quatre segments forment un quadrilatère ABCE.

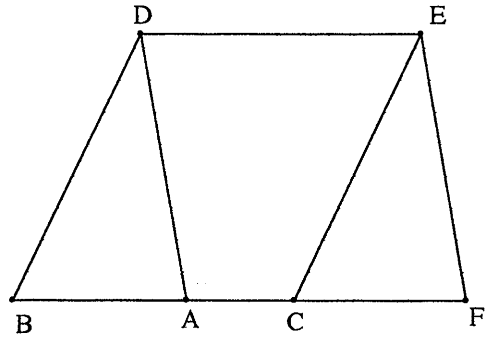
D'autre part, il déduit de ses « axiomes » et du début de sa science abstraite, le résultat « si deux points d'une droite appartiennent à un plan, cette droite est contenue dans le plan », résultat qu'il range dans la catégorie des axiomes « superflus ». Il précise alors que « ces indications devraient suffire pour donner un concept provisoire d'un début scientifique de la géométrie ».

Sa science abstraite est construite à partir de la notion d'élément générateur, élément qui peut prendre différents états. Le tableau suivant montre le rôle important tenu par la géométrie dans l'élaboration de sa science abstraite, même si cette dernière acquiert son autonomie (en effet, il ne fait pas recours à la géométrie pour démontrer les résultats de sa science abstraite).

Notions et relations spatiales	Notions et relations conceptuelles correspondantes
Point (lieu particulier)	Élément
Point générateur (d'une ligne)	Élément générateur
Points distincts sur une ligne, comme positions différentes d'un même point générateur	Éléments différents, comme états différents d'un même élément générateur
Différence de lieux	Différence d'états
Changement de lieu ou mouvement	Transition de l'élément générateur d'un état à un autre
Ligne naissant du déplacement d'un point prenant des positions différentes dans une suite continue.	Formation d'extension du premier échelon naissant par un changement continu de l'élément générateur.
	Élément initial : élément générateur dans son état premier Élément final : élément générateur dans son état dernier
	Changement opposé : si *a* devient *b* par un changement, le changement opposé est tel que *b* devient *a*.
	Formation d'extension opposée à une autre : celle qui résulte par des changements opposés et dans l'ordre inverse.

L'exposé de Grassmann se poursuit par une série d'exercices corrigés, accompagnés de figures. Nous n'en donnerons que les énoncés et les figures correspondantes.

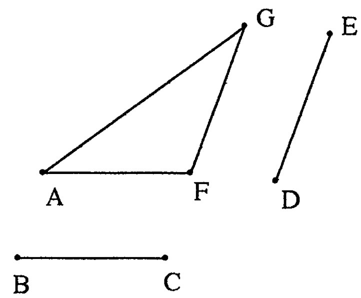
Exercice 1:
Tirer un segment AX, qui est égal et synchrone à un segment donné BC.
(Grassmann note AX =||= BC)
La solution distingue le cas où A n'appartient pas à BC, du cas contraire, ce dernier étant illustré par une figure.



Exercice 2
Séparer en un nombre donné quelconque de parties égales un segment.
Exercice 3
Trouver le point X qui satisfait l'équation

$$[AX] = [BC] + [DE]$$

Dans une note en bas de page, Grassmann précise que [AB] désigne le segment de direction et de longueurs fixées, notation qu'il a déjà introduite auparavant dans la science abstraite.



Puis, avant d'en venir aux exercices et résultats suivants, il introduit « quelques notations qui sont essentielles pour faciliter la façon de s'exprimer ».
Il appelle *déviation* du point A par rapport à un autre point B le segment BA dont la direction et la longueur sont fixes, c'est-à-dire [BA] ; et *déviation totale* d'un point R par rapport à une série de points A, B, C, ... la somme [AR] + [BR] + [CR] + ... ; il s'en suit que la déviation totale d'une série de points A, B, C, ... par rapport au point R est [RA] + [RB] + [RC] + ...
En utilisant les relations [AB] = [AR] + [RB] ou [AB] = [RB] − [RA], il déduit l'équivalence des équations :
1) [AB] + [CD] + [EF] + ... = 0
2) [RA] + [RC] + [RE] + ... = [RB] + [RD] + [RF] + ...
équivalence dont il tire « une série de théorèmes les plus beaux et les plus simples » :
« Si la déviation totale d'un point R par rapport à une suite de points est égale à la déviation totale du même point par rapport à une autre suite de points, qui cependant contient le même nombre de points que la première, alors la même chose est vraie pour

tout autre point qui peut être pris pour R ; et de plus la somme des segments, qui sont tirés des points d'une suite aux points correspondants de l'autre, est égale à 0, quelle que soit la manière dont on pose ces deux suites comme correspondantes. »

« Si la somme de plusieurs (m) segments est égale à zéro, cette somme reste égale à zéro si on permute les points initiaux, ou aussi les points finaux, d'une manière quelconque (si par exemple on pose AD et CB au lieu de AB et CD) ; et de plus la déviation totale des points finaux par rapport à n'importe quel point R est toujours égale à la déviation totale des points initiaux par rapport au même point R. »

Avec des notations usuelles dans notre système d'enseignement, la première partie de ce dernier théorème s'écrit ainsi pour une somme de deux segments :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$
Quant à la deuxième, elle se traduit par l'équivalence de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ et de $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RD}$, et ceci quel que soit le point R de référence.

Ensuite, Grassmann s'intéresse à des cas particuliers de ces théorèmes généraux, qui vont lui permettre :
– dans un premier temps, de proposer un nom simple (celui de centre) pour le point connu jusqu'alors sous le nom de « centre des distances moyennes » ;
– dans un deuxième temps, de s'intéresser aux points multiples ou encore aux points avec coefficients et aux déviations totales d'associations de tels points lorsque leurs « masses » sont égales.
Le premier résultat a une allure familière à l' œil d'un lecteur contemporain :
« Si la somme [RA] + [RB] + ... comportant m termes est égale à la somme de m termes égaux à [RS], alors la même chose est vraie en remplaçant R par tout autre point, et [SA] + [SB] + ... est égale à 0. ».
En effet sa traduction avec les notations usuelles se traduit par l'équivalence des relations : $\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + ... = m\,\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + ... = \vec{0}$, équivalence vraie quel que soit le point R. L'unique point S vérifiant l'une de ces relations est appelé par Grassmann « centre de la suite de points A, B, ... », la première relation fournissant le moyen de le construire géométriquement.

En revanche, il n'en est guère de même pour le second, qui s'énonce ainsi :
Si sont donnés m points $A_1, ..., A_m$ avec les coefficients $\alpha_1, ..., \alpha_m$ et n points $B_1, ..., B_n$ avec les coefficients $\beta_1, ..., \beta_n$ et si de plus : $\alpha_1+...+\alpha_m = \beta_1+...+\beta_n$, alors, quel que soit le point R : $\alpha_1\overrightarrow{RA_1} + ... + \alpha_m\,\overrightarrow{RA_m} = \beta_1\,\overrightarrow{RB_1} + ... + \beta_n\,\overrightarrow{RB_n}$.

Grassmann reprendra l'étude de telles combinaisons linéaires dans la deuxième partie de l'ouvrage, et nous en rendrons compte dans le paragraphe suivant consacré aux grandeurs élémentaires. En effet, il n'introduira les (grandeurs de) nombres que dans le quatrième chapitre de cette première partie.

La multiplication extérieure

Le second chapitre de l'Ausdehnungslehre est intitulé « Multiplication extérieure des vecteurs ». Le produit extérieur de Grassmann est une généralisation de celui qu'il avait appelé « produit géométrique » dans son ouvrage de 1840 et qui correspond à peu près au produit vectoriel moderne. D'ailleurs, il introduit le produit extérieur dans le cas particulier de l'espace tri-dimensionnel avant de démontrer que cette construction peut être reprise dans le cadre de sa théorie des formes, d'une manière purement abstraite, et indépendamment de toute considération spatiale. Cette situation est typique de nombreux éléments d'analyse vectorielle traités dans l'Ausdehnungslehre de 1844, et fournit une des principales raisons pour laquelle il a été par la suite si difficile d'extraire le système moderne d'analyse vectorielle à partir de celui de Grassmann.

$e_1, e_2, ..., e_n$ désignant n vecteurs, son produit extérieur vérifie les relations :

$$e_x e_y = - e_y e_x ,$$
$$e_x e_x = 0 ,$$
$$e_x(e_y + e_z) = e_x e_y + e_x e_z .$$

quels que soient x, y et z pris parmi 1, 2, ..., n.

Il faut bien comprendre que si, pour le produit vectoriel moderne, le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur, il n'en est pas de même pour le produit extérieur de Grassmann, qui est une entité du $2^{ème}$ ordre, alors qu'un vecteur en est une du 1^{er} ordre. Cette différence lui permet d'ailleurs de définir le produit extérieur de 3, ..., n vecteurs, qui sont respectivement des entités du $3^{ème}$, ..., du $n^{ème}$ ordre.
(Notons cependant que Grassmann n'est pas privé de notre produit vectoriel moderne : x et y désignant deux vecteurs, notons u leur produit extérieur ($u = xy$). Grassmann définit l'index de u, noté $|u$, qui n'est autre que notre moderne $x \wedge y$[17]).

La multiplication intérieure

Elle correspond au produit scalaire moderne. Grassmann n'en parle que dans la présentation de l'ouvrage, après avoir parlé du produit extérieur.

---

[17]Voir l'appendice consacré aux formes géométriques de Grassmann et quaternions de Hamilton dans l'ouvrage "Éléments de calcul vectoriel" de Burali-Forti et Marcolongo, Hermann, Paris, 1910.

« Outre ce concept, il y en a un autre qui, d'une certaine manière, relie les distances à certaines directions fixes. À savoir, quand je prends la projection orthogonale d'une distance sur une autre, le produit arithmétique de cette projection par la distance (sur laquelle on a projeté) représente le produit de ces distances, pourvu que la relation multiplicative à l'addition [la distributivité] soit satisfaite. Mais ce produit est d'un type entièrement différent du premier [le produit extérieur], car les facteurs peuvent être échangés sans changer le signe du produit, et le produit de deux vecteurs perpendiculaires est égal à 0. J'appelle le premier produit « extérieur » et le deuxième « intérieur » car le premier prend des valeurs proches de zéro seulement quand les directions s'approchent l'une de l'autre, c'est-à-dire lorsque les distances s'étendent en partie l'une dans l'autre ».

À ce stade, Grassmann a élaboré des outils qui lui permettent de traiter des applications importantes. Son produit extérieur lui permet de retrouver d'une manière simple le principe de Varignon. Il montre également comment ce même outil permet de résoudre un système de *n* équations du premier degré à *n* inconnues.

Les grandeurs élémentaires

Nous abordons ici la deuxième partie de l'ouvrage qui concerne ce que Grassmann appelle les grandeurs élémentaires. Son « analyse ponctuelle » est une partie importante de sa construction, et elle a beaucoup de relations avec son analyse vectorielle. C'est ici que Grassmann retrouve le calcul barycentrique de Möbius et le généralise. Il montre que dans le cas où la somme des coefficients attribués aux points est nulle, le barycentre peut être remplacé par un point de poids nul, qu'il convient d'interpréter comme un vecteur. Ainsi par exemple, B – A n'est autre que le vecteur AB. On retrouve ici l'origine de résultats que les programmes récents de mathématiques de Terminale décrivent parfois sous le nom de « fonction vectorielle de Leibniz ». Il est d'autre part remarquable qu'à l'aide des mêmes développements, Grassmann définit les coordonnées homogènes et donne une interprétation de la géométrie projective. Nous allons détailler cette partie, fondamentale pour nos analyses ultérieures.

Grassmann reprend l'étude d'égalités dont la forme, avec les notations auxquelles nous sommes habituées, est la suivante :

$$\alpha_1\overrightarrow{RA_1} + \dots + \alpha_m\ \overrightarrow{RA_m} = \beta_1\ \overrightarrow{RB_1} + \dots + \beta_n\ \overrightarrow{RB_n}\ ,$$

et il démontre que si $\alpha_1+\dots+\alpha_m = \beta_1+\dots+\beta_n$, alors cette relation reste vraie en remplaçant R par n'importe quel autre point. Il en déduit que si la somme des coefficients $\alpha_1+\dots+\alpha_m$ est nulle, alors l'expression $\alpha_1\overrightarrow{RA_1} + \dots + \alpha_m\ \overrightarrow{RA_m}$ est une grandeur constante, indépendante de R. Mais il se place dans un cadre plus abstrait que celui de la géométrie et il introduit pour cela un nouveau vocabulaire et de nouvelles notations, que nous allons présenter sous forme d'un dictionnaire mettant en correspondance le vocabulaire et les notations usuels aujourd'hui en France et celui de Grassmann dans sa théorie des formes de première espèce :

Vocabulaire et notations usuels en géométrie, aujourd'hui en France	Vocabulaire et notations de Grassmann dans sa théorie des formes de première espèce
$\overrightarrow{RA}$: vecteur RA	$[\rho\alpha]$: écart d'un élément α à un élément ρ (un élément n'est pas nécessairement un point : la théorie est plus générale que la géométrie).
Famille ou systèmes de points pondérés $(A, \alpha), (B, \beta), \ldots$	Association élémentaire : éléments $\alpha, \beta, \ldots$ de poids affectés a, b, ... (Grassmann signale que le mot "poids" a un sens abstrait, remarquant qu'il est utilisé de même dans le calcul des probabilités)
$\alpha\overrightarrow{RA} + \beta\,\overrightarrow{RB} + \ldots.$	Écart de l'association élémentaire à un élément ρ : $a\,[\rho\alpha] + b\,[\rho\beta] + \ldots.$
Fonction vectorielle de Leibniz : $M \mapsto \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \ldots.$	Grandeur élémentaire de l'association d'éléments $\alpha, \beta, \ldots$ de poids affectés a, b, ... : $a\alpha + b\beta + \ldots.$ (ce qu'on appellera plus tard une forme de Grassmann de première espèce)
Somme des coefficients : $\alpha + \beta + \ldots.$	Poids total d'une grandeur élémentaire : $a + b + \ldots$
	Grandeurs élémentaires égales : grandeurs dont les écarts à un même élément sont les mêmes.

La première question étudiée par Grassmann est bien naturelle compte tenu des notations qu'il utilise : représenter sous la forme la plus simple possible une grandeur élémentaire $a\alpha + b\beta + \ldots.$, en tentant tout d'abord de la représenter à l'aide d'UN seul terme : $a\alpha + b\beta + \ldots. = x\sigma$.

Le traitement du cas où le poids total de la grandeur est non nul ne surprend guère un lecteur contemporain : aux notations près, on retrouve les formules classiques de définition du barycentre d'un système de points pondérés, accompagnées d'énoncés sans « formules » tels que :

« Une grandeur élémentaire, dont le poids n'est pas nul, se laisse représenter comme un élément affecté du même poids ; précisons, l'écart de cet élément à un élément ρ est égal à l'écart de la grandeur élémentaire au même élément divisé par le poids ».

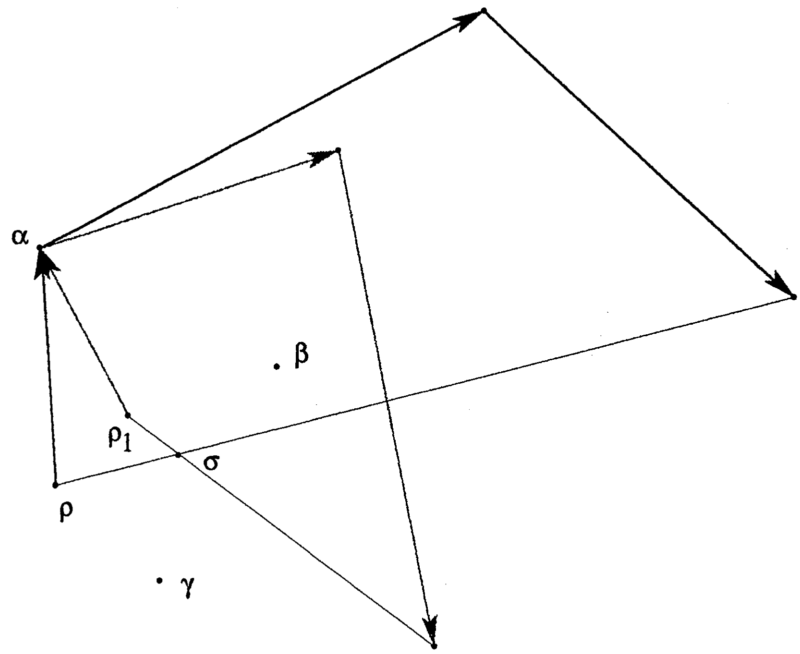
L'élément σ vérifiant la relation $a\alpha + b\beta + \ldots. = x\sigma$ est appelé l'élément-somme de la somme multiple d'éléments $a\alpha + b\beta + \ldots.$. Il est tel que :

« L'écart total d'une somme multiple d'éléments à l'élément-somme σ est nulle ».

Le cas où le poids total de la grandeur est nul est traité avec de façon très détaillée, et les arguments mathématiques se mélangent à des éléments de nature pratique dont nous citerons seulement un court extrait :
«... Nous avons donc le droit de définir comme étant égales cette grandeur élémentaire [de poids total nul] et sa valeur d'écart, oui, nous sommes contraints de le faire si nous ne voulons pas embrouiller le sujet avec des distinctions inutiles. »[18].
L'examen du cas particulier de la grandeur $\beta - \alpha$ conduit alors à écrire $[\alpha\beta] = \beta - \alpha$, ce que Grassmann commente ainsi :
« Les deux ne représentent donc que des désignations différentes, et comme la première est arbitraire et la seconde nécessaire, alors à partir de maintenant nous laisserons tomber de préférence la désignation prise dès le début comme provisoire au profit de la seconde, et nous désignerons donc dans ce qui suit par $\beta - \alpha$ un segment qui, si α est posé en tant que son élément initial, a β comme élément extrémité. ».

Après avoir défini la somme d'un élément α et d'un segment p, puis la somme d'un élément multiple $m\alpha$ et d'un segment p[19], Grassmann a construit une théorie des grandeurs élémentaires dont l'application à la géométrie se fait simplement en imaginant des points à la place des éléments. Il en donne les principaux résultats, à l'aide des formules mais également à l'aide de phrases exprimant de manière plus intuitive les résultats concernant le centre des moyennes distances de n points, puis le barycentre de n points pondérés, qu'il appelle centre de l'association de points :
« Si on tire des segments d'un point variable r aux points d'une association de points fixée, si on multiplie des segments par les poids affectés sans changer leurs directions et si on met continûment l'un à côté de l'autre en partant de ρ les segments ainsi obtenus, alors le côté fermant la figure passe par un point fixe σ qui est le centre de cette association de points, et dont la distance à ρ est comprise dans le côté fermant autant de fois que le poids total. ».

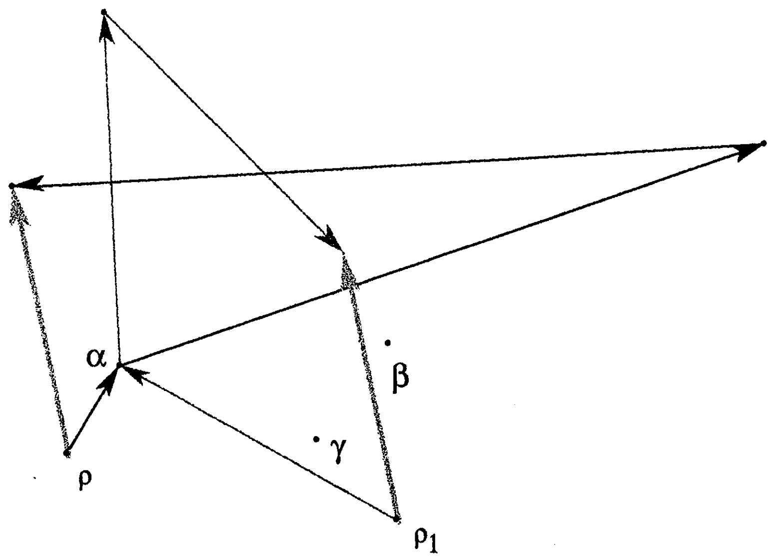
[18]Voir l'ouvrage de D. Flament, page 100.
[19]Il construit ainsi un édifice que l'on retrouve dans de nombreux ouvrages de géométrie sous le nom d'espace universel.



Construction du centre σ de l'association de points α, β et γ de poids affectés respectifs 1, 2 et 3.

Dans le cas où le poids total est nul :

« Si on tire d'un point variable ρ les segments à une série de points fixes, auxquels est affectée une série de grandeurs de nombre dont la somme est nulle, et si on met continûment l'un à côté de l'autre ces segments après les avoir multipliés par les nombres affectés sans changer leur direction, alors le côté fermant a une direction et une longueur constantes et peut être appelé l'axe de cette association de points. ».



Mise en évidence de l'axe de l'association de points α, β et γ de poids affectés respectifs 1, 2 et – 3.

Grassmann donne ensuite des applications de sa théorie en statique. La première débouche sur l'interprétation du barycentre en tant que « centre des forces parallèles » et elle est bien connue (on utilise le produit extérieur - ou le produit vectoriel - pour définir le moment de ces forces par rapport à un point) . La deuxième est intéressante car elle montre l'intérêt de considérer des poids négatifs et fournit une interprétation physique de l'axe d'une association de points de poids total nul. Pour cela, il considère un corps, constitué d'une association de points (particules), plongé dans un liquide : la poussée d'Archimède s'exerçant sur chaque particule se traduit par un poids négatif. Si le corps flotte dans le liquide, alors la somme de tous les poids (poids de chacune des particules, et poussée d'Archimède exercée sur chacune d'elles) est nulle, et on peut considérer le segment de direction et de longueur constantes égal à la somme de l'association de particules. Ce segment peut être nul : dans ce cas, le corps flotte dans n'importe quelle position d'équilibre ; sinon, la direction du segment détermine l'axe qui doit être en position verticale pour que le corps flottant dans le liquide soit en équilibre.
Enfin, il donne une autre application des associations de poids total nul, qu'il juge beaucoup plus importante que la précédente : elle concerne le magnétisme. En effet, si on considère un corps magnétique formé de particules, les intensités magnétiques au sein de ce corps ont une somme nulle. Dans le cas du magnétisme terrestre ou dans celui d'un aimant distant, on peut considérer que toutes les particules du corps sont soumises à des forces parallèles, dont l'intensité peut être considérée comme un poids affecté à la particule. La somme de l'association ainsi obtenue est un segment u de direction et de longueur déterminée, ayant une signification physique importante : si on note α, β, ... les particules, ap, bp, ... les forces (parallèles au vecteur p) proportionnelles aux intensités magnétiques agissant sur les points α, β, ... alors le moment de ces forces par rapport à n'importe quel point est égal au produit extérieur du segment u par le vecteur p. Si on appelle axe magnétique le segment u, et p la force magnétique, le corps magnétique est en équilibre si l'axe magnétique est placé dans la direction de la force agissante.

L'analyse ponctuelle de Grassmann ne s'arrête pas là : il définit le produit extérieur de 2, 3 et 4 points. Le produit extérieur de deux points A et B, que Grassmann note [AB], puis ensuite A.B, désigne « une partie définie de la ligne droite infinie déterminée par A et B. On écrit $A.B = A_1.B_1$ quand les deux produits représentent des parties égales, de même signe d'une même ligne droite. ».
Quant au produit extérieur de trois points A, B et C, noté A.B.C, il désigne « le triangle dont les sommets sont A, B et C, considéré comme une partie délimitée du plan infini déterminé par A, B, C. L'égalité $A.B.C = A_1.B_1.C_1$ signifie que les triangles sont des parties du même plan, égales, de même signe. ». De même le produit extérieur de 4 points généralise ce qui précède en remplaçant les triangles par des tétraèdres.

Les applications de ce chapitre traitent des sytèmes de coordonnées, des transformations de coordonnées, d'équation d'un plan en termes de points, ainsi que de nombreuses applications en statique.

Le produit régressif

Le tiers restant de l'ouvrage traite d'un concept original introduit par Grassmann, le produit régressif. Le produit extérieur de deux éléments dépendants est nul ; or cette propriété n'est pas nécessaire dans la définition générale que Grassmann donne d'un produit dans sa théorie des formes ; il construit donc un nouveau produit qui s'affranchirait de cette particularité. Il s'interroge sur la légitimité de considérer comme facteurs d'un produit des éléments dépendants entre eux. Or en se plaçant dans un espace à n dimensions, quand la somme des ordres des facteurs dépasse n, ils sont nécessairement dépendants. C'est précisément pour traiter un tel cas qu'il définit le produit régressif, en convenant de le noter à l'aide d'un point entre les deux facteurs, ce qui le conduit à changer la notation de leur produit extérieur (désormais, ce dernier sera noté par simple juxtaposition des facteurs). Voici la définition générale donnée par Grassmannn :

Le produit régressif AB.AC où A, B et C désignent n'importe quelle grandeur, est le produit ABC.A, dans lequel ABC est traité comme un coefficient attribué à A, à la condition que le produit ABC soit effectué dans le champ d'ordre minimum auquel A, B, C appartiennent simultanément.

Si l'on se restreint à la géométrie, a, b, c et d désignant des points, le produit des deux segments ab et ac est $abc.a$; le produit des trois segments ab, ac et bc est $abc.abc$, et plus généralement m, n, p désignant des nombres, le produit de mab, nac et pbc est $mnp.abc.abc$. Enfin, le produit du plan abc par le plan abd est égal à $abcd.ab$; le produit des trois plans abc, abd, acd est $abcd.abcd.a$.

Ces quelques exemples montrent la complexité du chapitre, dont certaines parties ne seront d'ailleurs pas reprises dans la nouvelle édition de l'Ausdehnungslehre de 1862. C'est cependant en utilisant la multiplication extérieure et le produit régressif que Grassmann démontre une formule qui, en langage moderne, correspond à la relation :

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim (E \cap F).$$

L'accueil de l'Ausdehnungslehre de 1844

L'accueil de cette édition de 1844 peut être résumé par l'appréciation qui en est faite par Friedrich Engel :

« Ainsi Grassmann fit l'expérience qui doit être la plus pénible pour l'auteur d'une nouvelle œuvre : son livre ne fut remarqué nulle part ; le public fut complètement silencieux à son sujet ; il n'y eut personne pour le discuter ou même qui fit part publiquement d'une erreur qu'on aurait pu y trouver. Les mathématiciens à qui il avait envoyé l'ouvrage se déclarèrent sans hostilité à son égard, parfois même avec bienveillance, mais aucun ne l'étudia vraiment. ».

Grassmann sollicita Möbius pour écrire un article sur l'Ausdehnungslehre, mais ce dernier déclina finalement l'offre, et conseilla à Grassmann de le faire lui-même, ce qu'il fit.

La seule reconnaissance que Grassmann reçut à cette époque concerne un article intitulé « Die Geometrische Analyse geknüpft und die Leibnitz erfundere geometrische Charackteristic » qu'il écrit pour répondre à un concours lancé par la revue « Die Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaft », offrant un prix pour la création d'un système semblable à celui décrit par Leibniz dans sa lettre à Huyghens de 1679, lettre qui venait d'être publiée pour la première fois en 1833. Averti par Möbius de l'annonce de ce prix, Grassmann, qui avait déjà accompli un tel travail, écrivit donc l'article cité précédemment dans l'espoir de voir son travail reconnu par un groupe de scientifiques. Il gagna le prix, et son article fut publié par la revue en 1847 : il y traite en détail le produit intérieur (le produit scalaire moderne), qui était plutôt négligé dans l'Ausdehnungslehre. L'accueil de l'article fut aussi mauvais que celui de l'œuvre de 1844.

Trois mathématiciens de l'époque furent obligés de prendre en compte les travaux de Grassmann pour des questions de priorité de découverte : Saint-Venant (1797-1866), Cauchy (1789-1857) et Hamilton.

– Saint-Venant publia en 1845 un article intitulé « Mémoire sur les sommes et différences géométriques et sur leur usage pour simplifier la mécanique ». En deux pages, il y traite de l'addition, la soustraction et la différentiation vectorielle, ainsi que d'un produit géométrique qui est celui de Grassmann dans son ouvrage de 1840. Grassmann prit connaissance de l'article de Saint-Venant vers 1847, et écrivit à Cauchy, le priant de transmettre une lettre à Saint-Venant, ainsi qu'une des deux copies de son Ausdehnungslehre qu'il lui envoyait. Saint-Venant accusa réception de la lettre mais lui demanda de lui envoyer le livre, qu'il n'avait pas reçu ...

– En 1853, une autre question de priorité surgit lors de la publication dans les Comptes rendus d'un article de Cauchy intitulé « Sur les clés algébriques », principalement consacré à la résolution d'équations. Considérons le système d'équations :

$$x + 3y = 11$$
$$4x + 2y = 14$$

Cauchy introduit alors deux clés algébriques i et j, qui vérifient les relations $i.i = j.j = 0$ et $i.j = -j.i$. En multipliant les équations par ces clés, il obtient :

$$xi + 3yi = 11i$$
$$4xj + 2yj = 14j$$

En les additionnant, il en déduit Ax + By = K, où A = i + 4j, B = 3i + 2j et K = 11i + 14j. Puis en multipliant les deux membres par B :

$$(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)\mathrm{B} = \mathrm{KB}.$$

Or les mêmes lois de multiplication pour A, B et K que pour i et j s'appliquent. On en déduit : ABx = KB, d'où $x = \frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{AB}}$. Les calculs conduisent à $x = \frac{-20ij}{-10ij}$, c'est-à-dire $x = 2$.

Or Grassmann développe dans l'Ausdehnungslehre des méthodes presque identiques ... Cauchy ne répondit jamais à la réclamation de priorité.

– Quant à Hamilton, il admire l'œuvre de Grassmann, mais lui reproche ... de ne pas avoir découvert les quaternions, tout en étant soulagé qu'il ne l'ait pas fait. Voici quelques extraits de lettres adressées à ce sujet à De Morgan[20] :

« J'ai lu récemment plus d'une centaine de pages de l'A. de Grassmann, avec grande admiration et respect. Préalablement, je n'avais qu'une connaissance légère et générale du livre, et je pensais que cela me demanderait d'apprendre à “fumer” pour être en mesure de le lire. Si je pouvais avoir l'espoir d'être mis en concurrence avec Descartes d'une part et avec Grassmann de l'autre, mon ambition scientifique serait satisfaite ! Mais il est curieux de voir comment il échoue de peu, mais cependant complètement sur les quaternions. Il a publié en 1844, un peu plus tôt que moi, mais avec la plus évidente et parfaite indépendance. »

« Je ne suis plus tout à fait aussi enthousiaste aujourd'hui au sujet de Grassmann que je l'étais dans ma dernière lettre. Mais j'ai lu entièrement presque tout ce que j'ai pu me procurer de ses écrits, y compris un substantiel commentaire (en Allemand) de Möbius. Grassmann est un très grand génie et un génie très allemand ; sa manière de voir l'espace est au moins aussi nouvelle et étendue que celle que j'ai du temps ; mais il n'a ni anticipé, ni atteint la conception des quaternions, même si j'avais cru qu'il en était si près qu'il aurait dû y arriver, en me fondant sur une notion que j'avais rapidement relevée et sur ce qu'aurait pu être sa signification (et sur cette dernière, je n'ai que de faibles lueurs, même maintenant) dans sa doctrine du « produit régressif ». Je cite de mémoire. Son produit extérieur (aüssere), je pense que je comprends bien ; et que cela dit quelque chose à quelqu'un qui n'a pas appris à “fumer”. Et même son produit intérieur, publié postérieurement (en 1847), je pense que je peux l'avaler à peu près. En fait, les « produits intérieurs » de Grassmann ont beaucoup d'analogie avec mes « parties scalaires » d'un quaternion, et ses « produits extérieurs » avec mes « parties vectorielles ». Si l'idée de les combiner lui était venue, il aurait dû être conduit aux quaternions ; mais en ce qui les concerne, il me semble qu'il a complètement échoué à les percevoir. Cependant je pense que mes propres recherches, ou spéculations, auraient une meilleure chance d'être appréciées dans ces pays si les lecteurs avaient d'abord été

[20]Lettre du 31 Janvier 1853, (traduction assurée par nos soins).

confrontés à une dose suffisante de Grassmann. Je dois dire que je ne crains pas la comparaison. Vous tolérez l'égotisme dans la correspondance ... ».[21]

Enfin, deux autres mathématiciens italiens montreront de l'intérêt pour l'œuvre de Grassmann. D'une part, Luigi Cremona qui utilisa des mots très forts pour la louer, qui intégra certaines idées de Grassmann dans l'un de ses livres et exposa l'ensemble de ces dernières dans la revue « Nouvelles Annales de Mathématiques » en 1860. D'autre part, Giusto Bellavitis qui entra en contact avec lui vers 1850, et étudia l'Ausdehnunslehre. Il fit part à Grassmann de l'intérêt suscité par son œuvre en Italie ainsi que de sa volonté de familiariser les mathématiciens de son pays avec elle.

Ainsi, vers 1860, seuls cinq mathématiciens, un en Angleterre (Hamilton), un des pays de langue allemande (Möbius), un en France (Saint-Venant) et deux en Italie (Cremona et Bellavitis) étaient parvenus à apprécier jusqu'à un certain point l'œuvre de Grassmann. Alors que les idées de Hamilton avaient déjà beaucoup attiré l'attention, Grassmann restait presque un inconnu.

L'Ausdehnungslehre de 1862

Grassmann évoque dans la préface le succès très limité de la première édition, et termine ainsi :
« Je reste confiant dans l'idée que le travail que j'ai développé dans la science que je présente ici et qui a demandé une partie significative de ma vie ainsi que la plus acharnée mise en œuvre de mes capacités, ne sera pas perdu. Il est vrai que je suis conscient que la forme que j'ai donné à cette science est imparfaite et doit être améliorée. Mais je sais et je me sens obligé de dire (même si je cours le risque de paraître arrogant) que même si ce travail devait de nouveau rester inutilisé pendant 17 années encore ou même plus longtemps sans entrer dans le développement véritable de la science, le temps viendra cependant où il sera tiré de la poussière de l'oubli, et où des idées aujourd'hui dormantes porteront leurs fruits. Je sais que je n'ai pas non plus réussi à réunir autour de moi dans un statut que j'ai jusqu'ici désiré en vain, un groupe d'étudiants à qui j'aurai pu faire profiter de ces idées et que j'aurais pu encourager à les développer et les enrichir ; néanmoins, un temps viendra où ces idées, peut-être sous une nouvelle forme, émergeront à nouveau et entreront en communication vivante avec des développements contemporains. ».

Grassmann, par rapport à l'édition de 1844, supprime les commentaires philosophiques (ce qui facilite la lecture) mais également les applications en Physique

---

[21]Lettre du 2 Février 1853, (traduction assurée par nos soins).

(ce qui ne va pas dans le même sens). La présentation est du type de celle d'Euclide dans ses Éléments, forme que Grassmann a déjà eu l'occasion d'utiliser dans un livre d'Arithmétique élémentaire. Si elle favorise la formalisation des concepts et de leurs propriétés, elle n'est pas adaptée pour un sujet auquel le lecteur n'a pas été familiarisé auparavant. Elle ne permit donc pas à Grassmann de gagner des partisans à ses idées. L'ouvrage n'eut guère plus de succès que le premier. Il comportait pourtant quelques nouveautés, qui passeront inaperçues. Un lecteur d'aujourd'hui y trouvera une théorie qui, formellement, lui rappellera de très près celle des espaces vectoriels, comme en témoigne la traduction du début de l'ouvrage que l'on trouvera dans « L'enseignement de l'Algèbre linéaire en question »[22].

Deux remarques quant à la lisibilité de ce texte s'imposent, que nous tirons du travail de Jean-Luc Dorier.

– Pour un lecteur contemporain de Grassmann, cet exposé de propriétés a posteriori d'opérations définies par ailleurs, manque d'autonomie, car ces opérations et propriétés ne prennent vraiment leur sens que dans la Théorie des Formes qui n'est pas reprise dans cette édition.

– Pour un lecteur d'aujourd'hui, il doit être clair qu'il ne s'agit pas d'une axiomatique (Grassmann l'a d'ailleurs clairement expliqué dans son édition de 1844) : les objets et les propriétés ne sont pas posés a priori en fonction de certaines propriétés, mais sont le résultat d'une dialectique entre leur mode de génération (l'aspect « réel » de la science) et les règles générales de la théorie des formes (l'aspect « formel »).

La réception de la deuxième édition de 1862

On sait qu'elle ne fut pas meilleure que la première. Des notions introduites par Grassmann furent redécouvertes plus tard par d'autres mathématiciens, d'une manière indépendante, et on réalisa beaucoup plus tard que Grassmann les avait découvertes beaucoup plus tôt.

Vers 1870, Hankel et Clebsch reconnurent l'importance des travaux de Grassmann et les utilisèrent. Mais ils moururent tous les deux très jeunes. Félix Klein dit avoir été influencé par sa lecture de l'Ausdehnungslehre quand il a élaboré le programme d'Erlangen de 1872.

Schlegel a passé la plus grande partie de sa vie à expliquer et développer le travail de Grassmann, d'abord à travers leur relation à la géométrie élémentaire (ouvrage publié en 1872), puis à travers les nouvelles méthodes de géométrie supérieure et d'Algèbre (1875). On lui a reproché de manquer d'esprit critique par rapport aux travaux de Grassmann.

---

[22]Voir *L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en question* , coordonné par J.L. DORIER - La Pensée Sauvage - 1997 - pp.52-54.

William Kingdon Clifford (dans les années 1875-1879) s'est également intéressé aux travaux de Grassmann. Nous traiterons en détail cette question au paragraphe 25.

Avant même que les 300 exemplaires de la deuxième édition soient entièrement vendus, un deuxième tirage de l'édition de 1844 fut effectué en 1878, ce qui montre bien le manque d'autonomie de la deuxième édition par rapport à la première.

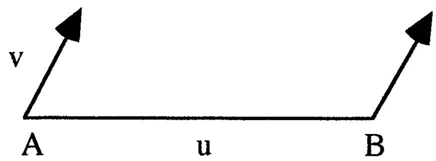
De 1881 à 1900, 150 articles et 9 livres consacrés aux idées de Grassmann furent publiés. Engel et Klein notent une forte tendance de la part de leurs auteurs à être trop enthousiastes vis à vis des méthodes de Grassmann et à manquer d'ouverture.

Sous l'incitation de Félix Klein et de William Gibbs, le travail de collecte des œuvres de Grassmann et leur publication fut entreprise dans les années 1890. En 1892, Félix Klein demanda à Friederich Engel (1861-1941) de les éditer et de préparer une biographie de Grassmann. Ce travail fut mené à bien de 1894 à 1911, date de la publication de la dernière partie, contenant la biographie.

15 - Mattew O'Brien : vers Gibbs et Heaviside.

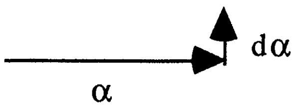
Mattew O'Brien (1814-1855) est beaucoup moins connu que les mathématiciens évoqués précédemment. On peut le considérer comme un précurseur de Gibbs et Heaviside, concepteur du calcul vectoriel moderne, même si son système, comparé au leur, est plutôt primitif, développé sur des bases moins solides et diffère du leur sur un point majeur : il n'arrive pas à inclure dans son calcul un traitement de l'associativité. Nous citerons cependant ses travaux, car ils présentent un intérêt sur le plan didactique.

Pour lui, le concept essentiel est « l'effet produit par la translation d'une grandeur orientée », concept qui peut être représenté par un produit de la grandeur orientée que l'on translate par la translation.



La translation de v le long de u est dite longitudinale quand l'angle A est nul, latérale quand il vaut 90°. Il introduit alors des « formes symboliques » : $x.y$ et $x \times y$; $u.v$ représente une translation latérale et $u \times v$ une translation longitudinale. Il montre que $u.v = v.u$ et $u \times v = v \times u$, mais il ne précise pas à ce moment-là si $u.v$ et $u \times v$ sont des nombres ou des grandeurs orientées.

Il définit d'autre part une addition des grandeurs orientées comme « mise ensemble » : pour cela, il distingue « l'addition simultanée » pour des grandeurs orientées de même origine de « l'addition par succession » dans le cas où l'une des grandeurs orientées a pour origine l'extrémité de l'autre. Il évoque l'égalité des grandeurs orientées et leur utilité pour représenter des entités physiques. Puis il introduit trois « unités orientées » α, β et γ qui partent de l'origine des axes x, y et z et les dirigent respectivement. Toute grandeur orientée u s'exprime alors sous la forme $u = x\alpha + y\beta + z\gamma$. Il établit ensuite la distributivité des deux multiplications par rapport à l'addition. Il introduit l'expression dα comme étant une ligne infinitésimale faisant un angle droit avec α.



Concernant les translations longitudinales, il écrit :
$\alpha \times \alpha = 1$, $\beta \times \beta = 1$, $\gamma \times \gamma = 1$; $\alpha \times \beta$, $\alpha \times \gamma$, $\beta \times \gamma$, ... étant tous égaux à 0. Il en déduit $u \times v = mn \cos\theta$, où m et n désignent les longueurs de u et v et θ l'angle qu'ils font.
Pour préciser le caractère vectoriel du produit $u.v$, O'Brien introduit le terme de « directrice ». Ainsi, la directrice de α.β est γ, celle β.γ de est α et celle de γ .α est – β, ce qu'il note D(α, β) = γ , ... Quant à la valeur numérique de $u.v$, elle vaut mn sinθ. Au début de l'ouvrage, il semble que $u.v$ soit une quantité numérique ; plus loin, il semble qu'il le considère comme un parallélogramme orienté. Enfin, son produit D$u.v$ est un segment orienté égal en direction, sens et longueur au produit vectoriel moderne. O'Brien ne clarifie pas vraiment ce que représente $u.v$. De plus, son D$u.v$ ne correspond pas toujours au produit vectoriel moderne. Avec ses notations, il ne disposait d'aucun symbolisme pour exprimer l'équivalent de $(i \wedge j) \wedge k$. Il aurait pu seulement écrire (Dα.Dβ).γ, mais ceci n'a pas de signification dans sa théorie ; les seules écritures de ce type qu'il peut manipuler sont de la forme Dα.(Dα.v).

16 - Des quaternions à l'analyse vectorielle moderne

Comme nous l'avons montré précédemment, deux œuvres dominent parmi les nombreuses contributions à l'élaboration d'un calcul vectoriel : celle de Hamilton autour des quaternions, et le Calcul de l'Extension de Grassmann. La réception difficile de cette dernière dans les premières années après sa publication ayant déjà été longuement évoquée, nous allons brièvement, dans ce qui suit, comparer l'influence à plus long terme de ces deux œuvres puis, dans un second temps, évoquer l'influence de quelques mathématiciens sur celle des deux qui a le plus fortement influencé l'évolution vers le calcul vectoriel moderne : Tait, Peirce, Maxwell et Clifford ont en effet, malgré leurs opinions contrastées sur la théorie des quaternions, contribué à mettre en valeur le rôle dominant des parties scalaire et vectorielle des quaternions au détriment des quaternions complets, ouvrant ainsi la voie au calcul moderne que Gibbs et Heaviside vont ensuite mettre au point.

L'influence comparée de Hamilton et de Grassmann[23]

Dans la période 1841-1900, on compte 594 publications concernant les quaternions contre 217 relatives à l'analyse de Grassmann. En ce qui concerne les ouvrages de plus de 50 pages, 38 furent écrits sur les quaternions (nombre de pages moyen : 281 p.) et 16 dans la tradition de Grassmann (nombre de pages moyen : 249 p.). Alors que Hamilton a lui-même écrit 19% du nombre total des publications sur les quaternions (et 73% des publications datant d'avant 1866), les pourcentages correspondants pour Grassmann sont 15% (et 76% des publications datant d'avant 1875). L'influence de l'œuvre de Grassmann fut efficace environ 50 ans après que celle de Hamilton le soit, avec un maximum dans les années 1876-1900 pour celle de Hamilton et dans les années 1891-1900 pour celle de Grassmann.

Du point de vue des pays influencés par ces œuvres, on peut faire les remarques suivantes :

– la théorie des quaternions fut publiée en 10 langues :

Anglais (10 livres en Angleterre, 2 en Amérique),
Français (8 livres),
Allemand (8 livres),
Hollandais (2 livres),
Japonais (2 livres),
Portugais (2 livres),
Tchécoslovaque (1 livre),
Polonais (1 livre),
Espagnol (1 livre),

ainsi que de nombreux articles en Italien et au moins un en Danois.

Plus généralement, concernant les publications, 60% venaient d'Angleterre, 15% d'Amérique, 9% de France et 8% d'Allemagne.

L'intérêt pour les quaternions était donc très fort en Angleterre, mais substantiel en Amérique, en Allemagne et en France.

– la théorie de Grassmann est apparue seulement dans 4 pays : 12 livres lui furent consacrés en Allemagne, 2 en France, 1 en Italie et 1 en Amérique. 57% des publications venaient d'Allemagne, 18% d'Amérique, 10,5% d'Angleterre et 10,5% de France, ainsi que quelques travaux en Polonais, Italien, Espagnol, Russe ou Tchécoslovaque. Son influence était donc centrée sur l'Allemagne, avec proportionnellement moins d'influence hors d'Allemagne que les quaternions en ont eu hors d'Angleterre. On peut remarquer que le pays dans lequel les deux théories ont suscité le plus d'intérêt – les pays d'origine étant mis à part – est l'Amérique.

[23]Pour ce paragraphe, nous résumons le travail de M.J. Crowe.

Influence de quatre mathématiciens : Tait, Peirce, Maxwell, Clifford.

Tait et son « Elementary treatise on Quaternions ».

Le but de Peter Guthrie Tait (1831-1901) dans ce traité publié en 1867, puis en 1873, est de montrer les applications des quaternions à la Physique.

• *Dans le premier chapitre*, il traite de :

- l'égalité vectorielle,
- l'addition et la soustraction vectorielle,
- la multiplication d'un vecteur par une quantité scalaire,
- la différentiation d'un vecteur par rapport à une seule variable scalaire.

Une caractéristique remarquable de ce chapitre est que Tait n'y parle pas du tout des quaternions, ce qui fait que son exposé ressemble beaucoup à un livre d'analyse vectorielle moderne.

• *Le chapitre II* est consacré aux produits et quotients de vecteurs et, puisque Hamilton définit un quaternion comme un quotient de vecteurs, les quaternions tiennent une place prépondérante.

Il n'est sans doute pas inutile de rappeler comment Hamilton définit un quaternion α ; pour cela, il définit sa partie scalaire $S\alpha$ égale à $\frac{a.b}{a^2}$ et sa partie vectorielle $V\alpha$ égale à $\frac{a \wedge b}{a^2}$, a et b désignant deux vecteurs. Compte tenu des règles de calculs les concernant, il montre que le produit[24] de α par a est égal à b, ce qui l'incite à désigner ce quaternion par le quotient $\frac{b}{a}$, quotient de deux vecteurs.

Mais comme dans le chapitre I, la plupart des théorèmes peuvent être traduits en termes d'analyse vectorielle moderne. Dans la théorie des quaternions, le produit de deux vecteurs α et β est égal au quaternion $\alpha\beta$ dont la partie scalaire $S\alpha\beta$ est égale à l'opposé de leur produit scalaire moderne et dont la partie vectorielle $V\alpha\beta$ est égale à leur produit vectoriel moderne $\alpha \wedge \beta$. Tait écrit des relations telles que $S\alpha\beta = S\beta\alpha$ et $V\alpha\beta = - V\beta\alpha$, qui ne sont pas loin des égalités usuelles $u.v = v.u$ et $u \wedge v = - v \wedge u$.

• La même remarque vaut pour *le chapitre III* où, parmi les premières formules, figurent les résultats suivants :

pour tous vecteurs α et β : $S\alpha\beta = T\alpha T\beta\cos\theta$, $V\alpha\beta = T\alpha T\beta\sin\theta\eta$. Le symbole T, appliqué à un vecteur, donne sa longueur ; η désigne un vecteur perpendiculaire à α et β.

---

[24]En fait, ce produit de α par a doit être interprété, en langage moderne, comme l'image de a par l'opérateur α , qui est notée αa, et peut donc être lue comme étant un « produit ». Voir l'ouvrage de Burali-Forti et Marcolongo, que nous évoquerons plus loin (Hermann, 1910).

• Dans le *chapitre IV*, consacré à l'extension aux quaternions de la différentiation vectorielle, Tait traite de la « fonction linéaire » en termes de dyades, ce qui correspond, en notations modernes, aux applications linéaires de la forme

$$H(\vec{a}, \vec{b}): \vec{u} \rightarrow (\vec{a}.\vec{u})\vec{b}$$

ce qu'il écrit comme Hamilton à l'aide d'expressions de la forme $\Phi\rho = \alpha S\beta\rho$.[25]

Benjamin Peirce : les quaternions et l'Amérique.

B. Peirce est souvent considéré comme le premier grand mathématicien américain. Enthousiasmé par la théorie des quaternions, il a beaucoup fait pour la répandre, même s'il a peu publié à leur sujet (Ses travaux portent sur la théorie des systèmes hyper-complexes).

James Clark Maxwell : la critique des quaternions.

Maxwell a introduit les vecteurs en Électricité de manière durable. En ce qui concerne les quaternions, il apprécie le caractère naturel des représentations des entités physiques qu'ils permettent, ainsi que leur concision. Plus particulièrement, il trouve que les quaternions permettent au physicien de « garder sous les yeux » les entités physiques : dans ce but, il trouve très appropriés l'opérateur ∇ ainsi que la fonction linéaire.

• Pour l'opérateur ∇, P désignant une fonction scalaire de la position, Maxwell dit que « la quantité ∇P est un vecteur indiquant la direction dans laquelle P diminue le plus rapidement, et qui mesure le taux de décroissance ».

D'autre part, σ désignant un vecteur écrit en langage des quaternions sous la forme $\sigma = it + ju + kv$, alors

$$\nabla\sigma = -\left(\frac{dt}{dx}+\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dz}\right) + i\left(\frac{dv}{dy}-\frac{du}{dz}\right) + j\left(\frac{dt}{dz}-\frac{dv}{dx}\right) + k\left(\frac{du}{dx}-\frac{dt}{dy}\right).$$

Maxwell propose des dénominations originales pour la partie scalaire $S\nabla\sigma$ et pour la partie vectorielle $V\nabla\sigma$ de σ: « convergence de σ » de pour la première, « curl de σ » ou « version de σ » pour la seconde.

• Quant à la fonction linéaire, il remarque son utilité pour exprimer des quantités physiques d'une nouvelle sorte, qui sont liées aux directions de l'espace, mais qui ne sont pas des vecteurs, car les quantités de cette sorte nécessitent 9 nombres pour leur définition : il cite l'exemple des contraintes dans un corps solide.

---

[25]L'intérêt de ces dyades $H(a,b)$ réside dans le fait qu'elles engendrent $\mathscr{L}$(E). En effet, lorsque E est de dimension 3 et de base (i, j, k), pour tout élément α de $\mathscr{L}$(E) : $\alpha = H(i, \alpha(i)) + H(j, \alpha(j)) + H(k, \alpha(k))$. Mais leur inconvévient majeur vient du fait que la somme de deux dyades n'en est pas nécessairement une. On retrouvera cette faiblesse dans le calcul de Gibbs. La référence est celle indiquée dans la note 24.

En matière de quaternions, Maxwell distingue ce qu'il appelle les « idées » et les « méthodes ». S'il apprécie le premier aspect (qui recouvre ce que nous venons de décrire), il n'apprécie guère le deuxième. Ainsi, par exemple, il est gêné par la non homogénéité du quaternion et du produit complet de deux quaternions, et par le fait que le carré d'un vecteur est négatif, ce qui rend l'énergie cinétique négative. Dans son ouvrage le plus important, « Treatise on Electricity and Magnetism » (1873)), il ne fait figurer que les aspects des quaternions qui lui paraissent bénéfiques. En s'écartant de la pure tradition quaternioniste, il trace le profil d'une analyse vectorielle adaptée à la physique.

William Kingdon Clifford (1831-1879).

Clifford était l'un des rares mathématiciens de son époque à connaître à la fois les quaternions et le calcul de l'extension.

Dans son plus important ouvrage, « Elements of dynamics », publié seulement un an avant sa mort, Clifford introduit les vecteurs, qu'il appelle également des « pas », et expose dès le début l'addition des vecteurs. Vers le milieu du livre, il évoque le « produit de deux vecteurs », dans les termes qui suivent :

« En raison de l'importance du théorème des moments, nous allons le présenter sous un autre aspect. L'aire du parallélogramme *abcd* peut être considérée comme engendrée par le mouvement de *ab* selon le pas *ac* ou par le mouvement de *ac* selon le pas *ab*. Donc il semble naturel de le considérer comme le produit des deux pas *ab* et *ac*. Nous avons été habitués à considérer un rectangle comme le produit de ses côtés, quand on ne prend en compte que leurs longueurs. Nous allons faire maintenant la même extension de signification pour le produit que celle que nous avons faite pour la somme et considérer le parallélogramme contenu dans deux pas comme leur produit, en prenant également en compte leurs directions. La valeur numérique de ce produit est *ab ac* sin*bac* ; comme toute autre aire, elle doit être considérée comme une quantité orientée.

Supposons, cependant, que l'un des deux pas, par exemple *ac*, représente une aire qui lui est perpendiculaire ; alors, pour le multiplier par *ab*, on doit naturellement faire subir à cette aire le pas *ab*, ce qui va générer un volume, que l'on peut considérer comme le produit de *ac* par *ab*. Mais la valeur de ce volume est *ab* multiplié par l'aire et par le sinus de l'angle qu'elle fait avec *ab*, c'est-à-dire par le cosinus de l'angle que *ac* fait avec *ab*. Ce type de produit a donc pour valeur *ab ac* cos *bac* ; étant un volume, il ne peut qu'être plus grand ou plus petit ; c'est-à-dire, c'est une quantité scalaire.

Nous sommes ainsi conduit à deux sortes différentes de produit de deux vecteurs *ab*, *ac* ; un produit vectoriel, que l'on peut noter V.*ab*.*ac*, et qui est l'aire d'un parallélogramme dont ils sont deux des côtés, considérés tous les deux comme des pas [des vecteurs] ; et un produit scalaire, que l'on peut noter S.*ab*.*ac*, qui est le volume décrit par une aire représentée par l'un , à qui l'on fait subir le pas [le vecteur] représenté par l'autre. ».

Après avoir montré que ces deux produits sont distributifs par rapport à l'addition, Clifford ajoute la remarque suivante :

« Mais il y a une différence importante entre un produit vectoriel et le produit de deux quantités scalaires. À savoir, le signe d'une aire dépend de la façon dont on parcourt son contour ; une aire dont le contour est parcouru dans le sens anti-horaire est positive, et négative dans l'autre cas. Donc si V.*ab*.*ac* = aire(*abdc*), nous devons avoir par symétrie V.*ac*.*ab* = aire (*acdb*), et donc V.*ac*.*ab* = – V.*ab*.*ac*, ou encore $V\beta\gamma = -V\gamma\beta$. Ainsi, le signe d'un produit vectoriel est changé lorsqu'on intervertit l'ordre des termes. Cela est en accord avec le fait que $V\alpha\beta$ doive être un vecteur dirigé du côté selon lequel la rotation amenant α sur β apparaisse comme étant dans le sens anti-horaire. ».

Clifford donne donc ici une définition du produit vectoriel et du produit scalaire. Sa définition du produit vectoriel est pour l'essentiel en accord avec la définition moderne, ainsi qu'avec la partie vectorielle du produit des deux vecteurs pris au sens des quaternions. En revanche, en ce qui concerne le produit scalaire, le point de vue de Clifford est beaucoup moins clair : dans la citation précédente il n'évoque que sa valeur absolue sans préciser son signe ; il revient une centaine de pages plus loin sur le produit scalaire, qu'il définit alors comme l'opposé de la somme des produits de leurs composantes, en conformité avec la partie scalaire du produit des vecteurs pris au sens des quaternions.

Plus loin, Clifford utilise l'opérateur ∇ (sans introduire ce symbole) et propose le terme de divergence pour désigner l'opposé de ce que Maxwell a dénommé la convergence. Dans la partie consacrée aux contraintes dans un solide, il introduit la fonction linéaire. Dans son ouvrage, il ne donne aucune référence relative à ses sources, ce qui lui a été vivement reproché par Tait.

En conclusion[26], nous pouvons résumer ainsi l'apport de Clifford. Arrivant après que Hamilton et Grassmann aient exposé leurs théories, et avant que le calcul vectoriel moderne soit créé par Gibbs et Heaviside, Clifford a montré l'efficacité de l'utilisation des vecteurs, particulièrement en Mécanique. En se plaçant dans la perspective de la théorie des quaternions, il a introduit la pratique consistant à définir séparément le produit scalaire et le produit vectoriel, ce qui constitue une innovation majeure car les partisans des quaternions ne considéraient jamais $V\alpha\beta$ et $S\alpha\beta$ comme deux produits séparés de deux vecteurs α et β, mais seulement comme deux parties du produit « complet » des deux quaternions purs α et β. Dans ses « Elements of dymamics », Clifford sélectionne certaines parties de la théorie des quaternions et en modifie d'autres, travail que vont poursuivre Gibbs et Heaviside.

---

[26]Notre référence est ici encore le travail de M.J. Crowe.

17 - Gibbs et Heaviside et la théorie du calcul vectoriel moderne.

Ces deux physiciens mathématiciens, de par leur intérêt pour la théorie de Maxwell vont créer, indépendamment, à partir des quaternions, l'analyse vectorielle moderne.

Gibbs

Né en 1839, John Willard Gibbs obtint un doctorat à Yale en 1863, séjourna en Europe pendant trois ans (Paris, Berlin, Heidelberg) et revint à New Haven en 1869, avant de devenir deux ans après professeur de physique mathématique à Yale, poste qu'il occupa jusqu'à sa mort en 1903.

Il mena à bien son premier travail concernant l'analyse vectorielle alors qu'il avait déjà publié en 1876 et 1878 l'ouvrage « On the Equibrium of Heterogeneous Substances » dont l'importance ne fut reconnue que plus tard. Lorsqu'il publia ses premiers travaux d'analyse vectorielle, il était encore peu connu. Dans une lettre à Schlegel, il explique en détail ce qui l'a conduit vers une telle réalisation.

« Mon premier contact avec les quaternions eut lieu lors de la lecture de Electricity and Magnetism de Maxwell, où les notations des quaternions sont beaucoup utilisées. Je fus vite convaincu que pour dominer ce sujet, il était nécessaire que j'en maîtrise les méthodes. En même temps, je me rendis compte que bien que les méthodes soient appelées quaternioniques, l'idée de quaternion était tout à fait étrangère au sujet. En ce qui concerne le produit de vecteurs, je me suis rendu compte qu'il y avait deux importantes fonctions (ou produits) appelées la partie vectorielle et la partie scalaire du produit, mais que la réunion des deux pour former ce qui était appelé le produit (complet) ne faisait pas avancer la théorie en tant qu'instrument d'investigation géométrique. De même, à propos de l'opérateur ∇, appliqué à un vecteur, il m'apparut que la partie scalaire et la partie vectorielle du résultat représentaient des opérations importantes, mais que leur réunion (que l'on devait défaire ensuite) ne semblait pas être une idée de valeur. Ceci constitue d'ailleurs une répétition de ma première observation puisque l'opérateur est défini au moyen de la multiplication des vecteurs ; une modification dans cette multiplication entraînerait une modification dans l'usage de l'opérateur ∇.

J'ai donc commencé à développer, en repartant de zéro, l'algèbre comportant les deux sortes de multiplication, les trois opérateurs différentiels, l'un appliqué à un scalaire et les deux autres appliqués à un vecteur, ainsi que ces fonctions ou plutôt opérateurs intégraux qui, sous certaines conditions, sont les réciproques des opérateurs dits différentiels et qui jouent un rôle dominant dans beaucoup de secteurs de la physique mathématique. À ces sujets, j'ai ajouté celui de la fonction linéaire vectorielle qui est d'une si grande importance dans l'ouvrage de Maxwell (E et M.).

Je finis par imprimer ce travail, mais ne le publiai pas, même si j'en distribuai un bon nombre d'exemplaires à des personnes qui me semblaient pouvoir y trouver un intérêt. Le délai que je pris et mon hésitation venaient principalement de ma difficulté à me décider sur des détails de notations, sujets secondaires en eux-mêmes, mais pour lesquels il vaut mieux éviter des changements inutiles.

Ma connaissance des travaux de Grassmann avait aussi pour origine l'électricité et en particulier l'article qu'il avait publié dans le journal de Crelle en 1877, attirant l'attention sur le fait qu'il avait trouvé par lui-même en 1845 la loi d'action mutuelle de deux éléments de courant que Clausius venait juste de publier. J'étais d'autant plus intéressé par ce sujet que j'en étais moi-même arrivé (avant de prendre connaissance de l'article de Clausius) à le considérer comme l'expression la plus simple pour l'action en mécanique et, probablement, pour les mêmes raisons que Grassmann, car cette loi s'exprime si simplement au moyen du produit extérieur.

De toute manière, je me rendis compte que les méthodes que j'utilisais, tout en étant à peu près celles de Hamilton, étaient presque exactement celles de Grassmann. Je me procurai les deux éditions de l'Ausdehnungslehre, mais je ne peux pas dire que je les trouvai faciles à lire. En fait, je n'ai jamais eu la persévérance pour terminer aucune des deux et j'ai peut-être tiré davantage d'idées de ses différents articles que de ses deux ouvrages.

Je n'ai cependant pas conscience d'avoir été influencé par les écrits de Grassmann dans mon « Vector Analysis », même si je n'étais pas mécontent, dans l'introduction, de m'abriter derrière un ou deux noms distingués (Grassmann et Clifford) pour avoir fait des changements de notation que je pensais être détestables pour les quaternionistes. En fait, si vous lisez ce pamphlet avec attention, vous verrez que tout découle de la logique inexorable de l'algèbre à partir du problème que je m'étais moi-même posé, longtemps avant de connaître les travaux de Grassmann.

Je ne doute pas que vous considériez, comme moi, que les méthodes de Grassmann sont supérieures à celles de Hamilton. Il m'a cependant semblé que cela pouvait vous intéresser de voir comment, en partant de quelques connaissances des méthodes de Hamilton et simplement inspiré par le désir d'obtenir l'algèbre la plus simple pour exprimer les relations de géométrie physique, je fus conduit essentiellement vers l'Algèbre des vecteurs de Grassmann, indépendamment de toute influence venant de lui ou de n'importe qui d'autre. ».[27]

Nous allons donner maintenant un bref aperçu du contenu du « Vector Analysis » de Gibbs. Voici l'introduction qu'il en fait dans sa lettre à Schlegel.

---

[27]Traduction assurée par nos soins, à partir de l'ouvrage de Crowe.

« Les principes fondamentaux de l'analyse qui va suivre sont les mêmes que ceux qui sont familiers aux spécialistes des quaternions, sous une forme légèrement différente. La manière dont le sujet est développé est quelque peu différente de celle utilisée dans les traités sur les quaternions, puisque le but poursuivi par l'auteur ne requiert aucune utilisation du concept de quaternion, et consiste simplement à donner une notation adéquate pour les relations entre les vecteurs, ou entre vecteurs et scalaires, qui semblent les plus importantes, et qui se prêtent plus facilement aux transformations analytiques et à la justification de certaines d'entre elles. Comme précédent à un tel écart par rapport à l'usage en matière de quaternions, on peut citer le Kinematic de Clifford. Dans ce sens, le nom de Grassmann peut également être mentionné ; à certains égards, on peut rattacher la méthode qui va suivre à ces théories d'une manière plus étroite qu'à celle de Hamilton. ».

Cette introduction permet de juger des talents de Gibbs en matière de rhétorique, talents qu'il mettra avantageusement à profit, comme nous le verrons plus loin.

• Dans le chapitre I, intitulé « À propos de l'Algèbre des vecteurs », il définit un vecteur, un scalaire et le terme « analyse vectorielle ». Un vecteur est noté $\overline{AB}$. Les repères de l'espace sont orientés selon la règle des doigts de la main droite (contrairement à l'habitude de Hamilton). En ce qui concerne les produits, Gibbs introduit le « produit direct », noté $\alpha.\beta$, et le « skew product »[28], noté $\alpha \times \beta$, qui correspondent respectivement, en langage des quaternions à $-$ $S\alpha\beta$ et $V\alpha\beta$. Bien entendu, Gibbs n'utilise pas le produit complet $\alpha\beta$ égal à $S\alpha\beta + V\alpha\beta$. Voici une table de correspondance entre les notations de Gibbs et celles de Tait dans son « Treatise on quaternions ».

Gibbs	Tait
$\alpha.\beta = \beta.\alpha$	$S\alpha\beta = S\beta\alpha$
$\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$	$V\alpha\beta = -V\beta\alpha$.
$\alpha.\beta = xx' + yy' + zz'$ et $\alpha \times \beta = (yz' - y'z)i + (zx' - xz')j + (xy' - x'y)k$	$\alpha\beta = -(xx' + yy' + zz') + (yz' - y'z)i + (zx' - xz')j + (xy' - x'y)k$
$\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha.\gamma)\,\beta - (\alpha.\beta)\,\gamma$	$V\alpha V\beta\gamma = \beta S\alpha\gamma - \gamma S\alpha\beta$
$(\alpha \times \beta) \times (\gamma \times \delta) = (\alpha.\gamma \times \delta)\beta - (\beta.\gamma \times \delta)\alpha$	$VV\alpha\beta V\gamma\delta = \beta S\alpha V\gamma\delta - \alpha S\beta V\gamma\delta$

Le chapitre I se termine par le traitement de méthode de résolution d'équations vectorielles.

[28] « Skew » veut dire « de travers », « tourné sur le côté ».

Le chapitre II est consacré à la différentiation et à l'intégration vectorielle. Gibbs y introduit l'opérateur ∇, prouve les théorèmes le concernant et donne un traitement étendu des mathématiques de la théorie du potentiel.
Les chapitres III et IV sont centrés sur les fonctions vectorielles linéaires. Gibbs utilise pour cela les dyades que nous avons évoquées précédemment. S'il suit dans ces deux chapitres le même plan que celui de Tait et Hamilton, il va plus loin qu'eux dans le traitement des rotations et dans la théorie des corps déformables.

Un fait intéressant du point de vue didactique mérite d'être signalé. Alors que Grassmann, Hamilton et Tait n'ont presque pas enseigné leurs idées relatives au calcul vectoriel, Gibbs a donné des cours à ce sujet à plusieurs reprises dans les années 1880 et l'a fait de manière régulière chaque année dans les années 1890. C'est d'ailleurs à partir des cours donnés en 1879 – qu'il avait fait imprimer sans les publier – qu'il a élaboré ses « Elements of vector analysis », ouvrage dont les cours en question constituent les deux premiers chapitres d'une première partie qui fut publiée en 1881, la deuxième partie (Chapitres III et IV) ne devant l'être qu'en 1884.

D'autres contributions de Gibbs à l'analyse vectorielle que ses « Elements » sont également intéressantes dans une perspective épistémologique. Il a en effet publié de nombreux articles en rapport avec l'histoire de l'analyse vectorielle. Dans un article intitulé « On the determination of Elliptic Orbits from Three Complete Observations », publié en 1869, il a montré aux astronomes la puissance de l'analyse vectorielle pour la détermination d'orbites, méthode que certains d'entre eux utilisèrent avec succès. Le plus célèbre de ces articles , intitulé « On multiple algebra », publié en 1886, précise la place que, selon lui, doit tenir l'analyse vectorielle par rapport à des domaines plus larges tels que l'Algèbre et les mathématiques en général. Nous allons détailler ce point qui est fondamental pour la suite de notre travail[29].

Gibbs commence par évoquer de manière très claire et très complète l'histoire du développement de l'algèbre « multiple », en partant de l'algèbre « double » des nombres complexes, jusqu'aux travaux de Grassmann, qu'il détaille avec soin. Puis il aborde les applications de l'algèbre « multiple »[30] :
« D'abord, la géométrie et les sciences géométriques qui traitent d'objets ayant une position dans l'espace, la cinématique, la mécanique, l'astronomie, la cristallographie semblent devoir recourir à une telle méthode, car la position dans l'espace est essentiellement une quantité multiple et ne peut être représentée à l'aide de quantités simples que d'une manière arbitraire et maladroite. Pour cette raison, et aussi parce que

[29]L'ouvrage auquel nous nous référons ici est le suivant : The scientific papers of J. Willard Gibbs, volume 2, Dover Publications, 1961.
[30]Traduction assurée par nos soins d'extraits des pages 113 à 115 de la référence citée dans la note précédente.

nos intuitions spatiales sont plus développées que n'importe quelle autre classe de relations mathématiques, ces sujets sont spécialement adaptés pour introduire auprès des étudiants les méthodes de l'algèbre " multiple ". Ici, la Nature elle-même nous prend par la main et nous conduit pas à pas, comme une mère apprend son enfant à marcher. Dans l'examen de tels sujets, Möbius, Hamilton et Grassmann ont construits leurs algèbres, même si l'esprit philosophique du dernier ne fût pas satisfait avant d'avoir produit un système libéré de toute relation spatiale. C'est probablement en raison de leur emploi dans certains de ces domaines que les notions d'algèbre " multiple " se sont le mieux répandues .

[... ici, Gibbs développe l'emploi de ces méthodes en Électricité et magnétisme, et en astronomie ; pour cette dernière, il signale que leur emploi facilite le travail d'analyse, et permettent plus facilement que l'analyse ordinaire de trouver les formes les plus adaptées pour les calculs numériques.]

Je dois ici remarquer que dans ses applications géométriques, l'algèbre " multiple " prend naturellement une forme parmi les deux formes principales, selon que l'on prend les vecteurs ou les points comme quantités élémentaires, c'est-à-dire selon que le concept fondamental est celui d' objets caractérisés par une grandeur numérique et une direction ou celui d'objets caractérisés par une grandeur numérique et une position en un point. Ces formes d'algèbre multiple peuvent être distinguées en les appelant respectivement *analyse vectorielle* et *analyse ponctuelle*. La première peut être appelée " algèbre triple ", la deuxième " algèbre quadruple ", si l'on détermine le degré de l'algèbre par le degré de multiplicité du concept fondamental. La première est incluse dans la seconde, car la soustraction de points nous donne les vecteurs, et en ce sens l'analyse vectorielle de Grassmann est incluse dans son analyse ponctuelle. Le système de Hamilton, dans lequel le vecteur constitue l'idée fondamentale, est cependant transformé en algèbre quadruple par l'adjonction des quantités numériques ordinaires. Pour des questions pratiques on peut considérer le système de Hamilton comme équivalent à l'algèbre des vecteurs de Grassmann. Une telle équivalence pratique est évidemment inséparable des grandes différences de notations et de points de vue selon lesquels la question est étudiée.

Peut-être conviendrait-il que j'ajoute un mot en ce qui concerne la nature des problèmes qui requièrent l'analyse vectorielle ou la forme plus générale de l'analyse ponctuelle de Grassmann. La distinction des problèmes est très marquée, et correspond précisément à la distinction, familière à tous les analystes, entre les problèmes relevant des coordonnées cartésiennes et ceux relevant des coordonnées tétraédriques ou, en géométrie plane, triangulaires. Ainsi, en mécanique, cinématique, astronomie, physique, ou cristallographie, on aura rarement besoin de l'analyse ponctuelle de Grassmann. On pourrait peut-être enseigner ces matières pendant des années avec l'analyse vectorielle, sans jamais ressentir le besoin d'aucune des notions et notations relevant de l'analyse ponctuelle, précisément de la même manière qu'en algèbre ordinaire on pourrait utiliser les coordonnées cartésiennes pour étudier ces matières sans avoir l'occasion d'utiliser les coordonnées tétraédriques. Je pense à une exception qui, cependant, confirme la règle. La très importante théorie des forces agissant sur un solide est mieux traitée par l'analyse ponctuelle que par l'analyse vectorielle de la même manière qu'en algèbre ordinaire elle est mieux traitée avec des coordonnées tétraédriques qu'avec des coordonnées cartésiennes – je veux dire dans le but d'un développement élégant des résultats généraux. On peut obtenir assez facilement par n'importe laquelle des deux méthodes une théorie suffisante pour permettre les calculs numériques, et la plus familière aux étudiants pour de tels buts pratiques est bien sûr la meilleure. D'autre part, les propriétés projectives des solides, les relations d'alignement, et de semblables questions semblent requérir l'analyse ponctuelle pour un traitement adéquat.

Si j'ai dit que l'algèbre des vecteurs est contenue dans l'algèbre des points, cela ne veut pas dire que d'une certaine manière l'algèbre des points n'est pas déductible de l'algèbre des vecteurs. En mathématiques, une partie contient souvent le tout. Si on représente les points par des vecteurs tracés à partir d'une origine commune, et si on développe alors celles des relations entre de tels vecteurs représentant des points, qui sont indépendantes de la position de l'origine, par ce simple processus on peut obtenir une grande partie de l'algèbre ponctuelle, et peut-être cette algèbre toute entière. De cette manière, l'analyse vectorielle peut être amenée à servir de manière très commode pour de nombreux sujets que j'ai mentionnés comme relevant de l'analyse ponctuelle. L'analyse vectorielle, ainsi élargie, est à peine distinguable de l'analyse ponctuelle, mais le traitement du sujet de cette manière a en quelque sorte un caractère d'expédient, comparé à l'unité et à la simplicité que présente ce sujet lorsqu'on le développe directement à partir de l'idée de quelque chose situé en un point.

À propos des questions n'ayant aucune relation avec l'espace, la théorie des éliminations et substitutions, incluant celle des matrices et des déterminants, semble constituer l'application la plus simple de l'algèbre " multiple ". ... ».

Oliver Heaviside (1850-1925)

Heaviside a arrêté ses études à l'âge de 16 ans. Probablement sous l'influence de son oncle, Sir Charles Wheastone, il a débuté comme opérateur télégraphiste et s'est vite intéressé à l'électricité : le premier des nombreux articles qu'il allait publier à ce sujet date de 1872. En 1874, il se consacra à plein temps à l'étude et à la recherche dans ce domaine. Il étudie le traité de Maxwell (publié en 1873) et se trouve confronté aux quaternions. Heaviside a évoqué, dans sa critique d'un ouvrage de Wilson, l'évolution de ses idées à ce sujet, en commençant par l'évocation d'un garçon qui, séduit par le mot « quaternion » se lance dans la lecture des livres de Hamilton :

« Il emporta ces livres chez lui et tenta de comprendre. Il réussit après quelques difficultés, mais trouva que certaines des propriétés des vecteurs, qui y étaient prétendument prouvées, étaient complètement incompréhensibles. Comment le carré d'un vecteur peut-il être négatif ? Et Hamilton était si catégorique à ce sujet. Après la plus profonde recherche, le jeune abandonna, et ferma les livres. C'est alors qu' il mourut. Il avait commencé trop tôt l'étude des quaternions.

...

Mes premiers contacts avec les quaternions se sont passés d'une manière complètement différente. Dans son traité, Maxwell exprimait ses principaux résultats dans le langage des quaternions. Je me référai au traité du professeur Tait pour m'informer à leur sujet et apprendre à les manipuler. J'eus les mêmes difficultés que le garçon décédé, mais en les surmontant, je m'aperçus que les quaternions pouvaient être employés de manière consistante pour travailler avec les vecteurs. Mais en appliquant les quaternions au développement de la théorie de l'électricité, je les trouvai très peu commodes. La théorie des quaternions, dans ses aspects vectoriels, apparaissait comme anti-physique, peu naturelle, et ne s'harmonisait pas avec les mathématiques communes relatives aux nombres. Donc j'abandonnai les quaternions complets et gardai les scalaires purs et les vecteurs purs, utilisant une algèbre vectorielle très simple dans mes articles, à partir de 1883.

...

Jusqu'en 1888, je crus être le seul à travailler avec les vecteurs sur des principes véritablement physiques ; mais alors, je reçus un exemplaire de « Vector analysis » du professeur Gibbs (qui n'était pas encore publié). C'était une sorte de synopsis condensé d'un traité. Quoique différent en apparence, c'était essentiellement la même algèbre et analyse vectorielle à laquelle j'avais été conduit. ».[31]

Cet extrait situe bien les travaux de Heaviside par rapport à ceux de Maxwell, Hamilton, Tait et enfin Gibbs. Les contributions de Heavisisde à l'algèbre et à l'analyse vectorielle se trouvent d'abord dans ses articles publiés principalement dans deux revues au cours des années 1882-1892 et ensuite dans un ouvrage « Electromagnetic Theory », publié en 1893 (puis en 1899 et enfin en 1912 pour la 3ème édition), dans lequel un long chapitre de 173 pages constitue la première publication fournissant un traitement complet de l'analyse vectorielle moderne.

---

[31]Traduction assurée par nos soins.

• Dans ses articles publiés dans la revue « Electrician », il commence en 1882-83 par expliquer l'intérêt du rotationnel (qu'il nomme curl) : l'égalité C = curl B permet de remplacer la circulation du vecteur B le long d'une courbe orientée par l'intégrale du rotationnel à travers la surface délimitée par cette courbe. Puis il traite des potentiels pour des champs scalaires et vectoriels, sans utiliser à aucun moment les notations de la théorie des quaternions : la plupart de ses démonstrations sont faites sous forme cartésienne. Il s'en explique ainsi :
« À l'encontre des grands avantages des quaternions, on doit considérer le fait que les opérations rencontrées sont beaucoup plus difficiles que les opérations ordinaires correspondantes, si bien que l'économie du travail est, en grande partie, imaginaire. On doit pour cela réfléchir davantage à ce que l'on doit faire, alors que dans l'algèbre ordinaire on agit presque mécaniquement. En même temps, quand on travaille avec les vecteurs par le moyen des coordonnées, on trouve un grand avantage à garder à l'esprit les idées vectorielles fondamentales. Faisons un compromis : laissons en arrière les équations scalaires (certes faciles à manipuler mais complexes) et considérons l'unique vecteur qu'elles cachent et qui exprime la réalité des choses. »[32]

Puis en 1883, il introduit directement le produit scalaire de deux vecteurs comme produit des longueurs par le cosinus de l'angle sans faire allusion à i, j, et k. Il introduit ensuite le terme « divergence » comme l'a fait Clifford (sans qu'il ait apparemment eu connaissance de ses travaux) en considérant l'opposé de la convergence. Il revient alors sur l'opérateur ∇, qu'il a peu utilisé auparavant, et n'a en tout cas pas présenté comme une opération vectorielle. Il l'applique à une fonction scalaire P (∇P est alors le gradient de P). Lorsque P désigne une fonction vectorielle, il définit séparément la divergence de P et le rotationnel de P (curl P). Il signale le lien avec la définition de l'opérateur ∇ de la théorie des quaternions où $\nabla R = \text{conv}R + \text{curl}R$ dans le cas où R est une fonction vectorielle, tout en précisant que « cependant ceci est presque une parenthèse et [que] nous ne nous occuperons plus d'expressions comportant des quaternions ». Dans une réédition de l'article, il ajoutera même dans une note en bas de page :
« L'opérateur ∇ contient toute la théorie des potentiels, qu'ils soient scalaires ou vectoriels. Mais par la suite, de la nature remarquablement différente des effets de ∇ sur les différentes fonctions, on est conduit pour clarifier à séparer son effet sur une fonction scalaire, que l'on saisit facilement, de celui sur une fonction vectorielle et dans ce cas, de le remplacer par le rotationnel ou la divergence de cette dernière, selon les cas, comme nous venons de le faire. »
• Dans son livre « Electromagnetic Theory », Heavisisde introduit les vecteurs dès le chapitre II pour développer la théorie électromagnétique et en donne quelques

[32] Traduction assurée par nos soins.

propriétés. Le chapitre III est celui que nous avons annoncé plus haut ; son titre « The Elements of Vectorial Algebra and Analysis » est éloquent, et sa longueur exceptionnelle (173 pages). Ainsi, l'ouvrage dans lequel apparaît pour la première fois une théorie complète de l'algèbre et de l'analyse vectorielle moderne est un ouvrage de physique.

•• Voici une traduction de son introduction.

« Si on le considère comme un traité d'algèbre vectorielle, ce chapitre a des défauts manifestes. Il contient seulement les rudiments sur le sujet. Néanmoins, comme le lecteur pourra le voir à travers les applications, il est parfaitement suffisant pour l'usage ordinaire dans les mathématiques que l'on traite habituellement avec des méthodes cartésiennes, et nous ne devons pas nous inquiéter de prendre en compte des développements plus avancés avant d'aborder les plus élémentaires. Pour l'instant, il n'existe encore aucun traité d'algèbre vectorielle, adapté à la physique mathématique et en harmonie avec les mathématiques cartésiennes (sujet auquel j'attache la plus grande importance). Je pense que ce chapitre peut être utile pour combler cette lacune. »

•• Heaviside compare l'approche cartésienne à l'approche vectorielle et met l'accent sur l'économie d'expression, le caractère naturel et la possibilité de prise en compte de l'intuition que permet l'approche vectorielle.

•• Puis il attaque en des termes assez violents le système des quaternions, évoquant la position de Maxwell.

•• Il évoque le travail de Gibbs. S'il en admire les idées, il critique ses notations. Il préfère garder les notations de Tait en les simplifiant, tout en faisant en sorte qu'elles s'harmonisent avec les notations cartésiennes. Il ne souhaite pas, comme Gibbs, créer un système qui se généralise à des espaces à n dimensions.

•• Il ne souhaite pas non plus désigner les vecteurs par des lettres grecques (Hamilton, Tait, Gibbs) ou gothiques (Maxwell).

•• Ce n'est qu'après toutes ces discussions qu'il introduit l'addition, la soustraction vectorielle, et il désigne par AB le produit scalaire et par VAB le produit vectoriel de deux vecteurs A et B.

Signalons, pour terminer, que l'ouvrage de Heaviside fut bien accueilli et mis en valeur dans l'ouvrage de Föppl, qui permit aux savants de langue allemande de connaître les travaux de Maxwell. Föppl y présente Heaviside comme le successeur le plus éminent de Maxwell en ce qui concerne les développements théoriques.

18 - Débat sur les systèmes vectoriels : lequel choisir ? Sont-ils vraiment utiles ?

En ce qui concerne la question du choix du système vectoriel à adopter, Gibbs et Heaviside vont avoir l'occasion de reprendre des arguments déjà développés dans leurs œuvres au cours des nombreuses polémiques qui vont les opposer aux partisans des quaternions, dans des revues telles que « Nature » ou le « Philosophical Transactions ». L'essentiel du débat aura lieu au cours des années 1890 ; de 1890 à 1894, 36 articles écrits par 12 savants parurent à ce sujet.

La plupart des physiciens n'ont d'intérêt pour les systèmes vectoriels que dans la mesure où ces derniers s'appliquent à la physique : les principaux acteurs dans cette polémique sont tous des physiciens, sauf Cayley, qui sera le seul avec Tait à aborder l'autre question, celle de la nécessité des systèmes vectoriels. Ils constituent tous des nouveautés, et la question de l'utilité de l'un quelconque d'entre eux se pose.

L'essentiel de la polémique est centré sur la première question, celle du choix du meilleur système vectoriel. Le débat est passionné, l'emploi de métaphores un peu frustes est fréquent. Les partisans des quaternions, à quelques exceptions près, s'adressent à des lecteurs déjà convaincus, sur un ton un peu amer. Gibbs, dans un style posé et vigoureux, écrit des articles où le raisonnement est précis, et qui emportent surtout l'adhésion des lecteurs exigeants, leur effet sur les autres lecteurs étant bien moindre. Quant à Heaviside, qui écrit des articles plus courts, pleins d'humour et de fougue, il arrive à convaincre les deux catégories de lecteurs, en montrant l'efficacité de son approche vectorielle dans ses publications en Électricité. L'importance des découvertes de Heaviside dans ce domaine constitue une circonstance très favorable pour son système vectoriel : celui qui veut le lire doit apprendre le langage de l'analyse vectorielle.

Revenons maintenant à la contribution du seul mathématicien dans ce débat : Cayley. Son point de vue restera dominant pendant plusieurs décennies dans le monde des mathématiciens. Il pense, comme la plupart des lecteurs au début de la polémique, qu'aucun système vectoriel n'est nécessaire. Dans son débat avec Tait sur ce sujet[33] il explique que les quaternions en tant qu'entités pour le mathématicien pur sont intéressants et importants, mais qu'en tant que méthode pour les mathématiques appliquées (dans lesquelles il range la géométrie) ils ne constituent rien d'autre qu'une sténographie, et que, même de ce point de vue, cette méthode nouvelle est inutile. Il termine ainsi :

« En conclusion, je voudrais dire que, alors que les coordonnées sont applicables à toute la science géométrique et constitue le fondement et la méthode à la fois naturelle et adéquate pour la science, les quaternions me semblent être une méthode particulière et

---

[33]L'article a pour titre « Coordinates versus Quaternions ». Il a été publié en 1894 dans les « Proceedings of the Royal Society of Edinburg ».

très artificielle de traiter des parties de la science telle que la géométrie tri-dimensionnelle qui sont naturellement discutées au moyen des coordonnées rectangulaires x, y, z. ».

Les arguments de Cayley s'appliquent-ils aussi bien contre les systèmes vectoriels autres que les quaternions ? Cette question, intéressante du point de vue didactique, n'est pas abordée par Cayley. Mais elle le sera dans les préfaces de nombreux ouvrages à venir traitant du calcul vectoriel, comme nous le verrons plus loin.

19 - Un début d'axiomatisation longtemps resté sans suite : les « systèmes linéaires » de G. Peano

Les travaux de Peano (1858-1932) dans le domaine de la formalisation sont très célèbres en ce qui concerne l'axiomatique qu'il a élaborée pour les nombres entiers naturels. Ceci ne constitue qu'une partie d'un projet beaucoup plus vaste, reprenant celui de la caractéristique de Leibniz, consistant à élaborer un langage formalisé utilisant peu de symboles et soumis à une « grammaire rationnelle »[34]. Ce symbolisme, que G. Peano appelle « pasigraphie » sera d'ailleurs repris avec quelques modifications par B. Russell. C'est avec ce langage que Peano et ses élèves vont écrire, de 1894 à 1908, le fameux « Formulaire de Mathématiques » qui préfigure les fascicules de N. Bourbaki, et qui traite successivement de logique, des fondements de l'arithmétique, de l'analyse et de la géométrie, et dont une partie est consacrée aux vecteurs. Auparavant, Peano s'est intéressé à l'élaboration de formalismes intrinsèques. En 1887, il publie un livre intitulé « Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale » dans lequel il évoque les idées de Grassmann. En 1888, il consacre à l'Audehnungslehre un livre entier le « Calcolo geometrica secundo l'Audehnungslehre di H. Grassmann », dans lequel va apparaître la première définition axiomatique d'un espace vectoriel, sans restriction de dimension, ainsi que celle d'application linéaire sous une forme moderne.

Après un premier chapitre consacré aux fondements de la logique déductive, Peano présente la théorie de Grassmann en la limitant au cadre de la géométrie de l'espace à trois dimensions. Les définitions qui nous intéressent n'apparaissent que dans le dernier chapitre de l'ouvrage, sous les noms respectifs de « Système linéaire » et de « Transformations linéaires ». Voici la définition donnée par Peano d'un système linéaire :

« Il existe des systèmes d'êtres pour lesquels sont données les définitions suivantes[35] :

---

[34] Voir l'article qui est consacré à Peano dans l'Encyclopædia Universalis, écrit par G. Glaeser.

[35] Peano utilise le signe « = » à la fois pour désigner l'égalité et pour marquer une équivalence, le symbole « < » pour désigner une implication et « $\cap$ » pour désigner le « et ». Ces notations ont été introduites dans le premier chapitre.

1 – Il est défini l'égalité de deux êtres **a** et **b** du système c'est-à-dire qu'il est défini une proposition, indiquée par **a=b**, qui exprime une condition pour que deux êtres du système, satisfaite par certains couples d'êtres et pas par d'autres, et qui satisfait aux équations logiques :

$$(\mathbf{a}=\mathbf{b}) = (\mathbf{b}=\mathbf{a}),\ (\mathbf{a}=\mathbf{b})\cap(\mathbf{b}=\mathbf{c}) < (\mathbf{a}=\mathbf{c}).$$

2 – Il est défini la somme de deux êtres **a** et **b**, ce qui veut dire qu'il est défini un être, indiqué par **a+b**, qui appartient aussi au système donné, et qui satisfait aux conditions :

$$(\mathbf{a}=\mathbf{b}) < (\mathbf{a}+\mathbf{c} = \mathbf{b}+\mathbf{c}),\ \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

Et la valeur commune des deux membres de la dernière égalité sera indiquée par **a+b+c**.

3 – Étant donné **a** un être du système, et m un nombre entier et positif, avec l'écriture **ma** nous entendons la somme de m êtres égaux à **a**. Il est facile de reconnaître étant donnés **a, b** ... des êtres du système, *m*, *n* , ... des nombres entiers positifs, que

$$(\mathbf{a}=\mathbf{b}) < (m\mathbf{a}=m\mathbf{b})\ ;\ m(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = m\mathbf{a} + m\mathbf{b}\ ;\ (m+n)\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a}\ ;\ 1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Nous supposons qu'il soit attribué une signification à l'écriture *m***a**, quel que soit le nombre réel *m*, de façon à ce que les équations précédentes soient encore satisfaites. L'être *m***a** sera dit produit du nombre (réel) *m* par l'être **a**.

4 - Enfin nous supposons qu'il existe un être du système, que nous dirons être nul, et que nous indiquerons par 0, tel que, quel que soit l'être **a**, le produit du nombre 0 par a donne toujours l'être 0, ou 0**a** = 0.

Si à l'écriture **a – b** on attribue la signification **a** + (–1)**b** on déduit :

$$\mathbf{a} - \mathbf{a} = 0\ ;\ \mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}.$$

DÉF. Les systèmes d'êtres pour lesquels sont donnés les définitions 1, 2, 3, 4 , de façon que soient satisfaites les conditions imposées, sont dits *systèmes linéaires.* ».

On y trouve la marque personnelle d'une conception de la nature des mathématiques en terme de logique et d'axiomatisation qui est assez éloignée de celle de Grassmann : rappelons que ce dernier s'appuie sur la théorie des formes (aspect formel) et sur un mode de génération original (aspect réel).

Peano remarque explicitement que sa définition comprend des systèmes linéaires de dimension infinie, et il donne comme exemple l'espace de tous les polynômes à coefficients réels. En revanche, sa définition de la dimension dans le cas où cette dernière est finie est ambiguë : il admet implicitement que si *n* désigne le nombre maximum d'éléments indépendants, *n* désigne aussi le nombre minimum d'éléments pour engendrer le système linéaire[36].

Cette approche des espaces vectoriels réalisée par Peano n'eut guère de succès et c'est seulement lorsque les développements de l'analyse fonctionnelle rendront

[36] Voir « L'enseignement de l'Algèbre linéaire en question » , coordonné par J.L Dorier, Éditions la Pensée Sauvage - 1996.

nécessaire l'abandon de la méthode des coordonnées que la définition directe d'un espace vectoriel s'imposera, même dans le cas de la dimension finie. Ce changement d'attitude, comme le signale J. Dieudonné dans son « Abrégé d'Histoire des mathématiques »[37] n'eut vraiment lieu qu'après 1930, et il l'explique ainsi : en analyse fonctionnelle, on est amené à s'intéresser à des formes linéaires (en général soumises à des conditions de continuité) sur un espace fonctionnel E (de dimension infinie en général), formes linéaires que l'on ne peut pas, en général, identifier à des éléments de E. Si l'on veut s'inspirer de ce point de vue en algèbre linéaire élémentaire, on est conduit à se placer, comme l'avait fait Peano, dans un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, où l'on ne suppose pas que l'on a choisi une base particulière.

Pourtant des travaux précurseurs en analyse avaient été entrepris dans les années 1890-1901 par Pincherle qui utilise des « espaces linéaires » ayant un nombre infini mais dénombrable de dimensions, ainsi que des opérateurs sur ces espaces, généralisant les « homographies » (applications linéaires) dans les espaces linéaires ayant un nombre fini de dimension. Ces travaux n'auront cependant guère d'influence avant 1920, car il assimile une fonction à son développement en série. Les techniques nouvelles qu'il considère paraissent à ses contemporains inutilement formalistes, alors qu'on dispose d'outils et de méthodes bien rodés sur les développements en série, consistant à généraliser en ce qui les concerne ceux utilisés pour les développement limités (finis). Nous renvoyons à l'article de J.L. Dorier dans l'ouvrage « L'enseignement de l'algèbre linéaire en question » pour le détail du contenu de l'ouvrage de Pincherle « Le operazioni Distributive e le loro applicazioni all' analisi » (1901) , qui s'avère très moderne et qui comprend une étude complète des espaces vectoriels de dimension finie, comblant d'ailleurs les lacunes de celle de Peano en ce qui concerne la définition de la dimension.

1.10 L'émergence du système moderne d'Analyse vectorielle (1894-1910)

La polémique des années 1890-1894 a contribué, comme nous l'avons vu au 1.7, à faire connaître le système de Gibbs-Heaviside. Mais à cette date, il n'était pas encore largement accepté par la communauté scientifique. Durant les années 1894-1910, plus de 1 000 articles y faisant allusion parurent ; de nombreux ouvrages vont reprendre ce système vectoriel, et certains d'entre eux seront réédités rapidement, ce qui prouve leur succès et leur influence. La plus grande partie d'entre eux sera écrite dans la tradition Hamilton-Tait-Maxwell-Gibbs-Heaviside.

[37] Hermann - 1978.

Nous présentons ci-dessous brièvement certaines de ces publications[38], et nous détaillerons ensuite celles d'entre elles qui ont eu une influence importante en France puisqu'elles ont très vite été traduites dans notre langue : leurs auteurs en sont les italiens Burali-Forti et Marcolongo d'une part et l'américain J.G. Coffin d'autre part.

Auteur	Année	Titre	Sujets abordés	Commentaires
August FÖPPL (Physicien)	1894 2ème éd. en 1904 3ème éd. en 1907	Einfürung in die Maxwell Therie des Elektricität	Théorie de Maxwell Interprétation, dans ce cadre, de la fameuse expérience de Hertz Présentation de la fonction linéaire et de la théorie du potentiel	Première publication en allemand des théories de Maxwell utilisant les méthodes vectorielles de Heaviside. Ne fait allusion ni au système de Grassmann ni à celui de Gibbs.
August FÖPPL	1897-1900	Vorlesungen über technische Mekanik	Mécanique traitée avec l'analyse vectorielle	
Edwin Bidwell WILSON Mathématicien	1901	Vector Analysis : A Text Book for the Use of Students of Mathematics and Physics Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs	Contenu du cours de Gibbs. Dans certains chapitres, utilisation de l'ouvrage de Heaviside "Electromagnetic Theory" et de l'ouvrage de Föppl.	Premier livre entièrement consacré à la présentation de l'analyse vectorielle moderne. Fait l'objet de nombreuses critiques aux États-Unis, en France et en Allemagne
Alfred Heinrich BUCHERER Physicien	1903 2ème éd. en 1905	Elemente der Vektor-Analysis mit Beispielen aus der theoretischen Physik	Addition, multiplication, différentiation des vecteurs, théorie du potentiel, théorèmes de transformation. La fonction linéaire n'est pas abordée. Applications : Mécanique Hydrodynamique Électricité	• Premier livre en Allemand sur l'analyse vectorielle moderne. Utilise le système vectoriel de Föppl (Heaviside), avec quelques emprunts à Grassmann (association de vecteurs et des surfaces). • Avec seulement un changement de notation se conformant à celle de l'Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften.

[38] Notre source à leur sujet est encore l'ouvrage de M. J. Crowe.

Auteur	Année	Titre	Sujets abordés	Commentaires
Richard GANS Physicien	1905 2ème éd. en 1909 7ème éd. en 1950	Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik.	Mêmes sujets que dans le BUCHERER Introduction des tenseurs et de la fonction linéaire.	Utilise les notations de l'Encyclopädie (Lorentz - Abraham) Traduit en Anglais et en Espagnol.
Eugen JAHNKE Mathématicien d'origine	1905 aucune autre édition, aucune traduc-tion	Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik	Les notations employées sont un mélange de celles de Grassmann et de celles de Föppl. 1ère partie: "Vecteurs dans le plan" – addition, soustraction de points – vecteurs libres (soustraction de points) – vecteurs liés (multiplication de points) – applications en physique et géométrie – produit scalaire (produit intérieur) – produit extérieur de Grassmann - produit régressif 1ère partie: "Vecteurs dans l'espace" – mêmes sujets avec une attention particulière pour l'analyse ponctuelle. – différentiation des vecteurs. Influence de la tradition Hamilton-... - Heaviside dans l'emploi des termes : gradient, curl, divergenz, lineare Vektorfunktion.	S'inscrit dans le cadre de la tradition de Grassmann, mais est indirectement influencé par l'autre tradition. Dans la préface, l'auteur compare les deux traditions : alors que celle de Hamilton - Heaviside est utile pour les applications en physique, mais peu pour la géométrie, celle de Grassmann lui paraît être féconde pour les deux. Wilson trouve que cet ouvrage constitue une excellente introduction à l'algèbre multiple, mais pas davantage. Jules Tannery en fait une critique positive en décrivant en détail son contenu. Tentative d'introduire une version révisée du système de Grassmann, qui se solde par un échec.

Auteur	Année	Titre	Sujets abordés	Commentaires
Pavel Osipovich SOMOFF (ou SOMOV) Ménanicien et mathématicien	1907	Analyse vectorielle et ses applications	Traite à la fois les aspects élémentaires et plus avancés, tels que la fonction linéaire. Exemples en mécanique. Brèves incursons dans d'autres systèmes d'analyse vectorielle (Möbius, Hamilton)	Premier livre en Russie sur le sujet. S'affiche comme s'inscrivant dans la tradition de Maxwell, Heaviside, Gibbs, Föppl.
Siegfried VALENTINER Physicien	1907 2ème éd. en 1912	Vektoranalysis	Livre écrit à l'intention des physiciens : les applications à l'électricité et à la mécanique occupent presque la moitié du livre. Par rapport à ceux de Bucherer et Gans, il introduit la fonction linéaire dans la tradition de Gibbs.	Écrit dans la tradition de Heaviside et intègre l'apport de Gibbs.
IGNATOWSKI Physicien	1909-1910 Une 3ème éd. est publiée en 1926.	Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik.	1ère partie : – algèbre et analyse vectorielle. – coordonnées curvilignes. – tenseurs.	L'auteur évite d'utiliser les décompositions à l'aide de *i*, *j*, et *k* pour démontrer les théorèmes
	1898-1935	Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihren Auswendungen	<u>Partie Géométrie</u> (après 1915) – système de Grassmann, de Hamilton (traitement complet) – traitement plus succint de celui de Möbius.	
H.E. TIMERDING	1902		<u>Partie mécanique</u> – présentation du système de Grassmann	
M. ABRAHAM	1901		– présentation de l'analyse vectorielle en suivant Grassmann et Gibbs-Heaviside.	
H.E. LORENTZ (danois)	1903		<u>Partie Electricité et Optique</u> écrite dans le système de Gibbs - Heaviside	L'analyse vectorielle y est beaucoup employée. Les articles relatifs à l'électricité ont beaucoup été lus.
R. GANS	1906		<u>Partie Electrostatique et Magnétostatique</u>	

Nous allons maintenant détailler davantage l'analyse des premières publications en français, en les considérant dans l'ordre chronologique de leur publication.

Les ouvrages de Burali-Forti et Marcolongo.

Cesare Burali-Forti (1861-1931), mathématicien d'origine, a été professeur à Turin (comme Peano). Roberto Marcolongo (1862-1943) est physicien, professeur à Naples. Le premier livre de Burali-Forti consacré à l'analyse vectorielle date de 1897 : son titre « Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann » indique clairement celles des deux traditions à laquelle il se réfère ; l'influence de Peano dans ce choix semble très probable. Une des premières publications commune de Burali-Forti et Marcolongo, écrite à l'occasion du 4ème Congrès International des Mathématiciens qui eut lieu à Rome en 1908, était consacrée à une étude des origines des différentes notations utilisées en analyse vectorielle. Ils la concluaient par la proposition d'un nouveau système de notations, système qu'ils ont utilisé dans leurs ouvrages ultérieurs. La question des notations était celle sur laquelle se cristallisait les différences entre les deux traditions, et comportait des aspects polémiques. Il est probable que l'accueil réservé à leur ouvrage de 1909 en ait souffert. (Il ne fit l'objet d'aucune réédition.).

L'ouvrage de 1909-1910 : Éléments de calcul vectoriel.

Cet ouvrage est le premier traité italien de calcul vectoriel ; son titre « Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometrica, alla mecanica e alla fisica-matematica » en décrit globalement le contenu. Ce livre a été traduit dès 1910 en français par S. Lattès, et publié par la librairie scientifique Hermann. Dans la préface, les auteurs précisent leurs intentions.
« Dans la première partie du livre que nous présentons au public mathématique, nous exposons systématiquement, et sous une forme absolue, autonome, les fondements du calcul vectoriel en n'introduisant que les éléments suivants : *nombres réels, points, vecteurs, formes de première espèce de Grassmann (ou barycentres de Möbius)* ; nous indiquons les applications immédiates de ce calcul à des questions de géométrie bien connues, en cherchant surtout à bien montrer comment l'usage opportun des vecteurs et de composantes vectorielles permet de présenter la géométrie analytique sous une forme géométrique absolue et d'éliminer tout cet algorithme indirect qui, né avec les coordonnées, doit disparaître nécessairement dès qu'il devient possible d'envisager les éléments géométriques en dehors de tout système fixe de référence.

Dans la deuxième partie nous donnons des applications de ce système vectoriel, que nous pouvons appeler système vectoriel *minimum* ; nous développons quelques questions de géométrie différentielle, de mécanique et de physique mathématique : nous les avons choisies exprès parmi les questions bien connues, afin de montrer la supériorité énorme du calcul vectoriel absolu sur les méthodes anciennes et indirectes des coordonnées.

Il se trouve que le système vectoriel minimum développé par nous a un champ très vaste d'applications, en géométrie, en physique et en mécanique. Il est certainement insuffisant pour d'autres questions et il y a lieu de le compléter par l'étude d'éléments géométriques ou de nombres, fonctions d'un point, des dérivées de ces éléments par rapport au point dont ils sont des fonctions, et des formes géométriques de seconde et de troisième espèce de Grassmann.

Sous les aspects que nous venons d'indiquer, notre livre est le premier traité italien de calcul vectoriel. Il diffère profondément, par la méthode et par les notations, de tous les traités publiés antérieurement dans ces dernières années, surtout en Allemagne [Bucherer, Gans, Jahnke, Valentiner et Ingatowski sont cités en note en bas de page]. Il en diffère par la méthode, car notre but est d'opérer d'une façon absolue sur les éléments géométriques, tandis que d'habitude les vecteurs, et les opérations sur les vecteurs, apparaissent simplement comme des abréviations d'écriture, des tachygraphes des coordonnées. Il en diffère par les notations, car les notations rationnelles que nous adoptons sont conformes, presque dans leur totalité, aux notations proposées par les fondateurs du calcul vectoriel. Pour la genèse et l'histoire de nos notations – que nous voyons adopter avec un véritable plaisir par plusieurs de nos collègues, dans leur enseignement – nous renvoyons le lecteur aux notes placées à la fin du livre et aux notes, plus étendues, publiées par nous dans les Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

La connaissance des méthodes vectorielles s'impose désormais, non seulement aux physiciens et aux électrotechniciens, mais encore à ceux qui cultivent les Mathématiques pures. Puisse ce livre, paru dans l'année où l'Allemagne célèbre le premier centenaire de la naissance de Grassmann, contribuer à répandre et à faire connaître les méthodes de ce grand mathématicien, but auquel nous travaillons, avec foi et constance, depuis plusieurs années ; puisse-t-il couronner l'œuvre commencée chez nous avec tant de talent par M. Peano ! ».

L'importance qu'ils accordent aux notations est soulignée encore dans la préface de l'édition française, et l'aspect polémique y est encore visible à travers la justification de leurs choix :

« Nous tenons beaucoup à faire remarquer explicitement que les notations adoptées par nous concordent pleinement, aussi bien pour la substance que pour la forme, avec les notations de Möbius, de Hamilton et de Grassmann. En substance, elles concordent aussi avec les notations de Gibbs ; mais il y a une différence dans la forme, parce que

Gibbs emploie le signe x pour le produit vectoriel, signe déjà adopté par Grassmann (qui a droit à la priorité) pour le produit intérieur (ou scalaire). Nos notations ne détruisent donc pas un glorieux passé, et, comme elles fournissent un calcul semblable au calcul algébrique, elles n'hypothèquent pas l'avenir. ».

Le système vectoriel minimum dont parle les auteurs dans la préface est traité dans la première partie, qui comporte 6 chapitres dont voici les titres :
Ch1 : Somme. Produit par un nombre
Ch2 : Calcul barycentrique
Ch3 : Produit vectoriel et produit intérieur
Ch4 : Rotations dans le plan
Ch5 : Fonctions de nombres (c'est-à-dire fonctions vectorielles de la variable réelle)
Ch6 : Fonctions de points

Nous détaillerons dans la quatrième partie de notre travail le contenu précis des deux premiers chapitres et du quatrième. Dans l'immédiat, soulignons les points de préoccupation des auteurs (qui, nous le verrons, évoquent des questions qui étaient brûlantes dans l'enseignement de ces questions en France, il y a une trentaine d'années) .
– ils insistent sur le fait que dans le calcul algébrique portant sur les points, les vecteurs, les nombres, les barycentres, certaines règles du calcul algébrique « ordinaire » sont respectées. Par exemple, de l'égalité B – A = C – D, on peut déduire les autres égalités D – A = C – B, A – B = D – C, ..., en faisant comme si A, B, C, D étaient des nombres (alors qu'ils désignent ici des points).
– ils souhaitent être le plus précis possible du point de vue des objets mathématiques définis et critiquent certaines façons de parler car, compte tenu des conventions langagières usuelles, elles font apparaître des contradictions. Par exemple, voici le texte d'une note en bas de page relative à la distinction entre vecteur et segment, et les moyens langagiers d'en rendre compte :
« Il est important de noter la différence essentielle qui existe entre un *segment* (dans le sens ordinaire du mot, *classe de points*) et un *vecteur*.
Un *segment* est un élément déterminé par deux points ; un *vecteur* est déterminé par deux points et par un sens. Un segment a une *longueur* (distance de ses extrémités) et une *direction* (celle de la droite qui le porte), mais il ne possède pas de *sens* (les deux points déterminent deux sens différents) : un vecteur a une *longueur*, une *direction* et un *sens*. Un segment a une position déterminée : un vecteur ne possède pas de position déterminée, car l'égalité $\boldsymbol{a}$ = B – A est vérifiée pour une infinité de couples de points A et B.
On dit assez souvent que « un vecteur est un segment dans lequel on considère la *grandeur*, la *direction*, et le *sens* ». Mais on peut objecter :

1° que si « un vecteur est un segment ... », il ne cessera pas d'être un segment *sous quelque aspect qu'on l'envisage*, et on a vu qu'un vecteur n'est pas un segment ;
2° qu'en admettant que le mot *considérer* signifie « donner au segment les éléments ... », il est impossible d'assigner un sens au segment ainsi qu'on l'a vu. La phrase est donc, pour le moins, très défectueuse. »
De même, la note en bas de page suivante critique l'emploi des mots « origine » et « extrémité ».
« On donne d'habitude aux points A et B les noms respectifs d'*origine* et d'*extrémité* du vecteur B – A. Soit alors

$$B - A = D - C \text{ et } A \neq C\ ;$$

on devra avoir aussi

$$\text{origine de } (B - A) = \text{origine de } (D - C)$$

parce que les deux vecteurs étant identiques « toute propriété de l'un appartient à l'autre » ; par suite, A = C, contrairement à l'hypothèse. Il résulte de là que les phrases « *origine de* ***a*** », « *extrémité de* ***a*** », dans le sens usuel, sont dépourvues de sens.
Les mots « *origine* » et « *extrémité* », pour un vecteur, peuvent s'introduire dans des phrases telles que les suivantes :
« *extrémité* d'un vecteur ***a***, dont A est l'origine » = A + ***a***
« *origine* d'un vecteur ***a***, dont A est l'extrémité » = A – ***a***. ».

– Enfin, il convient de remarquer que le livre ne comporte aucun exercice proposé au lecteur. De plus, en ce qui concerne les premiers chapitres – sur lesquels nous reviendrons dans notre quatrième partie – le seul endroit où des exemples d'application à la géométrie élémentaire sont traités par les auteurs est le chapitre II, consacré au calcul barycentrique. Les auteurs montrent alors que les points remarquables du triangle (centre de gravité, centre des cercles inscrit, circonscrit, exinscrits) sont des barycentres des sommets affectés de coefficients convenablement choisis.

Enfin, l'ouvrage se termine par une note critique sur les définitions par abstraction. Dans cette dernière, les auteurs reviennent sur la définition des vecteurs, celle qui a été donnée au départ n'étant pas « régulière » (au point de vue logique). Les auteurs introduisent, avec un vocabulaire un peu différent, les relations d'équivalence, les classes d'équivalence, la surjection canonique et une notation nouvelle pour la propriété (le point milieu entre A et D = le point milieu entre B et C) qui est la suivante : (A, B) α (C, D). Cette relation (qu'on appelle équipollence, compte tenu des travaux de Bellavitis) est une relation d'équivalence, et l'image de (A, B) par la surjection canonique associée est le vecteur B – A. Les auteurs signalent que c'est par volonté de ne pas trop s'éloigner de la forme usuelle des définitions qu'ils ont écrit B – A = D – C au lieu de (A, B) α (C, D), commettant ainsi un abus dans l'emploi du signe « = » tel que l'a codifié Leibniz, abus dont ils ont tenu à informer leurs lecteurs dans cette « note critique ».

Ces remarques sonnent avec un bruit particulièrement familier aux oreilles d'un professeur ayant enseigné dans le secondaire en France il y a quelques années. En revanche, il est loin d'en être de même pour la suivante.

– les auteurs distinguent les longueurs de leurs mesures, et créent un ostensif pour cela. « Le module du vecteur $\boldsymbol{a}$, que l'on note "mod$\boldsymbol{a}$ " est le nombre positif ou nul qui mesure, avec une unité donnée, la longueur du vecteur $\boldsymbol{a}$ ». Après avoir défini le produit d'un vecteur par un nombre, ils établissent explicitement une relation entre les modules des vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{i}$ tel que $\boldsymbol{a} = x\,\boldsymbol{i}$ et le nombre réel x. Pour cela, ils montrent que les vecteurs $(\mathrm{mod}\boldsymbol{a})\boldsymbol{i}$ et $(\mathrm{mod}\boldsymbol{i})\boldsymbol{a}$ ont même longueur et même direction, et donc qu'ils sont égaux ou opposés, puis en déduisent que $x = \pm\dfrac{\mathrm{mod}\boldsymbol{a}}{\mathrm{mod}\boldsymbol{i}}$.

L'ouvrage de 1912-1913 : Transformations linéaires.

En 1912, Burali-Forti et Marcolongo, dans une collection intitulée « Analyse vectorielle générale » publient, chez Hermann, le premier tome d'un ouvrage consacré aux transformations linéaires ; le deuxième tome, consacré aux applications à la mécanique et à la physique est publié un an plus tard. Nous porterons notre attention sur le tome 1, qui contient de nombreux objets mathématiques en rapport avec ceux qui sont enseignés (ou qui l'ont été récemment) dans le Secondaire, ou dans le premier cycle du Supérieur en France.

Dans la préface, les auteurs précisent que, dans cette collection, les sujets suivants seront traités : mécanique, physique mathématique, géométrie différentielle ; le point commun étant l'usage des « méthodes simples et rapides du moderne calcul vectoriel intrinsèque ». Plus loin , ils ajoutent :

« C'est l'opinion de plusieurs, y compris ceux qui font usage des méthodes vectorielles ordinaires, que : *le calcul vectoriel ait nécessairement besoin des coordonnées cartésiennes et que la concision bien connue du calcul vectoriel soit due, en substance, au fait qu'on indique par une seule lettre une expression complexe.*

En réalité, les calculs vectoriels ordinaires sont des *tachygraphes des coordonnées cartésiennes*, et ainsi l'opinion que nous venons d'indiquer est la conséquence nécessaire et logique d'un fait réel. Mais il est possible d'envisager le calcul vectoriel d'une tout autre manière. Notre calcul diffère substantiellement des calculs ordinaires en ce qu'il *peut opérer directement sur les éléments géométriques et physiques, sans avoir jamais besoin de recourir à aucune coordonnée*. Notre calcul peut ainsi s'appeler *intrinsèque*, ou *absolu*, ou *autonome*.

Les avantages que l'on obtient du calcul intrinsèque sont fort considérables. Nous allons en indiquer le plus important. Pour traiter des questions de *Physique*, de *Mécanique* et de *Géométrie*, il n'est plus nécessaire de recourir à ces artifices spéciaux dépendant du choix des coordonnées, auquel on doit, paraît-il, dans les expositions classiques et dans les actuelles, le succès de toutes recherches. En voici [un] exemple remarquable.

Dans le mémoire « Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible », M. W. Stekloff a obtenu des résultats importants moyennant un double système d'axes de coordonnées (l'un fixe, l'autre mobile) et de très longs calculs, dont une petite partie seulement est développée dans le texte. M. Boggio a obtenu, et sous une forme très simple, les mêmes résultats sans faire usage d'axes et par des calculs très courts, entièrement développés dans sa note. L'*ellipsoïde*, qui apparaît dans la question, n'a plus besoin d'être donné au moyen de son équation ; mais, représenté par son *homographie indicatrice*, il est lui-même introduit directement dans le calcul. Dans la note de M. Boggio le succès est dû à *l'absence complète d'axes de coordonnées et à l'introduction directe dans le calcul des éléments sur lesquels on doit opérer*, et non pas à un choix spécial d'éléments de référence. ».

Les auteurs renvoient le lecteur à la longue bibliographie pour d'autres exemples montrant la fécondité de telles méthodes, parmi lesquels on trouve des travaux de Burali-Forti en géométrie différentielle (démonstration du théorème de Gauss relatif à la courbure totale), ainsi que de nombreux travaux en Physique de T. Levi-Civita, dont nous aurons l'occasion de reparler bientôt.

L'introduction au chapitre I, qui comporte dix pages, traite des systèmes et opérateurs linéaires (en langage moderne : espaces vectoriels et applications linéaires). En voici le plan, et sa « traduction » en langage moderne :

1 - Systèmes linéaires	1 - Espaces vectoriels sur **R**
2 - Dimension d'un système linéaire	2 - Dimension d'un espace vectoriel
3 - Opérateurs	3 - Applications
4 - Opérateurs linéaires d'un système U dans un système U'	4 - Applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel E'
5 - Substitutions	5 - Endomorphismes
6 - Somme et produit d'opérateurs linéaires	6 - Espace vectoriel des endomorphismes
7 - Puissances des substitutions	7 - Puissances d'un endomorphisme
8 - Opérateurs linéaires alternés	8 - Applications n-linéaires alternées
9 - Opérateurs linéaires pour 2 ou 3 vecteurs	9 - idem avec $n = 2$ ou $n = 3$

La définition d'un système linéaire est la suivante :

Soit U une classe, soient a, b, c, ... des éléments quelconques de cette classe et m, n, ... des nombres réels. Soit définie la **somme** $a + b$ de deux éléments quelconques de U et le **produit**, ma, ou am, d'un élément (a) quelconque de U par un nombre réel (m), de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :
(1) $a + b$ est un élément déterminé de U.
(2) Il existe un élément de U, et on l'indique par 0 (zéro), nul par rapport à l'addition +, c'est-à-dire tel que, a étant un élément quelconque de U, $a + 0 = a$.
(3) $a + b = b + a$.
(4) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(5) $a + c = b + c$ équivaut à $a = b$.
(6) ma (ou am) est un élément déterminé de U.
(7) $ma = 0$ équivaut à $a = 0$ ou $m = 0$.
(8) Si $m \neq 0$, $ma = mb$ équivaut à $a = b$.
Si $a \neq 0$, $ma = na$ équivaut à $m = n$.
(9) $m(a + b) = ma + mb$; $(m+ n)a = ma + na$.
On exprime brièvement toutes ces conditions en disant que : les U forment un système **linéaire** par rapport à l'addition +.
Si U est un système linéaire par rapport à l'addition +, on pose, $-a = (-1)\ a$, $a - b = a + (-b)$ et pour U on a l'algorithme algébrique des opérations somme, différence, produit par un nombre réel.

Cette définition est moins complète que celle de Peano (absence de $1.u = u$), et comporte quelques redondances, mais elle figure au début du traité, alors que chez Peano, elle n'apparaissait qu'à la fin.

Le chapitre I est consacré aux homographies vectorielles, c'est-à-dire aux endomorphismes de l'ensemble des vecteurs de l'espace tridimensionnel. Les notions de vecteur propre et de valeur propre d'une homographie α ne sont pas clairement dégagées : ces deux notions sont remplacées par ce que les auteurs appellent une « direction double », c'est-à-dire la direction d'un vecteur u non nul tel qu'il existe un nombre réel m (éventuellement nul) tel que $\alpha u = mu$. Il est démontré que toute homographie admet au moins une direction double (tout endomorphisme de R^3 admet au moins une valeur propre). Les homographies simples qui y sont évoquées sont les suivantes :

	Notation moderne
Homothétie vectorielle (ou nombre réel) $\alpha x = mx$	$h(u) = ku$
Homographie axiale (de vecteur u), noté $\alpha = u \wedge$ $\alpha x = u \wedge x$	application linéaire l qui à u associe $l(u) = a \wedge u$
Dyade notée $\mathrm{H}(u, v)$. $\mathrm{H}(u, v)x = u \times x.\ v$	Application linéaire l qui à u associe $\mathrm{l(u)} = (a.u)b$; $a.u$ désignant le produit scalaire de a par u.
Dilatation α : homographie telle que , quels que soient x, y $x \times \alpha y = y \times \alpha x$.	Endomorphisme symétrique l tel que quels que soient u et v, $u.\ l(v) = v.\ l(u)$.

Puis les auteurs définissent plusieurs opérateurs agissant sur les homographies. D'abord des opérateurs numériques, c'est-à-dire associant un nombre réel à toute homographie α.

Ainsi $\mathrm{I}_1\alpha$ est le nombre réel tel que quels que soient les vecteurs u, v, w :

$\mathrm{I}_1\alpha\ [u, v, w] = [v, w, \alpha u] + [w, u, \alpha v] + [u, v, \alpha w]$, dans lequel $[u, v, w]$ désigne le produit mixte $(u \wedge v).\ w$.

$\mathrm{I}_1\alpha$ n'est autre que la trace de α.

$\mathrm{I}_3\alpha$ est le nombre réel tel que quels que soient u, v, w

$\mathrm{I}_3\alpha\ [u, v, w\ ] = [\alpha u, \alpha v, \alpha w]$. C'est donc le déterminant de α.

Plus loin, il est démontré que $\mathrm{I}_1\alpha$, $\mathrm{I}_2\alpha$, $\mathrm{I}_3\alpha$ sont tels que $\alpha^3 - (\mathrm{I}_1\alpha)\alpha^2 + (\mathrm{I}_2\alpha)\ \alpha - \mathrm{I}_3\alpha = 0$ (théorème de Cayley Hamilton), autrement dit, les $\mathrm{I}_j\alpha$ sont au signe près les coefficients de son polynôme caractéristique.

Autres opérateurs

D'autres opérateurs sont définis dans le but de pouvoir décomposer (de manière unique) toute homographie α sous forme de la somme d'une dilatation $\mathrm{D}\alpha$ et d'une homographie axiale $\mathrm{V}\alpha \wedge$.

$\mathrm{V}\alpha$ est un vecteur associé à l'homographie α, $\mathrm{D}\alpha$ est une homographie associée à α.

$\mathrm{K}\alpha$ désigne l'homographie que l'on appelle en langage moderne l'adjoint de α, et que les auteurs appellent ici la conjuguée de α. On a alors :

$$\alpha = \mathrm{D}\alpha + \mathrm{V}\alpha \wedge \quad \text{et} \quad \mathrm{K}\alpha = \mathrm{D}\alpha - \mathrm{V}\alpha \wedge .$$

On en déduit que α est une dilatation si et seulement si $V\alpha$ est égal à 0, et que α est une homographie axiale si et seulement si $D\alpha$ est égal à 0. En termes imagés, $D\alpha$ est l'unique « partie » de α qui soit une dilatation.

Des résultats fondamentaux sont alors démontrés. Par exemple, pour toute dilatation α , il existe au moins un système orthogonal dextrorum i, j, k tel que les directions de i, j, k soient des directions doubles pour α. Les auteurs appellent « terne principal » un tel triplet i, j, k. (En langage moderne, pour tout endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres.). Or, on peut démontrer que, pour toute homographie α, la composée $K\alpha.\,\alpha$ de α suivie de $K\alpha$ est une dilatation, et donc, elle admet un terne principal, dont on peut démontrer que c'est un terne principal de α .

Quadrique indicatrice d'une homographie

α désignant une homographie, la quadrique indicatrice de α par rapport à un point O et à un nombre k est l'ensemble des points P tels que le produit scalaire du vecteur $P - O$ et de son image par α soit égal à k.

$$(P - O) \times \alpha (P - O) = k.$$

Le titre 7 de ce chapitre I est intitulé « Isométries et similitudes vectorielles ». Les isométries vectorielles sont définies comme les homographies ne faisant pas varier la longueur (ou le module) d'un vecteur. Diverses caractérisations en sont démontrées :

• α est une isométrie vectorielle si et seulement si α est une homographie telle que $(\alpha u)^2 = u^2$, u étant un vecteur arbitraire, ou ce qui est équivalent, si, en fixant arbitrairement les vecteurs u et v, $\alpha u \times \alpha v = u \times v$.

• α est une isométrie vectorielle si et seulement si $K\alpha = \alpha^{-1}$.

Enfin, une classification des isométries vectorielles (en dimension 3) est donnée. Un travail analogue est fait pour les similitudes vectorielles (dans l'espace tridimensionnel).

Le chapitre II est consacré à l'analyse vectorielle : différentiation, opérateurs différentiels, grad, div, rot, intégrales et formules de transformations (Green, Gauss), équations différentielles. Il occupe 30 pages (sur 139).

L'appendice

Le livre se termine par un appendice de 15 pages comportant plusieurs parties.
* Une discussion justifiant les notations adoptées : on voit que, pour les auteurs, la question des notations est cruciale.
* Une discussion sur les mérites comparés, aux yeux des auteurs, des quaternions de Hamilton, des dyades de Gibbs et des homographies telles qu'ils les ont présentées. À ce sujet, l'extrait suivant est très éclairant, et permet de mieux comprendre la portée des déclarations faites sur ce sujet dans la préface :
« La décomposition univoque d'une homographie dans la somme d'une dilatation avec une homographie axiale, correspond à la décomposition, bien connue d'une déformation infiniment petite en deux autres, une déformation pure (la dilatation) et un mouvement de corps solide (l'homographie axiale). On comprend donc facilement que si nous avons placé à la base des homographies générales les dilatations et les homographies axiales, cela n'est pas par un acte arbitraire, ou purement formel-algébrique, mais simplement ce qui doit être fait pour tirer des homographies tous les éléments physiques et mécaniques qui sont nécessaires dans les applications. (...) ».
* Une traduction au moyen de coordonnées cartésiennes des résultats relatifs aux homographies. Une base orthonormale directe i, j, k étant introduite, une homographie est déterminée par un « tableau-déterminant », analogue à sa matrice dans cette base. Les auteurs montrent que celui de $K\alpha$ s'obtient en échangeant le rôle des lignes et des colonnes. Quant à $I_3\alpha$ c'est le déterminant de ce « tableau ».
* Une traduction des formules intrinsèques obtenues précédemment à l'aide d'un système mélangeant les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point, mais aussi des vecteurs, système que les auteurs qualifient de « tachygraphe–cartésien–vectoriel ». Ils obtiennent alors (et alors seulement !) les formules analytiques de l'analyse vectorielle.

Les notes géométriques

L'appendice évoqué ci-dessus est suivi de plusieurs notes géométriques rédigées par le mathématicien Mario Pieri, professeur à l'université de Parme.

La première a pour but de donner une représentation géométrique d'une homographie vectorielle (application linéaire) en termes de géométrie projective, supposée bien connue du lecteur, dans le but de l'aider à interpréter, à visualiser les résultats obtenus sur ces êtres nouveaux que sont les homographies vectorielles.

Il va donc être question des homographies du plan projectif (que M. Pieri appelle homographies « ordinaires » ou encore collinéations), qui transforment tout

système de points alignés en d'autres points alignés. Pour cela, Pieri évoque « les affinités de l'espace dont le caractère spécifique est celui de changer des droites parallèles en des droites parallèles, et de représenter par suite le plan de l'infini sur lui-même, point par point, suivant une homographie ordinaire ». Puis il poursuit ainsi :
« Comme une telle correspondance doit changer nécessairement les segments équipollents en segments équipollents, il s'ensuit que chaque affinité de l'espace transforme les vecteurs en vecteurs suivant une *homographie vectorielle*. En effet, toute affinité qui représente les points A, B, C, ... par des points A', B', C', ... fera correspondre à l'ensemble des segments équipollents à un même segment orienté $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire au vecteur B – A, le vecteur B' – A' ; et à chaque vecteur parallèle au plan des vecteurs B – A et C – A un vecteur parallèle au plan des vecteurs B' – A' et C' – A' ; etc. Réciproquement, si l'on se donne une homographie vectorielle et un point arbitraire O, la correspondance qui aura lieu entre les deux points variables P et P' = O + α(P – O), et entre les directions des droites OP et OP', est bien sûr une affinité de l'espace pour laquelle le point O correspond à soi-même : car, si Q et R sont deux points alignés avec P, des trois conditions :

$$P' = O + \alpha(P - O),\ Q' = O + \alpha(Q - O),\ R' = O + \alpha(R - O),$$

on tire par soustraction :

$$Q' - P' = \alpha(Q - P),\ R' - P' = \alpha(R - P)\ ;$$

d'où il s'en suit que les vecteurs Q' – P' et R' – P' sont aussi parallèles entr'eux, et que par suite les points Q' et R' sont en ligne droite avec le point P'. Les affinités nous offrent donc une image géométrique remarquablement intuitive des homographies vectorielles (il est néanmoins évident qu'à l'aide d'une construction pareille, où le point O demeure tout à fait arbitraire, chaque homographie vectorielle aura pour image un nombre infini d'affinités spatiales – dont l'ensemble s'obtient en composant l'une quelconque d'entre elles avec des translations arbitraires).

Le troisième invariant de α acquiert ainsi la signification géométrique de rapport (constant) entre les volumes de deux corps homologues suivant l'affinité P' = O + α(P – O). »

Empruntant ce vocabulaire à Grassmann, Burali-Forti et Marcolongo proposent d'appeler position de α, et de noter « positα » la collinéation correspondant à l'homographie vectorielle α. On peut alors dresser le tableau suivant :

Collinéation positα	Homographie vectorielle α	Affinité P' = O + α(P – O)
admet toujours un point uni (ou double)	admet toujours une droite vectorielle double	admet au moins une direction de droite invariante
....	...	...

Puis Pieri traduit des propositions bien connues de géométrie projective relatives aux collinéations (colonne 1) en propriétés des homographies vectorielles (colonne 2), propriétés dont on peut avoir une approche intuitive à l'aide d'une affinité associée à l'homographie (colonne 3). En utilisant la théorie de la modélisation introduite par Yves Chevallard, on est en présence de deux modélisations de l'objet mathématique nouveau que constituent les homographies vectorielles : l'une fournit un modèle issu de la géométrie projective, l'autre utilise les applications affines du plan (appelées ici affinités). Le caractère réversible de la relation entre système et modèle sera utilisé plus tard en France à des fins d'enseignement, pour définir les homographies projectives et les affinités ponctuelles à partir des homographies vectorielles.

L'ouvrage de Joseph George Coffin : Calcul vectoriel avec applications aux Mathématiques et à la Physique (1914)

Cet ouvrage, paru en 1914 aux éditions Gauthier-Villars et Cie (Libraires du Bureau des longitudes, de l'École Polytechnique) est la traduction par Alex Véronnet de l'ouvrage de J. G. Coffin publié à New York en 1909, puis réédité dès 1911 sous le titre « An introduction to Vector Methods and their various Applications to Physics and Mathematics ». Coffin, né en 1877, a passé quatre années en Suisse et en France (où il a été élève au Lycée Chaptal) avant de faire ses études au MIT, d'où il sortit en 1898, avant de compléter sa formation (Ph.D. en Physique) à l'université Clark en 1903. Vers 1909, il y enseigna (ainsi qu'à New York) la physique. Coffin a réalisé le projet que Wilson et Gibbs avaient envisagé : publier un livre plus élémentaire et plus court que l'ouvrage de Wilson. Coffin se situe donc clairement dans la lignée de Gibbs et Wilson et conserve leurs notations et méthodes ; les explications sont moins complètes, les preuves moins rigoureuses, et le contenu est moins complet. Néanmoins tous les sujets d'analyse vectorielle sont abordés, même si les applications linéaires sont rapidement traitées. Les deux derniers chapitres (qui constituent un bon tiers de l'ouvrage) sont consacrés aux applications en électricité et en mécanique, et de nombreuses applications sont également données dans les premiers chapitres.

Nous travaillerons à partir de la traduction française de la deuxième édition, qui débute par une lettre au traducteur par Paul Appell, la préface du traducteur, la préface de l'auteur et celle de la deuxième édition.

Paul Appell est en 1914 membre de l'Institut et Doyen de la Faculté des Sciences de Paris. Son intérêt pour les questions d'enseignement est ancien : en 1903, il a été nommé par le ministre de l'Instruction Publique, Joseph Chaumié, membre d'une commission interministérielle présidée par Marcellin Berthelot[38] « chargée de préparer, pour les classes de Mathématiques Spéciales et de Mathématiques Élémentaires des Lycées et Collèges, des programmes d'enseignement devant servir en même temps de programmes pour les examens d'entrée à l'École Polytechnique, à l'École Normale Supérieure (Section de sciences), à l'École Nationale des Mines, à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, à l'École Centrale des Arts et Manufactures, à l'École Spéciale de Saint Cyr et à l'Institut National Agronomique ». Paul Appell appartient à la sous-commission de mathématiques spéciales, et rédige le rapport concernant le programme d'enseignement de la classe de Mathématiques Spéciales qui est publié le 7 Juillet 1904. La présence de la lettre de Paul Appell au traducteur de l'ouvrage de Coffin est donc très significative pour l'époque : un savant de prestige, ayant assumé d'importantes responsabilités en matière de définition des programmes d'enseignement, et bénéficiant auprès du lectorat de l'ouvrage d'une autorité certaine, s'exprime au sujet de l'enseignement du calcul vectoriel (au sujet duquel il écrira plusieurs ouvrages), des avantages qu'il y a à l'introduire.

La lettre de Paul Appell

« Paris le 16 janvier 1914,

Mon cher Véronnet,

je suis heureux que vous ayez eu l'idée de traduire le Manuel de Calcul vectoriel du professeur J.G. Coffin. Il donne une excellente idée de ce calcul, des avantages qu'il présente dans l'enseignement, de ses applications à la Géométrie et surtout à la Physique. D'ailleurs votre notation très simple semble réduire au minimum les éléments nouveaux à introduire dans le Calcul. Elle me paraît conserver toute la clarté des formules algébriques sous une forme plus condensée, plus maniable, plus réelle aussi, en rendant la Mécanique plus géométrique et la Géométrie moins exclusivement algébrique. Je souhaite que votre traduction apporte à nos étudiants en Mathématiques et en Physique une aide nouvelle, qui leur permette d'atteindre plus vite et plus aisément aux plus hauts sommets de la science.

Votre dévoué

P. Appell ».

On notera que Appell insiste sur la simplicité des notations, qui tranche beaucoup par rapport à celles introduites quelques années plus tôt par Burali-Forti et Marcolongo.

---

[38] Ces informations sont tirées de l'ouvrage de Bruno BELHOSTE intitulé « Les sciences dans l'Enseignement Secondaire français - Textes officiels - Tome 1 : 1789-1914). INRP Economica, 1995.

La préface du traducteur

Le traducteur Alex Véronnet entreprend dans sa préface une apologie plus détaillée du calcul vectoriel. Son argumentation consiste à examiner de manière critique le développement historique de l'Algèbre et de l'Analyse, en prenant en considération les particularités de la France.

– Newton, puis les géomètres anglais du XVIIIe siècle faisaient tous leurs calculs sur les éléments géométriques eux-mêmes, sans passer par les composantes. Mais ils n'ont pas su trouver « une méthode et une notation simple et claire, vraiment pratique ».

– Ceci explique le succès de la méthode de Descartes, qui ramène l'étude de toute grandeur géométrique à celle de ses trois composantes, grandeurs algébriques dirigées selon les axes, notamment dans les travaux de Lagrange.

– Pourtant cette méthode cartésienne comporte « quelque chose d'artificiel, de peu naturel, en ce qu'elle brisait l'unité de la grandeur géométrique en trois éléments distincts, ayant leur variation propre, nécessitant trois études différentes, ce qui ne permet pas toujours de suivre facilement la variation de la grandeur géométrique elle-même, ni d'interpréter clairement les résultats de la solution. Car, après avoir décomposé, il faut reconstruire, ce qui n'est pas toujours aussi facile.

De plus, cette habitude de ne manier exclusivement que des quantités algébriques, aussi bien en Géométrie qu'en Mécanique et même en Physique, déshabituait de la vue réelle des choses, de l'interprétation exacte des phénomènes, en un mot formait des mathématiciens, mais arrêtait l'essor des ingénieurs. »[39].

– Cet aspect est particulièrement exacerbé en France et « nous en avons souffert ... nous avions trop sacrifié la richesse du contenu à la précision et à la clarté de l'exposition, qualités bien françaises à coup sûr ». À l'étranger, la méthode « purement mathématique » n'avait jamais été appliquée d'une manière aussi exclusive.

– La même année de 1844 voit paraître les quaternions de Hamilton et l'Ausdehnunslehre de Grassmann, qui « tentent de synthétiser les trois coordonnées cartésiennes en un seul élément, auquel les opérations de l'Algèbre seraient immédiatement applicables. ... Par malheur, ces méthodes générales étaient beaucoup trop complexes et demandaient beaucoup trop d'études préliminaires pour pouvoir entrer dans l'enseignement et être vraiment fécondes. ».

[39] Ceci rappelle certains des arguments déployés au moment de la période dite « des mathématiques modernes ».

Nous retrouvons sous la plume d'Alex Véronnet des arguments que nous avons déjà évoqués précédemment : Gibbs est l'un des premiers mathématiciens physiciens à avoir vraiment enseigné le calcul vectoriel. Dans ce but, il a contribué à dépersonnaliser des édifices théoriques qui contenaient des contraintes propres à leurs constructeurs respectifs, contraintes qui sont souvent d'ordre philosophique aussi bien chez Hamilton que chez Grassmann. Gibbs (et également Heaviside) n'assument plus ces contraintes, mais en imposent d'autres, parmi lesquelles figure en bonne place la nécessité de communiquer avec des étudiants ou des lecteurs. Grassmann est lui aussi conscient que cette absence d'interlocuteurs, d'étudiants, de spécialistes avec qui échanger lui a porté préjudice. Nous trouvons là une confirmation du rôle du didactique au cœur même du cognitif, souligné par Yves Chevallard.

Alex Véronnet poursuit ainsi sa description des œuvres premières de l'analyse vectorielle : « On avait élevé deux superbes monuments à la science mathématique : superbes, oui, mais de peu de rapport. ».

– En isolant dans ces édifices « les parties communes qui s'étaient trouvées à l'usage vraiment commodes et pratiques, ..., on les a conservées, on a simplifié les notations et l'on en a fait enfin le calcul vectoriel qui, maintenant, peut-on dire, se trouve à peu près au point. ».

Avant de décrire en quelques pages l'économie du système des vecteurs, Alex Véronnet en limite les prétentions :
« Le Calcul vectoriel se présente avec des prétentions bien modestes. Ce n'est plus une méthode générale voulant supplanter les autres. Non, c'est une méthode auxiliaire qui prétend seulement les aider utilement, les rendre plus claires et plus rapides, au moins dans certaines parties comme la Mécanique et la Physique Mathématique. Ce n'est même pas une méthode nouvelle peut-on dire. Dans ce qu'il a d'essentiel, d'universellement adopté, il se ramène plutôt à une simple notation, aussi claire et plus condensée que l'ancienne, permettant d'économiser, surtout dans l'enseignement, beaucoup de temps et d'efforts, d'aller plus vite et plus loin, d'être par conséquent un instrument de progrès pour les travaux futurs.

De plus, tous les éléments de cette notation ou de cette méthode auxiliaire sont extrêmement simples, puisqu'ils peuvent tenir facilement en une dizaine de pages, qui ne dépassent pas la compréhension de nos mathématiciens de lycées. Tout l'ensemble pourrait former un chapitre d'Algèbre élémentaire, intitulé : Théorie algébrique des vecteurs, qui correspondrait au chapitre de Géométrie sur les mêmes vecteurs et systèmes de vecteurs. ».

Après avoir résumé en deux pages et demi « toute l'économie du système », Alex Véronnet revient sur les aspects sténographiques du Calcul vectoriel.
« On peut dire aussi que la notation vectorielle est une sorte de sténographie, qui serait aussi claire que l'écriture ordinaire et plus représentative. Ou encore que c'est un véritable stéréoscope, qui donne la sensation du relief, du réel, au moyen de la fusion de deux photographies planes. Les deux photographies sont comme les trois coordonnées cartésiennes, qui donnent chacune un aspect de la réalité, non la réalité même, le moyen de la reconstruire et non cette reconstruction même. La notation vectorielle donne ces trois vues fondues en une seule, tout en laissant en même temps la faculté remarquable de les distinguer immédiatement et facilement, si on veut les étudier séparément. C'est le rétablissement de la vue normale directe. ».

Si ce discours semble bien s'adapter à l'utilisation du calcul vectoriel par le physicien ou par le géomètre dans l'espace, on peut s'interroger sur sa transposition en ce qui concerne la géométrie plane. Nous reviendrons sur ces questions dans la partie didactique.

Puis, il insiste à nouveau sur le caractère auxiliaire de la méthode, évoque le pont que l'on peut établir entre le Calcul vectoriel et les formules cartésiennes : là, il s'intéresse au professeur, à qui le calcul vectoriel fournit une « excellente méthode d'enseignement ».

Enfin, Alex Véronnet place l'ouvrage de J. G. Coffin par rapport aux ouvrages concurrents. Même si on peut le suspecter de manquer d'objectivité, il déclare que l'auteur « a mis dans son manuel une clarté toute française, que l'on ne retrouve dans aucun ouvrage similaire allemand ou même italien. Malgré quelques longueurs qui font désirer plus de précision parfois, la précision d'un Appell par exemple, c'est vraiment un livre d'enseignement à l'usage des étudiants comme des professeurs. .... Pour prendre un terme de comparaison, les ouvrages de Burali-Forti sont plus théoriques et destinés plutôt aux mathématiciens qu'à leurs élèves. Les deux genres se complètent sans faire double emploi, et le public français pourra dès lors, sans trop de peine et sans trop de recherches dans les ouvrages étrangers, souvent peu abordables, se mettre au courant de l'ensemble de la méthode et juger de son utilité incontestable. ».

S'il est clair que les ouvrages de Burali-Forti et Marcolongo d'une part, de Coffin d'autre part ne s'adressent pas aux mêmes lecteurs, et pas avec les mêmes intentions, leur complémentarité semble être plus problématique que l'annonce Véronnet : quels usages supplémentaires le professeur peut-il faire de l'ouvrage de Burali-Forti et Marcolongo ? Quelle aide à l'étude, à l'organisation de l'étude peut-il fournir que l'ouvrage de Coffin ne donne pas ? Des éléments de réponse à cette question peuvent être trouvés dans la préface de l'auteur.

La préface de l'auteur

Nous ne la commenterons pas en entier, car elle reprend, d'une autre manière, les arguments développés par Véronnet. Un paragraphe mérite cependant une attention particulière : Coffin y évoque la rigueur mathématique, et répond aux critiques voilées que Véronnet lui adresse à ce sujet :
« La rigueur mathématique reste la même dans cette méthode. Certaines explications ne servent souvent qu'à obscurcir la simplicité réelle, qui est le but recherché ici. L'auteur pense que le développement des calculs doit être entièrement banni des ouvrages de ce genre. D'autre part, nul ne désire davantage la rigueur mathématique. Il a voulu seulement éliminer les discussions qui pouvaient distraire l'attention des idées esssentielles. En tous cas, si une démonstration ne satisfait pas les difficiles et les puristes, ils pourront trouver les résultats établis plus rigoureusement, sinon plus clairement, dans les ouvrages consacrés aux démonstrations mathématiques rigoureuses. ».

S'il faut en croire Véronnet, le lecteur (élève, mais surtout professeur) devrait trouver dans l'ouvrage de Burali-Forti et Marcolongo les démonstrations rigoureuses des résultats affirmés dans le Coffin.

Le contenu de l'ouvrage

Les trois premiers chapitres sont respectivement consacrés aux opérations élémentaires du calcul vectoriel, au produit algébrique et géométrique (c'est-à-dire au produit scalaire et vectoriel), et enfin aux produits algébriques et géométriques comprenant plus de deux vecteurs. Les deux derniers chapitres traitent des applications en électricité, dynamique, mécanique et hydrodynamique. Les deux chapitres médians abordent la différentiation des vecteurs et les opérateurs différentiels (analyse vectorielle).

Dans la perspective des questions didactiques abordées plus loin, nous allons focaliser notre attention sur le premier chapitre, qui est révélateur des grandes différences entre les manières d'aborder le sujet chez Coffin d'une part, chez Burali-Forti et Marcolongo de l'autre. Voici en effet le plan de ce premier chapitre, intitulé « Opérations élémentaires du calcul vectoriel » :

On voit qu'en 20 pages, beaucoup de sujets sont abordés, et en particulier (Points n°9, 12 et 14) des conditions nécessaires et suffisantes pour que 3 points soient alignés, pour que 4 points soient coplanaires, pour qu'une relation soit « indépendante de l'origine ». De plus, des exemples sont traités en détail concernant le premier type de problèmes (alignement de trois points), et on remarquera la présence en fin de chapitre, d'une rubrique d'exercices et problèmes, sur les énoncés desquels nous reviendrons (dans l'immédiat, nous nous contenterons de signaler que, chaque fois que c'est possible, les énoncés sont traduits en termes de figures géométriques décrites par leur nom et à l'aide du langage courant, et que le recours aux lettres pour désigner les points n'est utilisé que dans des cas où le moyen précédent échoue, ou serait trop coûteux).

En reprenant les termes introduits dans notre partie « Problématique », on peut dire que la particularité de cet ouvrage (et en cela, il ne sera guère imité dans la suite) est de fournir des techniques, de montrer leurs mises en œuvre dans des exemples judicieusement choisis, au lieu de mettre en avant d'abord des éléments d'ordre technologico-théoriques qui permettraient de les justifier (la justification, qui est souvent assez simple, n'est même pas faite par l'auteur, qui s'est expliqué sur ce point dans la préface). Bien entendu, nous analyserons plus précisément ces particularités dans notre quatrième partie.

1. 11 – La période moderne : l'ouvrage de van der Waerden

Comme le signale Jean Dieudonné dans son Abrégé d'Histoire des Mathématiques, la conception de l'Algèbre linéaire va s'élargir à partir de 1920, sous l'influence de la théorie des systèmes hypercomplexes, grâce à l'introduction de la notion de groupe à opérateurs , c'est-à-dire un groupe commutatif Γ (noté additivement) muni d'une application $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ de $A \times \Gamma$ dans A où A (le domaine d'opérateurs) est un ensemble quelconque et « l' action » de A sur Γ satisfait à la condition $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$. Cette notion englobe celles d'espace vectoriel, de module au sens de Dedekind, d'idéal à gauche ou à droite d'un anneau, et surtout, dans le cas où A est lui-même un anneau, la notion de A-module. Ces conceptions se concrétisent dans l'ouvrage « Modern Algebra » de B. L. van der Waerden[40], qui paraît en 1930, qui aura par la suite une importante influence sur le contenu de nombreux ouvrages universitaires, comme en témoigne sa table des matières ; on y voit en effet apparaître les chapitres suivants : Nombres et ensembles ; groupes, anneaux et corps ; espaces vectoriels et espaces tensoriels ; polynômes ; théorie des corps ; suite de la théorie des groupes ; théorie de Galois ; ordre et bon ordre dans un ensemble ; extensions de corps ; corps réels[41]. Mis à part le dernier chapitre, consacré à la théorie des corps réels de Artin et Schreier, la plupart des autres vont se retrouver dans de nombreux ouvrages ultérieurs.

Après 1930, sous l'influence de l'analyse fonctionnelle[42], dans laquelle les formes linéaires sur un espace vectoriel E jouent un grand rôle, la théorie de la dualité s'est développée : en effet, comme nous l'avons déjà évoqué précédemment[43], ces formes linéaires ne peuvent pas en général être identifiées à un élément de E. Si l'on veut s'inspirer de ce point de vue en Algèbre linéaire élémentaire, il faut revenir à la conception de Grassmann complétée par Peano d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, où l'on ne suppose pas que l'on a choisi une base particulière. On est amené ainsi à définir le dual de E, noté E*, qui a même dimension que E, mais on ne les identifie pas. En revanche, grâce à un isomorphisme canonique, on peut identifier le dual de E* avec E. La même idée appliquée aux formes bilinéaires

---

[40] van der WAERDEN B. L., 1991, *Algebra*, Volume 1, Springer-Verlag. (traduction en anglais de la septième édition, qui date de 1966).

[41] On pourra lire, au sujet des corps réels, l'ouvrage de Hourya Sinaceur « Corps et Modèles », publié chez Vrin, dans la collection Mathesis, en 1991.

[42] Nous aborderons cette question dans le paragraphe 3 qui suit.

[43] Voir le paragraphe 19, page 95.

conduit aux notions de produit tensoriel et de tenseur : x^* et y^* désignant respectivement des formes linéaires sur E et F, l'application qui à tout couple (x, y) de E x F associe le produit des nombres $x^*(x)$ – image de x par x^* – et $y^*(y)$ est une application bilinéaire, qui est appelée produit tensoriel des formes linéaires x^* et y^* et notée $x^* \otimes y^*$. L'ensemble des formes bilinéaires sur E x F est un espace vectoriel engendré par de tels produits : on le note $E^* \otimes F^*$. En généralisant ce qui précède, et en utilisant le fait que $(E^*)^* = E$, on obtient les produits tensoriels d'un nombre fini quelconques d'espaces vectoriels et de duals de tels espaces ; en particulier, le produit tensoriel $(E^*)^{\otimes s} \otimes E^{\otimes r}$ a pour éléments les tenseurs r fois covariants et s fois contravariants qui interviennent en géométrie différentielle ; on les appelle parfois des tenseurs affines pour bien marquer la différence avec la situation suivante : si E est un espace vectoriel euclidien, alors on peut identifier E et E* : dans ce cas, il est inutile de distinguer les tenseurs covariants des tenseurs contravariants. L'ouvrage de A. Lichnerowicz "Éléments de calcul tensoriel" qui fait référence à ce sujet a été publié en 1948[44].

2 - Émergence des espaces affines

21 - Les travaux de Hermann Weyl

On a vu précédemment, notamment en examinant les travaux de Burali-Forti et de Marcolongo relatifs aux transformations linéaires que le mot « affinité » était utilisé par Mario Pieri dans la note géométrique où il est chargé par les auteurs de rendre plus évidentes intuitivement ces transformations linéaires (ou homographies) de l'espace tri-dimensionnel ordinaire. Apparaissent ainsi des applications qui conservent l'alignement, et qui sont associées à une transformation linéaire par une relation de la forme $P' = O + \alpha(P - O)$. L'emploi du mot « affinité » pourrait laisser penser que la notion d'espace affine était déjà présente, ou sous-jacente dans les connaissances du moment. Nous allons voir qu'il n'en est rien et que l'émergence de ces espaces est issue d'une toute autre problématique. Un indice nous en est donné par le sous-titre du livre dans lequel apparaissent pour la première fois ces espaces : il s'agit de « Temps, espace, matière » de Hermann Weyl, dont le sous-titre est « Leçons sur la théorie de la relativité générale ».

La première édition du livre, parue en 1918, était la rédaction d'un cours donné par H. Weyl à l'École Polytechnique de Zurich en 1917. Les progrès de la théorie d'Einstein étaient tels qu'à la fin de 1919 le livre en était à sa troisième édition. Le livre

44 LICHNÉROWICZ A., 1948, Éléments de calcul tensoriel, Armand Colin, réimpression J. Gabay, 1987.

qui nous servira de référence est la traduction française de la quatrième édition allemande, publiée à la Librairie Scientifique A. Blanchard à Paris en 1922.

Comme chez Hamilton (on pense à son « A science of Pure Time ») et chez Grassmann (on pense à l'introduction à l'Ausdehnungslehre), la philosophie n'est pas absente du livre, mais cette dernière est circonscrite à l'introduction qui comporte huit pages.

Une nouvelle définition de l'espace euclidien

Le premier chapitre, intitulé « L'espace euclidien ; son expression mathématique et son rôle en Physique » est celui dans lequel Weyl va introduire les espaces affines sous une forme très voisine de celle qui figurait il y a quelques années seulement au programme des classes de Terminale C des Lycées. D'où vient cette idée de redéfinir l'espace euclidien ?

D'abord, Weyl examine les représentations congruentes (déplacements) de l'espace, en faisant appel à l'intuition, et dégage le fait que les translations ont des caractéristiques qui permettent de les distinguer des rotations :

– étant donné une droite g, une translation qui la conserve globalement conserve globalement toute droite parallèle à g ;

– les translations forment un groupe et une représentation congruente f est une translation si quels que soient les points A et B, il existe une représentation congruente g permutant avec f telle que $g(A) = B$.

D'autre part, on peut définir la droite et le plan à partir des translations ainsi caractérisées.

« La translation étant définie sans l'aide de la rotation, on peut encore donner du plan et de la droite, une définition qui ne fasse intervenir que la notion que l'on vient d'éclaircir. En effet, soit **a** une translation qui amène A_0 en A_1 ; alors A_1 va en A_2, A_2 en A_3, etc. ; A_0 de plus, vient de A_{-1}, A_{-1} de A_{-2}. Nous obtenons ainsi, non pas une droite, mais une suite discrète de points équidistants. Si n est un nombre entier, il existe une translation $\frac{\mathbf{a}}{n}$ qui, si on l'applique n fois donne le même résultat que si l'on effectue **a**. Nous trouvons alors, en l'appliquant à A_0 , un nombre de points n fois plus grand sur la droite à construire. Si nous prenons pour n, tous les nombres entiers, nous obtiendrons un ensemble de points de plus en plus dense. La ligne droite, pouvons-nous dire, en passant à la limite et en invoquant notre intuition du continu, résulte de la même translation infinitésimale répétée indéfiniment, ainsi que son inverse. Un plan résulte de la translation d'une droite g le long d'une autre h ; si g et h sont deux droites qui se coupent en A_0 , on applique à g toutes les translations qui conservent h ; l'ensemble des droites ainsi obtenu forme le plan (g, h).

La construction logique de la géométrie est ordonnée plus simplement, si l'on borne la notion de représentation congruente à celle de translation. Nous obtiendrons ainsi une géométrie dite affine dans les cadres de laquelle la notion générale de congruence sera introduite. L'intuition nous ayant donné les notions nécessaires, nous entrons de suite dans le domaine de la mathématique déductive. »

Ce mode de génération des droites, des plans, n'est pas sans rappeler les manières de changement et les systèmes d'échelon successifs de Grassmann. Mais comme nous le verrons plus loin, la motivation n'est pas la même.

Définition axiomatique d'un espace affine

Il donne alors ce qu'il appelle le « système d'axiomes le plus simple de la géométrie affine » qui comporte un paragraphe I, intitulé « Vecteurs » dans lequel il donne la définition d'un espace vectoriel (sans utiliser cette locution), et un paragraphe II intitulé « Points et vecteurs » dans lequel il donne les deux axiomes :
« 1) Deux points quelconques A et B déterminent un vecteur ; $\overline{AB} = \mathbf{a}$. Si A est un point quelconque, **a** un vecteur, il y a un point B et un seul tel que $\overline{AB} = \mathbf{a}$.
2) Si $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{BC} = \mathbf{b}$, on a $\overline{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. »

Puis, en cinq pages, il définit rapidement tous les concepts de base de la théorie des espaces vectoriels et affines :
– vecteurs linéairement indépendants,
– dimension [1]
– multiplicité vectorielle linéaire (sous espace vectoriel)
– ensemble linéaire de points (sous espace ou variété linéaire affine)
– parallélisme
– parallélépipède
– système de coordonnées
– composantes d'un vecteur dans un système de coordonnées
– coordonnées de points dans un système de coordonnées
– formules de changement de composantes, de changement de coordonnées
– représentation (ou correspondance) affine
– forme linéaire.

[1] Weyl l'introduit dans ce qu'il appelle l'axiome dimensionnel : « Il y a n vecteurs linéairement indépendants, mais $n + 1$ sont linéairement dépendants ». Nous renvoyons à l'ouvrage de Jean-Luc Dorier déjà cité (L'algèbre linéaire en question) p. 71 pour une critique de cette présentation.

Géométrie à n dimensions. Algèbre linéaire. Formes quadratiques.

La géométrie à n dimensions n'est pas à cette époque une nouveauté. Camille Jordan[2] a fait un exposé complet de la géométrie euclidienne réelle à n dimensions, par des méthodes entièrement analytiques.

Le propos de Weyl est plutôt ici de montrer que la géométrie à n dimensions est en harmonie avec la physique (pour les besoins de la théorie de la relativité, il aura besoin d'un espace de dimension 4), mais également permet de rendre compte de choses aussi différentes qu'un mélange gazeux (un tel mélange peut être considéré comme un vecteur, lui-même combinaison linéaire des 4 vecteurs indépendants suivants : 1 g d'oxygène, 1 g d'hydrogène, 1 g de soufre, 1 g d'acide carbonique) ou, plus sérieusement qu'un système d'équations linéaires homogène qu'il interprète à l'aide de formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$: un vecteur est alors un n-uplet de nombres réels. Quant aux solutions d'un système d'équations linéaires non homogène, il montre qu'il convient de s'intéresser aux différences de tels n-uplets, différences que l'on peut appeler « points » en restant dans le cadre axiomatique défini précédemment.

Les bases de la géométrie métrique

Comme il l'a fait pour les espaces affines, Weyl commence par un recours à l'intuition pour passer de la géométrie affine à la géométrie métrique, en faisant allusion au produit scalaire : deux vecteurs **a** et **b** étant donnés, après avoir fait choix d'un vecteur unitaire, nous pouvons mesurer la longueur de **a** et la longueur de la projection orthogonale de **b** sur **a** ; le produit des deux nombres qui mesure ces longueurs (en les algébrisant) donne le produit scalaire **a.b**. Il explique qu'il ne s'agit plus seulement, comme en géométrie affine de comparer les longueurs de segments parallèles, mais de comparer les longueurs de segments diversement dirigés. Des règles du produit scalaire, il résulte que le produit scalaire de **a** par lui-même est égal au carré de la longueur de **a**.
« On reconnaît donc que ce n'est pas la longueur d'un vecteur mais le carré de cette longueur qui dépend rationnellement du vecteur ; cette dépendance s'exprime au moyen d'une forme quadratique : c'est là à proprement parler le contenu essentiel du théorème de Pythagore. ».

Puis il formule ce qu'il appelle *l'axiome métrique* :
« Après le choix d'un vecteur unitaire **e**, deux vecteurs **x** et **y** déterminent univoquement un nombre $(\mathbf{x}.\mathbf{y}) = Q(\mathbf{x},\mathbf{y})$; ce nombre est une fonction bilinéaire symétrique des deux vecteurs, et la forme quadratique $Q(\mathbf{x},\mathbf{x})$ qui lui correspond $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})$ est définie positive. $Q(\mathbf{e}) = 1$. » Q s'appelle la forme métrique fondamentale.

---

[2]Voir l'article qui lui est consacré dans l'Encyclopædia Universalis.

Il définit immédiatement une représentation congruente (ou congruence) comme étant une correspondance entre **x** et **x'** laissant invariante la forme métrique fondamentale Q :

$$Q(\mathbf{x}') = Q(\mathbf{x})$$

Deux figures qui sont la représentation congruente l'une de l'autre sont dites congruentes. (Il choisit de ne pas distinguer congruence directe et congruence par réflexion).

Il explique que l'on aurait pu prendre Q(**a**) comme longueur du vecteur **a**, mais qu'alors la longueur de la somme de deux vecteurs parallèles (et de même sens) ne serait plus égale à la somme de leurs longueurs : c'est la raison pour laquelle on prend comme définition de la longueur de **a** la racine carrée positive de Q(**a**).

De même, **a** et **b** désignant des vecteurs unitaires, pour définir leur angle θ, on pourrait penser à prendre Q(**a**,**b**). Mais alors, la mesure de la somme de deux angles ne serait plus égale à la somme « de leurs parties ». On évite cet inconvénient en prenant comme définition de θ la relation :

$$\cos\theta = Q(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Après avoir évoqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz, défini les systèmes cartésiens de coordonnées (repères orthonormaux), rappelé le résultat de la loi d'inertie de Sylvester, ainsi que la représentation analytique d'une congruence (matrice orthogonale), il termine par une introduction au calcul tensoriel, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

« Pour le traitement analytique de la géométrie métrique, il y a deux possibilités :

Ou bien, on ne particularise en aucune manière le système de coordonnées affine, et alors il faut développer une théorie de l'invariance vis à vis de n'importe quelle transformation linéaire pour laquelle, au contraire de la géométrie affine pure, une forme quadratique invariante est donnée une fois pour toutes (la forme métrique fondamentale).

Ou bien l'on n'utilise que des systèmes de coordonnées cartésiens ; alors il s'agit d'établir une théorie de l'invariance vis-à-vis des transformations orthogonales. »

Il choisit la première solution, pour « pouvoir embrasser des généralisations qui dépassent la géométrie euclidienne. » De plus, il annonce une présentation du calcul tensoriel qui ne rende pas seulement possible l'étude des objets mathématiques mais « encore et surtout l'étude des lois physiques ».

Il établit la distinction entre deux types de composantes pour un même vecteur.

Un système de coordonnées quelconque O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ étant donné, on peut définir pour tout vecteur **x** ses composantes x^i telles que $\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + ... + x^n\mathbf{e}_n$ mais également les produits scalaires x_i de **x** par chacun des $\mathbf{e_i}$. Dans un changement de système de coordonnées, les composantes x^i changent de manière « contragrédiente » à celle que subissent les vecteurs du système de coordonnées, alors que les composantes x_i se transforment comme les vecteurs du système (on dit qu'elles se transforment de manière « cogrédiente »). Les composantes x^i sont appelées composantes contravariantes du vecteur **x**, les composantes x_i composantes covariantes du vecteur **x**. Les deux types de composantes sont liées par la relation :

$$x_i = (\mathbf{e_i}.\mathbf{e_1})\,x^1 + (\mathbf{e_i}.\mathbf{e_2})\,x^2 + \ldots + (\mathbf{e_i}.\mathbf{e_n})\,x^n.$$

De Gauss à Riemann

Dans le chapitre II, intitulé « Le continuum métrique », Weyl commence par « un coup d'œil sur la géométrie non euclidienne » : il en fait une brève approche historique, puis présente l'unification des trois géométries (hyperbolique, euclidienne et sphérique) à laquelle ont conduit les travaux de Cayley et de Klein, tout en présentant plus longuement le modèle euclidien de Klein de la géométrie hyperbolique.

Puis il passe à la géométrie de Riemann, qui pour lui est essentielle. Il remarque que les trois géométries évoquées précédemment en sont des cas particuliers, mais explique que là n'est pas toute sa richesse. Il met en évidence le fait que Gauss a été un prédécesseur de Riemann lorsqu'il a élaboré sa théorie des surfaces[3], et il traite l'exemple de la sphère en montrant que sa géométrie est déterminée à l'aide d'une forme différentielle quadratique (le ds^2),

$$ds^2 = \frac{(1 + u_1^2 + u_2^2)(du_1^2 + du_2^2) - (u_1du_2 + u_2du_2)^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}$$

de la même manière que la géométrie du plan peut être déterminée par

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2,$$

traduction du théorème de Pythagore pour des points infiniment voisins. C'est d'ailleurs l'emploi de ce principe (le théorème de Pythagore est vrai pour des points infiniment voisins sur la surface) qui a permis d'obtenir la formule du ds^2 pour la sphère.

La géométrie de Riemann généralise la théorie des surfaces de Gauss en s'intéressant à des « multiplicités à *n* dimensions », dont Weyl cite quelques exemples :

– les états d'équilibre d'un gaz parfait où les variables indépendantes sont la pression et la température, par exemple (multiplicité à deux dimensions) ;

– les couleurs (multiplicité à trois dimensions) ;

– les positions possibles d'un corps solide (multiplicité à six dimensions) ;

– les positions d'un système mécanique à *n* degrés de liberté (multiplicité à *n* dimensions).

---

[3]Sur l'évolution du concept d'espace et en particulier sur la géométrie non euclidienne, la théorie des surfaces, et la pensée de Riemann, on pourra consulter le livre de Luciano Boi, « Le problème mathématique de l'espace, une quête de l'intelligible », Springer, 1995.

Ainsi, un espace riemannien à n dimensions est une multiplicité à n dimensions qui n'est pas quelconque, mais qui est tel qu'une métrique lui est attachée par le moyen d'une forme différentielle quadratique définie positive.

Weyl explique par ailleurs que la géométrie de Riemann est à la physique des actions de contact ce que la géométrie euclidienne est à la physique des actions à distance.
« [La géométrie de Riemann] est une géométrie qui procède de proche en proche dans ses investigations, [la géométrie euclidienne] donne immédiatement les lois globales. La géométrie riemanienne est en quelque manière une formulation de la géométrie euclidienne qui satisfait l'esprit de continuité, mais elle prend par cette formulation un caractère beaucoup plus général. ».

Riemann pensait que « la métrique de l'espace n'est pas indépendante des phénomènes physiques qui se déroulent en son sein » pas plus qu'elle n'est fixée dès l'abord, « de telle sorte que le réel entre dans l'espace comme en une maison locative » : il affirme plutôt, contrairement à la croyance habituelle, que l'espace en soi n'est pas autre chose qu'une multiplicité tridimensionnelle amorphe et que c'est le contenu matériel qui le remplit qui lui donne sa forme et détermine ses rapports de mesure. »[4]. Ses contemporains ne l'ont guère compris, seul W. K. Clifford semble partager ses vues.[5]

Ceci conduit Riemann à penser que la notion de congruence ne conduit à aucune métrique (la possibilité du changement de lieu d'un corps sans altération de ses rapports métriques est retrouvée si le corps entraîne dans son mouvement le « champ métrique » qu'il engendre). Alors où chercher le « principe intime des rapports métriques » ? Einstein prend alors le relais de Riemann en établissant que ce principe repose sur les forces de gravitation : « Le champ de gravitation exerce sur les rayons lumineux et sur les corps « solides » que nous prenons comme étalons de mesure, une action telle que si nous utilisons les rayons lumineux et les étalons pour mesurer des objets à la manière habituelle, il en résulte une métrique qui ne s'écarte que très peu de la métrique euclidienne. Mais les rapports métriques ne proviennent pas d'un espace considéré comme forme des phénomènes, mais ils naissent du calcul des modifications physiques des étalons et des rayons lumineux déterminés par le champ de gravitation. »[6] .

Weyl apporte alors, à la lumière des travaux d'Einstein, une critique à la géométrie de Riemann : ce dernier suppose que l'on peut comparer l'une à l'autre les

---

[4]H. Weyl, « Espace, temps, matière » - Librairie Blanchard - 1922 ; pp. 84.
[5]Nous renvoyons sur ce point à l'ouvrage de L. Boi cité en note 3.
[6]Weyl, Op. cit. pp. 87-88.

mesures de deux éléments linéaires situés à des endroits différents. Weyl trouve que « la possibilité d'une telle comparaison à distance ne peut être conditionnée dans une véritable géométrie infinitésimale ; il n'y a d'admissible que le principe qui rend possible le transport d'un étalon de longueur d'un point à un point infiniment voisin. ». La géométrie infinitésimale qu'il va construire pour prendre en compte cette contrainte va l'être en trois étapes, qu'il appelle dans l'ordre :

– le continu amorphe,
– la multiplicité à connexion affine,
– l'espace métrique.

1ère étape : le continu amorphe.

Dans la première étape, il se place dans une multiplicité à *n* dimensions, muni d'un système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les formules de changements de coordonnées pour passer du système $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ au système $x_1, x_2, \ldots, x_n$, étant de la forme $x_i = f_i(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$, où les fonctions f_i possèdent des dérivées partielles $\alpha^i{}_k$ continues dont le déterminant n'est pas nul, ceci afin d'assurer que **la géométrie affine soit valable dans l'infiniment petit**, de façon à pouvoir calculer les dx_i en fonction des $d\overline{x_k}$, par les formules

$$dx_i = \alpha^i{}_k \, d\overline{x_k} \quad \text{(avec la convention de sommation d'Einstein)}$$

Les coordonnées relatives d'un point $P'(x_i + dx_i)$ infiniment voisin d'un point $P(x_i)$ sont les composantes d'un **élément linéaire** ou d'une **translation infinitésimale** $\overline{PP'}$. **Les translations infinitésimales jouent le même rôle pour le développement du calcul tensoriel que celui que jouent les translations finies pour l'édification de la géométrie affine.**

Weyl précise : « il est essentiel de remarquer que dans le cas qui nous occupe, une translation est liée essentiellement à un point P ; dire que deux translations en deux points différents sont égales ou différentes n'a aucun sens. ... C'est pourquoi il n'est possible de parler que de translations d'un point et non comme dans le chapitre I de translation de tout l'espace, et par suite, on ne parlera pas simplement d'un vecteur ou d'un tenseur, mais d'un vecteur ou d'un tenseur en un point P. ».

2ème étape : la multiplicité à connexion affine.

On dira qu'**un point P** d'une multiplicité est en **connexion affine avec son voisinage** si l'on sait dans quel vecteur en P' un vecteur quelconque en P s'est transformé quand on l'a déplacé **parallèlement à lui-même** de P au point infinitésimal voisin P'. Il convient donc de définir le transport parallèle d'un vecteur. Cette question a déjà été traité en

géométrie riemanienne, par Levi-Civita, qui suppose que l'espace riemannien en question est plongé dans un espace euclidien ayant un nombre suffisant de dimensions.[7] Weyl précise ainsi la définition qu'il en donne, qui va généraliser celle de Levi-Civita.
« Pour définir cette notion de déplacement parallèle, nous allons lui attribuer toutes les **propriétés que nous lui avons reconnues en géométrie affine, ni plus, ni moins,** c'est-à-dire que nous postulons : il y a un système de coordonnées (pour le voisinage de P) au moyen duquel les composantes d'un vecteur quelconque de P ne sont pas altérées quand ce vecteur subit un déplacement parallèle infinitésimal. Cette condition caractérise le déplacement parallèle ; elle en fait une propagation, dont nous pouvons dire avec raison qu'elle laisse les vecteurs inaltérés. Un tel système de coordonnées est dit géodésique en P. ».

Nous n'entrerons pas ici dans les calculs permettant de caractériser de tels déplacements parallèles. On obtient des équations différentielles mettant en jeu ce qu'on appelle les composantes de la connexion notées Γ^i_{rs} [8], dont on peut démontrer qu'elles ont une solution satisfaisant à des conditions initiales données.

Par définition, une multiplicité affine est une multiplicité telle que chaque point soit en connexion affine avec son voisinage.

Courbure

Dans une multiplicité affine, P et P' étant deux points réunis par une courbe, il se peut que le transport parallèle d'un vecteur de P en P' ne soit pas intégrable, c'est-à-dire que le vecteur que l'on obtient en P' par déplacement parallèle d'un vecteur en P dépende du chemin suivi pour aller de P en P'.

C'est seulement dans le cas très particulier où l'intégrabilité a lieu que l'on peut parler du même vecteur en P et en P'. Weyl nomme de telles multiplicités des multiplicités *euclidiennement affine*. Dans une telle multiplicité, si l'on soumet tous les points à une translation infinitésimale représentée en chaque point par le même vecteur infinitésimal, on dit que l'espace considéré subit une translation d'ensemble infinitésimale. On peut alors démontrer que la multiplicité est un espace affine au sens du chapitre I.

Sinon, on mesure l'écart entre la multiplicité et une multiplicité euclidiennement affine à l'aide de la notion de courbure (qui apparaît dans le cas général sous forme d'un tenseur).

---

[7]Cette question du transport parallèle fait l'objet d'une attention particulière du point de vue didactique dans les traités de géométrie différentielle, y compris les plus récents. On peut par exemple citer Stoker (Differential Geometry, Wiley, 1989) et Lehmann Sacré (Géométrie et topologie des surfaces, PUF, 1982). Dans ce dernier, cette notion est illustrée dans le cas des surfaces immergées dans E^3 à l'aide du roulement sans glissement et sans pivotement du plan tangent à une surface le long d'une courbe tracée sur cette surface.
[8]Ces symboles sont les symboles de Christoffel.

3ème étape : l'espace métrique.

On définit d'abord ce qu'est une détermination métrique en un point P : on dispose d'une forme quadratique non dégénérée définie à un facteur de proportionnalité près (on admet que le théorème de Pythagore est valable dans l'infiniment petit). Si on fixe ce facteur, on dit que la multiplicité est étalonnée en P. L'image d'un vecteur **x** par la forme quadratique est noté $\mathbf{x}^2$, et par définition, ce nombre est la mesure du segment que le vecteur **x** détermine.

Supposons qu'une multiplicité ait en chaque point une détermination métrique. Pour qu'elle devienne un espace métrique, il faut que chaque point soit en connexion métrique avec son voisinage, c'est-à-dire se donner une correspondance entre segments en des points P et P' infiniment voisins, correspondance que l'on appelle congruence. Comment la définir ?

Weyl impose la condition suivante : le voisinage de P est étalonné de façon que la mesure de chaque segment en P que l'on meut par déplacement congruent en P' ne soit pas altérée. L'étalonnage[9] est alors appelé géodésique en P. Cela se traduit analytiquement par la donnée en chaque point P, en plus de la forme quadratique évoquée précédemment, d'une forme linéaire en P. La variation Δl de la longueur d'un segment lorsqu'on passe d'un point P au point infiniment voisin P' fait intervenir un tenseur du deuxième ordre mettant en jeu les coefficients de cette forme linéaire, tenseur que Weyl qualifie de *courbure segmentaire*, attribuant le qualificatif « vectorielle » à la courbure définie dans une multiplicité à connexion affine.

Cette courbure segmentaire s'annule si et seulement si l'espace métrique est un espace de Riemann (et on retrouve ainsi la critique qu'il avait faite auparavant des espaces de Riemann, comme étant encore trop influencés par une définition globale de la géométrie). Dans un tel espace, la forme différentielle relative à l'étalonnage peut être choisie comme étant identiquement nulle (on parle alors d'un étalonnage normal). Pour l'étalonnage normal d'un espace riemannien, la forme quadratique est déterminée à un facteur constant positif près, que l'on peut déterminer une fois pour toutes par le choix d'une unité de segment. Ce choix peut être fait en n'importe quel point puisque l'étalon normal peut être transporté partout.

Weyl termine la présentation de son édifice géométrique par la démonstration de ce qu'il appelle le théorème fondamental de la géométrie infinitésimale. Dans un espace métrique, la notion de déplacement parallèle se laisse définir d'une façon et d'une seule de manière à ce que la mesure du segment qu'il détermine soit inaltérée. Autrement dit, le transport infinitésimal des segments par des longueurs porte en soi, en même temps le

[9]La notion d'étalonnage est due à Minkowski.

principe du transport de la direction ; un espace métrique a par sa nature même une connexion affine.

Weyl fait ensuite le lien entre sa théorie et celle des groupes continus de transformations, que nous n'aborderons pas ici.

Dans le chapitre III, il applique ce qui précède à la physique, qu'il interprète avec sa théorie.
– le principe de relativité de Galilée :
l'univers est un espace quadridimensionnel affine euclidien, dont il précise la métrique.
– l'électrodynamique et le théorème de relativité de Lorentz :
ces lois s'expriment par des relations tensorielles invariantes dans un espace affine à quatre dimensions dont les coordonnées sont t, x_1, x_2, x_3 et dont la métrique est définie par la forme quadratique non dégénérée

$$-c^2t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 .$$

– le principe de relativité (restreinte) d'Einstein :
l'univers est un espace affine à quatre dimensions, dont la détermination métrique repose sur une forme quadratique indéfinie, à trois dimensions positives et une dimension négative.
– la théorie de la relativité générale (qui fait l'objet du chapitre IV) :
l'univers est une multiplicité métrique à (3+1) dimensions ; tous les phénomènes physiques sont des émanations de sa métrique.

Ce survol de l'ouvrage de Hermann Weyl montre que la définition qu'il propose dans le premier chapitre des espaces affines est conditionnée par les généralisations qu'il en tire (multiplicité à connexion affine, multiplicité métrique) dans le domaine de la géométrie infinitésimale (ici différentielle), généralisations qui lui ont parues indispensables pour traiter la théorie de la relativité générale d'Einstein. La simplicité formelle de sa construction axiomatique des espaces affines est telle qu'il n'est guère étonnant qu'on ait pensé à s'en servir à des fins didactiques. Mais on voit bien que l'entreprise sera difficile sur un point : justifier la nécessité de ce clivage affine/euclidien. Les évolutions des programmes seront analysés sous cet angle dans la partie qui leur est consacrée.

22 - Le cours de Georges BOULIGAND

La première édition des « Leçons de géométrie vectorielle – Préliminaires à l'étude de la théorie d'Einstein » par Georges Bouligand (Librairie Vuibert - Paris) date de 1924 ; une deuxième édition paraît en 1936, et une troisième en 1949.

Dans l'avertissement de la seconde édition, avec laquelle nous travaillerons, l'auteur rappelle leur but :

« Ne pas limiter la portée des méthodes vectorielles à une simplification des calculs, plus étroitement soudés aux figures, tel fut à l'origine le but de ces Leçons. Les principes même de ces méthodes les font solidaires de l'axiomatique, dont les théories relativistes avaient révélé toute la puissance constructive. Or cette puissance est aujourd'hui confirmée par l'évolution du calcul fonctionnel vers des méthodes se réclamant de l'intervention d'espaces auxiliaires. Dans la formation mathématique, la géométrie vectorielle devient à ce titre un rouage indispensable.

Les connexions de cette branche avec des problèmes variés ont d'ailleurs assoupli les algorithmes : c'est ce que montre la note V, où M. Paul Delens a bien voulu traiter des congruences de courbes. ... Il n'y a pas d'exemple où le calcul tensoriel est plus avantageusement complété par les procédés opératoires favoris de l'École italienne (Marcolongo, Burali-Forti). Il n'y a pas non plus de meilleure leçon d'éclectisme quant au choix de la notation, toujours soumise à de nouvelles exigences d'adaptation, à mesure que les problèmes s'élargissent. ».

Le premier paragraphe montre bien l'importance croissante du rôle de la géométrie vectorielle (qui n'est plus seulement un « calcul » vectoriel). La longue allusion à la note V montre l'influence encore grande exercée en France par l'École italienne. Cette note reprend les nombreuses notations utilisées par Burali-Forti et Marcolongo dans leur ouvrage sur les transformations linéaires (les homographies vectorielles), pour les mettre en application dans l'étude des courbes intégrales d'un champ de vecteurs.

L'ouvrage, qui comporte 387 pages est très complet. Il reprend, à partir d'un niveau beaucoup plus élémentaire les mêmes sujets que l'ouvrage de H. Weyl. Le vocabulaire s'en écarte parfois un peu : ainsi, l'expression « géométrie linéaire » est préférée à « géométrie affine ». Les aspects axiomatiques sont détaillés, et complétés par rapport à l'ouvrage de Weyl en évoquant l'axiomatique de Hilbert, qui répond à une problématique complètement différente. Le dernier chapitre traite du déplacement parallèle en reprenant les travaux de Weyl, puis en donne une interprétation en géométrie ordinaire.

Plusieurs notes et compléments figurent en fin d'ouvrage, dont voici les titres :
I Sur les principes du calcul tensoriel
II Sur les multiplicités de Riemann à plus de deux dimensions
III Sur les principes de la géométrie
IV Compléments sur les surfaces à courbure totale constante
V Développement du calcul vectoriel et géométrie des congruences de courbes.

La note III reprend l'axiomatique de Hilbert dans les Fondements de la géométrie, la théorie de Riemann, et établit la relation avec la géométrie de Cayley-Klein, puis évoque la construction de la géométrie à partir de l'idée de groupe.

23 - Elie Cartan : Leçons sur les espaces de Riemann

Dans cet ouvrage issu d'un cours professé en 1925-26, Elie Cartan annonce dans la préface qu'il a souhaité traiter du calcul différentiel absolu « en dégageant le plus possible l'élément géométrique essentiel, et en gardant toujours le contact le plus étroit possible avec la Géométrie euclidienne. Les services éminents qu' a rendu le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita ne doivent pas nous empêcher d'éviter les calculs trop exclusivement formels, où les débauches d'indices masquent une réalité géométrique souvent très simple. C'est cette réalité que j'ai cherché partout à mettre en évidence. ».

Le premier chapitre traite des coordonnées cartésiennes, des vecteurs, des multivecteurs et des tenseurs. Les bivecteurs sont des couples de vecteurs, auxquels on associe un parallélogramme orienté. Deux bivecteurs sont égaux si les deux parallélogrammes qui leur sont associés sont dans le même plan (ou dans des plans parallèles), ont la même aire et le même sens de parcours. On retrouve ainsi le produit extérieur de Grassmann.

Le chapitre II est consacré aux coordonnées curvilignes en géométrie euclidienne. La différentiation absolue y est traitée en liaison avec la cinématique. Ainsi, la formule obtenue pour l'accélération dans le calcul différentiel absolu généralise le théorème usuel de composition des accélérations.

Au chapitre IV, traitant des espaces de Riemann et des espaces euclidiens tangents et osculateurs, on retrouvera la même formule après avoir défini le transport des vecteurs par équipollence d'un point à un autre.

Ainsi, le traitement de la géométrie euclidienne dans un système de coordonnées curviligne quelconque sert de transition entre le calcul différentiel ordinaire et le calcul différentiel absolu.

24 - Le cours d'Algèbre de mathématiques spéciales et de mathématiques générales d'Alex Véronnet.

Nous évoquons cet ouvrage, publié en 1933 chez Gauthier-Villars, pour deux raisons :
– d'abord, il fait suite à l'ouvrage de Coffin dont nous avons déjà parlé, ouvrage que Véronnet avait traduit de l'Américain en 1914 ;
– ensuite, il présente la particularité de faire jouer un rôle très important aux unités de mesure : dans la définition de ce qu'il appelle des « nombres vectoriels », nous verrons que les unités sont présentes sous forme de vecteur.

Voici comment Véronnet (qui est, en 1932, astronome à l'Observatoire de Strasbourg, chargé de conférences à la Faculté des Sciences) évoque les nombres vectoriels dans l'introduction de l'ouvrage[10]. « C'est un nombre qui contient la somme de *n* nombres algébriques, pris avec leurs *unités de mesure.* Le Calcul vectoriel avait introduit dans les formules de traduction analytiques les *directions* des axes, ou *vecteurs unités*, qui servent à distinguer les trois composantes, et à définir l'addition, la multiplication, et la dérivation de ces composantes. L'extension du Calcul vectoriel à l'Analyse conduisait à considérer les *n* variables indépendantes, comme des quantités *mesurées* avec des *unités* indépendantes, unités incommensurables entre elles, représentées géométriquement par des directions d'axes rectangulaires, auxquelles s'appliquent les règles des produits de vecteurs unités. On sait à quel point cette question des *unités de mesure* est fondamentale en Mécanique et en Physique. On verra quels avantages considérables son introduction explicite peut introduire en Analyse. Le dernier chapitre montrera comment la considération des *unités de mesure variables* ouvre un jour nouveau et révélateur sur les formules et problèmes du Calcul tensoriel et de la relativité. ».

Plus loin, toujours dans cette introduction, il évoque les deux derniers chapitres. « L'avant dernier chapitre contient l'extension des règles du Calcul vectoriel au cas des coordonnées obliques à trois ou *n* dimensions. Ce cas, surtout applicable à la géométrie, correspond, en analyse à des variables non complètement indépendantes. On voit comment on peut ramener toutes les formules à la même simplicité que celles des axes rectangulaires et des variables absolument indépendantes, en considérant un système d'axes ou d'unités, auxiliaire, qui est le système supplémentaire ou inverse du premier, ou encore en adjoignant simplement aux coordonnées obliques les projections orthogonales sur les axes. ». Véronnet évoque ici, avec une autre terminologie, le passage des coordonnées contravariantes aux coordonnées covariantes, ou encore ce

[10]Véronnet, pour définir les nombres vectoriels, considère des variables indépendantes, qui doivent être mesurées par des unités distinctes et indépendantes $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$: un nombre vectoriel est la somme des valeurs de ces *n* variables prises avec leurs unités de mesure c'est-à-dire une expression de la forme $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + ... + \xi_n x_n$, les x_i étant des nombres réels.

qu'on appelle, en calcul tensoriel la base duale d'une base donnée. Nous allons l'illustrer par un exemple très simple en dimension 2. Pour plus de détails, nous renvoyons à l'ouvrage « La pratique des tenseurs »[11].
(e_1, e_2) désignant une base quelconque, on définit la base duale (e^1, e^2) de (e_1, e_2) par les conditions suivantes :

$$e_1 . e^2 = 0 \text{ et } e_2.e^1 = 0 ;$$
$$e_1 . e^1 = 1 \text{ et } e_2.e^2 = 1 .$$

L'intérêt d'une telle base (qui n'est pas non plus orthomormale) est le suivant. Si on désigne par (x_1, x_2) et (y_1, y_2) les coordonnées respectives de deux vecteurs u et v dans (e_1, e_2), et par (x^1, x^2) et (y^1, y^2) les coordonnées de ces mêmes vecteurs dans (e^1, e^2), alors le produit scalaire des vecteurs u et v est égal à

$$x_1y^1 + x_2y^2 \text{ ou encore à } x^1y_1 + x^2y_2,$$

formules qui rappellent l'expression du produit scalaire dans une base orthonormale. En outre, la projection orthogonale d'un vecteur u sur un vecteur e_i d'une base est égale à la composante de ce même vecteur u relative au vecteur e^i correspondant de la base duale.

Concernant le dernier chapitre qui traite de la géométrie différentielle de Riemann et de Cartan, Véronnet le commente ainsi dans l'introduction.
« Le dernier chapitre expose les éléments du calcul tensoriel au moyen du Calcul vectoriel généralisé. Les deux systèmes de coordonnées obliques du chapitre précédent s'introduisent tout naturellement et de plus, on considère ici ces *unités comme variables en chaque point*. [...] Elles servent d'abord à définir les quantités covariantes et contre-variantes. On voit ensuite comment le produit algébrique de ces unités définit et remplace les quantités g_{ik} du calcul tensoriel[12], comment la divergence de ces unités définit les symboles de Christoffel, comment leur rotationnel définit le vecteur de Cartan [...]. Si ce vecteur est nul en chaque point, on a une multiplicité de Riemann. S'il n'est pas nul, l'espace est tourbillonnaire en chaque point, aucune fonction n'y est uniforme.[...]. Les formules dérivées ainsi des unités sont beaucoup plus simples, plus intuitives, que celles données par la dérivation des g_{ik} dans le Calcul tensoriel ordinaire, qui est purement algébrique. ».

Du point de vue de l'enseignement, Véronnet constate que « grâce à l'apostolat des précurseurs, le Calcul vectoriel est entré officiellement dans l'enseignement ». Puis il en fait l'apologie :

---

[11]« La pratique des tenseurs » - V. DRIVAS, L. ROSENTHAL, Y. SEMEZIS, Editions Eyrolles, 1987.
[12]g_{ik} désigne le produit scalaire des vecteurs e_i et e_k de la base du système de coordonnées, qui est quelconque.

« Le calcul vectoriel est à la fois une *notation* et une *méthode*.

Ses origines géométriques, ses prétentions parfois à remplacer l'Analyse, lui ont imposé à ses débuts une *notation géométrique* très lourde, variable avec chaque auteur, ce qui a retardé beaucoup son extension, en France surtout, où l'on aime la simplicité et la clarté. J'avais déjà essayé, dans la traduction de Coffin, de rapprocher cette notation de celle de l'Analyse, qui a fait ses preuves. On verra dans cet ouvrage que l'enseignement complet et généralisé du Calcul vectoriel n'exige aucun signe nouveau de notation ni d'opération, mais seulement ceux déjà reçus de l'Algèbre et de l'Analyse. Un vecteur, ou un nombre vectoriel, comme un nombre algébrique quelconque, sera représenté par une lettre quelconque, minuscule, majuscule ou grecque, sans autre signe distinctif. [...]

La *méthode* du Calcul vectoriel consiste à introduire, dans les formules et dans le calcul, les éléments eux-mêmes, qui sont les données du problème et qui doivent en être la solution, au lieu d'y introduire séparément les trois composantes, et d'essayer ensuite de reconstruire la solution, géométrique ou mécanique, donnée par ces trois composantes. [...] Là encore, la méthode a été gâtée au début, parce qu'elle a voulu exclure la méthode et la notation analytique, au lieu d'en être un auxiliaire précieux. Les formules vectorielles générales, pour être complètes, doivent être traduites en formules analytiques, en nombres, pour en exprimer les résultats sous toutes leurs faces. Ces formules ont, là encore, un immense avantage, c'est qu'elles contiennent toutes les traductions analytiques, qu'elles les expriment toutes clairement et qu'elles font voir en général celles qui sont les mieux adaptées à la traduction des résultats. ».

Compte tenu du but du livre, il ne reste plus grand chose dans cet ouvrage du contenu du manuel de Coffin. Seul le premier chapitre traite du calcul vectoriel ordinaire, et l'auteur y insiste davantage sur les différents produits de vecteurs ; par exemple, des applications du calcul vectoriel à des questions telles que les alignements de points ne sont plus du tout abordées.

25 - Les ouvrages “modernes” : Artin, Dieudonné, Snapper&Troyer ...

Artin

Dans son ouvrage intitulé « Algèbre géométrique », d'abord publié chez Interscience Publishers, puis en français chez Gauthier-Villars[13] en 1967, Emil Artin signale que ce livre a pour origine des notes d'un cours qu'il a professé à l'université de New York en 1955. Dans l'avant propos, Gaston Julia cite Dieudonné, qui souhaite que le monde

[13]ARTIN E., 1967, Algèbre géométrique, Gauthier-Villars, Paris.

mathématique tout entier soit mis en état d'apprécier ce livre et de le mettre à la place qui lui revient, à côtés des célèbres « Grundlagen der Geometrie » de Hilbert.

Dans le premier chapitre, l'auteur passe en revue les notions qui seront utilisées dans la suite : la dualité et les formes bilinéaires (appelées "couplages") y figurent, ainsi que les groupes et les corps ordonnés.

Le deuxième chapitre traite de la géométrie affine et de la géométrie projective. Dans un premier temps, partant d'une géométrie plane définie à partir de ses points et de ses droites à l'aide d'axiomes, Artin construit le corps k tel que les points de la géométrie puissent être représentés par des coordonnées dans k, et les droites par des équations linéaires. Nous reviendrons en détail sur cette démarche (reposant sur l'introduction des dilatations) au paragraphe 43 suivant. Puis dans un deuxième temps, il traite de la géométrie affine sur un corps de base donné k. Il utilise la notation vectorielle ; la droite passant par un point P dirigée par le vecteur A est définie comme l'ensemble des points $P + t A$, t parcourant le corps k ; la première question étudiée est celle de l'intersection de deux droites : il introduit alors la droite PQ à l'aide de $P + t (Q - P)$; ensuite, il définit les dilatations σ par $\sigma(X) = \alpha X + C$, α désignant un élément de k, et C un vecteur. En reprenant alors la construction du corps associé à cette géométrie, il démontre qu'il est isomorphe au corps k.

Le chapitre III se restreint au cas d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif, pour y introduire une forme bilinéaire et étudier ainsi de manière générale la géométrie orthogonale et la géométrie symplectique.

Les deux derniers chapitres traitent de sujets beaucoup plus spécialisés : le groupe linéaire $GL_n(k)$ dans le cas où k n'est pas commutatif ; la structure du groupe symplectique et du groupe orthogonal.

Dieudonné

L'ouvrage de Jean Dieudonné « Algèbre linéaire et géométrie élémentaire » va avoir une influence considérable en matière d'enseignement, comme en témoigne sa table des matières, dans laquelle on voit apparaître une architecture nouvelle pour construire la géométrie :

Chapitre I : Nombres réels

Chapitre II : Les axiomes de la géométrie euclidienne (il comporte seulement deux pages !).

Chapitre III : Espaces vectoriels

Chapitre IV : Géométrie affine plane

Chapitre V : Géométrie euclidienne plan

Chapitre VI : Géométrie affine à trois dimensions

Chapitre VII : Géométrie euclidienne à trois dimensions.

Dans l'introduction, Dieudonné précise qu'ils s'adresse aux professeurs : il a conçu son ouvrage comme un « livre du maître » à l'aide duquel les professeurs devraient pouvoir « bâtir un enseignement oral vivant et adapté aux élèves ». Il décrit d'abord l'écart qui s'est creusé entre les mathématiques vivantes (leur progrès est un processus historique qui amène à changer le point de vue d'où l'on considère les résultats déjà acquis) et celles de l'Enseignement secondaire qui « en était resté, avec quelques additions superficielles, à ce qu'il était avant Grassmann et Cantor, c'est-à-dire essentiellement la géométrie d'Euclide, l'Algèbre de Viète et de Descartes, et, dans les classes terminales, un peu de Calcul infinitésimal ». Puis il plaide pour un enseignement de l'Algèbre linéaire : « depuis les travaux de Grassmann et Cayley, entre autres (qui remontent à plus de 100 ans), on dispose, en " Géométrie élémentaire ", comme l'a si bien dit Choquet, d'une " route royale " par laquelle, à partir d'axiomes extrêmement simples à énoncer (au contraire de ceux d'Euclide-Hilbert) tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints " cas d'égalité " ou " cas de similitude " des triangles, points d'appui de toute la technique traditionnelle. ». Ce choix présenterait selon lui trois avantages de portée générale :

– assurer la continuité de l'enseignement entre le lycée et l'université ;

– cultiver un apprentissage précoce des méthodes modernes ;

– permettre l'unification des disciplines enseignées,

et d'autre part deux avantages touchant de plus près les mathématiques :

– permettre une présentation de tous les développements de la géométrie élémentaire d'une façon parfaitement rigoureuse, et cela sans effort, présentation qui permet en outre d'éviter de présenter aux élèves des « pseudo-raisonnements qui ne résistent pas à une critique même superficielle »,

– permettre, à travers la distinction affine/métrique de dissocier ce qui était indûment confondu.

Dieudonné précise ensuite la manière dont il a sélectionné les sujets qu'il traite dans l'ouvrage : il s'est laissé guider par ce sur quoi débouche l'enseignement secondaire, tout en résistant à la tentation d'introduire prématurément les théories qui seront enseignées à l'Université. Sa ligne de démarcation est constituée par les dimensions considérées, qu'il a limitées aux dimensions 2 et 3, ce qui permet d'utiliser l'intuition et également de représenter graphiquement tous les phénomènes de l'Algèbre linéaire. Il insiste en précisant bien qu'il ne s'agit pas du tout de faire la moindre théorie générale, mais au contraire, « de présenter à l'élève ces notions sous une forme en quelque sorte expérimentale ». En revanche, il ne se plie pas lui-même à cette contrainte, en choisissant de « n'introduire aucune figure dans le texte, ne serait-ce que pour montrer que l'on s'en passe fort bien » ; mais à ce sujet, il demande à ses lecteurs de faire eux-mêmes les figures en question. Puis il aborde la question des exercices proposés à la suite des exposés : ils sont destinés à montrer aux professeurs que, même si l'algèbre linéaire permet de démontrer très simplement les théorèmes de base de la géométrie, en « poussant un plus avant » on peut trouver problèmes dont la solution sollicite « l'imagination et les facultés créatrices des élèves les mieux doués ». Ainsi, a-t-il fait figurer dans ces exercices le plus possible d'amorces de vastes théories ... « afin de donner quelque idée du genre de questions que se posent les mathématiciens modernes ». Il s'agit donc davantage de « thèmes d'exercices » que d'exercices proprement dits : Dieudonné précise qu'ils « sont destinés à être modifiés, découpés, combinés ou enrichis par leurs utilisateurs éventuels. » [14].

Il aborde également la délicate question de l'insertion de ce programme par rapport à ceux du collège. Tout en affichant son manque de compétence sur le sujet, il isole deux buts qui lui paraissent fondamentaux :
1) faire prendre conscience à l'élève de la nécessité d'un traitement axiomatique des mathématiques ;
2) le familiariser dès que possible avec le maniement de certaines notions abstraites dont la plus difficile lui paraît être la notion d'application (ou transformation) et plus encore celle de calcul sur les applications.

Quant aux moyens pour atteindre ces buts, il évoque la nécessité d'un contact expérimental prolongé avec les notions de base qui seront ensuite axiomatisées, en précisant que cela ne suffit pas : il faut « conditionner » l'enfant en dirigeant ses expériences dans le bon sens, afin que son attention ne s'égare pas. Pour cela, il propose de « libérer l'élève le plus tôt possible de la camisole de force des “ figures ” traditionnelles, en en parlant le moins possible (point, droite et plan exceptés) au profit de l'idée de transformation géométrique du plan et de l'espace tout entiers », de lui apprendre l'art des constructions géométriques, mais « en fuyant comme la peste ...

[14] À titre d'exemples, voici le contenu de la rubrique « Thèmes d'exercices » associé au paragraphe consacré aux droites et hyperplans du chapitre consacré aux espaces vectoriels (Il convient de préciser que Dieudonné se place dans le cadre des espaces vectoriels pour traiter des questions affines : a et b désignant deux vecteurs, b étant non nul, la droite affine passant par a et de vecteur directeur b [resp. le segment ab) est l'ensemble des éléments de la forme $a + \xi b$, ξ décrivant $\mathbf{R}$ [resp. ξ décrivant $[0;1]$).
1) Parallélogrammes.
Si a, b, c, d sont quatre points d'un espace vectoriel E, les propriétés suivantes sont équivalentes :
1° $b - a = c - d$; 2° $d - a = c - b$; 3° les segments ac et bd ont le même milieu. Si de plus, trois quelconques des points a, b, c, d n'appartiennent pas à une même droite, ces trois propriétés sont aussi équivalentes à la suivante : 4° les droites D_{ab} et D_{cd} sont parallèles, et les droites D_{ad} et D_{bc} dont parallèles. On dit alors que le quadruplet (a, b, c, d) est un parallélogramme.
Pour les thèmes suivants, nous n'évoquons que leur sujet, sans reproduire les énoncés (qui occupent plus d'une page, en petits caractères)
2) Parallélogramme de Varignon d'un quadrilatère
3) Caractérisation d'une variété linéaire affine V par la propriété : quel que soit (x, y) appartenant à $V \times V$, la droite D_{xy} est incluse dans V .
4) Groupe des translations et homothéties
5) Intersection d'un hyperplan et d'une variété qui ne lui est pas parallèle.
6) Dilatations et transvections.

la limitation des instruments de dessin à la règle et au compas », mais au contraire « en multipliant les exemples d'appareils mécaniques réalisant des constructions variées, et plus encore réalisant des transformations du plan (pantographe, affinographe, etc.). ». Au sujet de l'introduction des axiomes, il propose de faire plutôt porter l'effort sur des exemples de déduction logique, sans même prononcer le mot « axiome ». Pour résumer, il décrit l'enseignement au collège comme quelque chose d'analogue à l'apprentissage de la physique ou de la chimie, une sorte de « physique de l'espace » : « un mélange savamment dosé d' " expériences géométriques " bien choisies et de raisonnements partiels sur les résultats de ces expériences ». En revanche, il se déclare très hostile à la « méthode de l'échafaudage préalable » [15], consistant avant d'introduire l'algèbre linéaire à partir d'un système d'axiomes réputé plus accessible pour en déduire ensuite les axiomes de l'Algèbre linéaire : « il ne se justifierait que si les notions qui sont à la base des axiomes du plan euclidien, addition des vecteurs, multiplications des vecteurs par un scalaire et produit scalaire de deux vecteurs, étaient extrêmement abstraites et difficiles à représenter graphiquement ; chacun sait qu'il n'en est rien ... Dès lors, à quoi bon surcharger sa mémoire de soi-disants " axiomes " qu'il lui faudra s'empresser d'oublier ? ».

Dans notre troisième partie, nous aurons l'occasion de mesurer l'influence de cet ouvrage de Dieudonné sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire en France, dans la période qui a suivi.

Snapper et Troyer

Nous avons rapidement évoqué leur ouvrage « Metric affine geometry » [16] dans notre introduction, pour commenter une remarque des auteurs relative à l'enseignement de la géométrie au lycée.

Le premier chapitre de l'ouvrage est consacré à la géométrie affine (il occupe 110 pages), le deuxième aux espaces vectoriels munis d'une forme bilinéaire symétrique, cette dernière pouvant être dégénérée, le corps de base étant seulement supposé de caractéristique différente de 2 : l'étude est donc faite dans un cadre général et culmine aux théorèmes de Witt et de Cartan-Dieudonné. Le dernier chapitre est consacré aux espaces affines « métriques », c'est-à-dire ceux dont l'espace vectoriel est muni d'une forme bilinéaire symétrique (avec le même niveau de généralité que précédemment).

Cet ouvrage commence et se termine par une comparaison des différentes axiomatiques pour la géométrie euclidienne. Dans la préface, les auteurs remarquent

---

[15] Il fait ici explicitement allusion à l'ouvrage de G. Choquet, L'enseignement de la géométrie, paru en 1964 aux éditions Hermann, qui propose une telle stratégie.
[16] SNAPPER E., TROYER R. J., 1971, *metric affine geometry*, Dover Publications, Inc., New York.

que les axiomes d'Euclide et Hilbert ont longtemps été les meilleurs, mais que ce n'est plus le cas, l'algèbre linéaire permettant de présenter une axiomatique simple et unifiée de la géométrie euclidienne mais également de nombreuses autres géométries. Dans leur épilogue, ils reviennent sur cette question à propos de la géométrie euclidienne, en soulignant que l'axiomatique utilisant l'algèbre linéaire considère que l'ensemble des nombres réels est déjà connu, et ne nécessite pas d'être défini dans les termes de la géométrie que l'on construit, alors que dans l'axiomatique de Euclide-Hilbert, cette construction des nombres réels est prise en charge. Les auteurs voient dans cette différence la réponse à la question qu'ils formulent en ces termes « Quelle est la raison pour laquelle le système d'Euclide-Hilbert est aussi peut maniable pour la géométrie technique alors que le système fondée sur l'algèbre linéaire est si éminemment adapté à la manipulation des questions concrètes en géométrie ? », et à laquelle ils répondent de la manière suivante : « même si cette tâche [de construction des nombres réels à l'intérieur de la théorie géométrique] est menée à bien, le fardeau qu'elle impose pour les axiomes a prouvé qu'il est incompatible avec un système bien adapté pour la géométrie technique ».

Le calcul vectoriel tel qu'il est enseigné actuellement en France au début du lycée a une réputation a peu près analogue à celle que Snapper et Troyer affichent ici en ce qui concerne l'algèbre linéaire. En effet, le calcul vectoriel est présenté comme un « outil puissant », qui permet de traiter les problèmes d'une manière beaucoup plus simple qu'avec les outils vus antérieurement (qui relèvent d'une géométrie dans laquelle les configurations et les transformations jouent un rôle important). Dans la suite de notre travail, nous aurons l'occasion de soumettre cette réputation à la critique.

3 - Espaces vectoriels normés - Espaces métriques.

31 - Les espaces abstraits de Maurice Fréchet

L'avertissement à la deuxième édition des Leçons de Georges Bouligand évoquait « l'évolution du calcul fonctionnel vers des méthodes se réclamant de l'intervention d'espaces auxiliaires ». Il faisait ici allusion sans aucun doute aux travaux de Maurice Fréchet, dont l'ouvrage intitulé « Les espaces abstraits » est paru en 1928, chez Gauthier-Villars.

Dans sa préface, Fréchet annonce le plan du livre :

« A diverses occasions [...], l'auteur a pu enseigner l'analyse générale à des étudiants qui n'étaient pas tous au courant des conceptions modernes de la théorie des fonctions et de la théorie des ensembles.

Fort de cette expérience, nous avons pensé qu'il valait mieux ne pas suivre dans ce volume un ordre purement logique. [...] Nous nous sommes donc attachés d'abord à introduire et à appliquer celles de ces idées nouvelles qui sont les plus fécondes et qui se présentent le plus naturellement. Au premier rang, se place la conception des espaces où la limite peut être définie au moyen d'une distance, c'est-à-dire les “espaces (D)”. C'est donc sur cette généralisation des espaces à n dimensions que nous avons insisté tout d'abord. Mais, précisément pour montrer que cette notion permet d'aborder des espaces qui sont plus complexes que les espaces à un nombre fini de dimensions, nous avons été amené aussi à introduire et à généraliser dès le début la notion de nombre de dimensions. C'est donc l'application de ces deux idées nouvelles : généralisation de la notion de distance, généralisation de la notion de nombre de dimensions, qui occupera la première partie de cet ouvrage.

Une fois le lecteur familiarisé par ce moyen avec le maniement des ensembles de nature quelconque, il lui sera ensuite plus facile d'aborder dans la seconde partie l'étude d'espaces abstraits plus généraux. ».

Nous fixerons notre attention sur la première partie, dans laquelle figure un chapitre intitulé « Les espaces abstraits affines », qui occupe 23 pages dans cette première partie qui en compte 130.

Dans l'introduction à ce chapitre, Fréchet légitime l'introduction de ces espaces : « Nous avons déjà reconnu que l'Analyse conduit à la considération d'espaces de diverses natures dans chacun desquels il est possible de définir la limite d'une suite de points par l'intermédiaire d'une définition convenable de la distance. Ces espaces rentrent donc dans la catégorie des “espaces (D)”. Mais ne peut-on réduire encore cette catégorie d'espaces ? Il n'y a guère avantage à le faire si l'on n'a en vue que les propriétés de continuité, à la démonstration desquelles la notion de distance fournit l'outil essentiel. Mais si l'on veut, par exemple, étendre à ces espaces la notion de différentielle, c'est-à-dire former une fonctionnelle linéaire approchée de l'accroissement, il paraît difficile de se contenter de l'existence d'une distance. [...] Nous serons donc conduit à chercher s'il y a, en dehors de l'existence d'une distance, quelque caractère des espaces euclidiens qui conviendraient encore à un grand nombre de champs fonctionnels utiles. C'est ainsi que l'on est amené à la conception des espaces affines abstraits.

Ceux-ci ont d'abord été conçus, il y a longtemps, en vue de réalisations très différentes : d'une part, épurer le concept géométrique commun à certaines notions mécaniques et physiques ; d'autre part, systématiser certaines recherches disparates en arithmétique et en algèbre. Aussi, pour la plupart des auteurs, qui se sont occupés des espaces affines – auxquels on a d'ailleurs donné des noms divers : espaces linéaires, espaces vectoriels, ... – n'ont-ils attaché aucune importance aux conditions de continuité [...] C'est à MM. S. Banach et N. Wiener que revient d'avoir (indépendamment et simultanément), associé les propriétés formelles des espaces affines classiques et les propriétés qualitatives de continuité des espaces (D). Leurs définitions fournissent, comme cela était désirable, une catégorie spéciale d'espaces (D), plus proches des espaces euclidiens que de l'espace (D) le plus général. Et cette catégorie contient plusieurs champs fonctionnels importants étudiés précédemment. Toutefois elle est un peu trop étroite et laisse échapper d'autres champs fonctionnels également importants.[...] Nous allons introduire des espaces (D) affines [...] dont les espaces de MM. S. Banach et N. Wiener sont des cas particuliers et qui englobent des champs fonctionnels restés en dehors des espaces de ces deux auteurs. »

Avant de définir ces espaces (D) affines, Fréchet commence par définir les **champs de vecteurs abstraits**. Il en donne deux définitions, d'abord une définition qualifiée de « vectorielle », puis une définition qualifiée de « géométrique ».

Définition vectorielle

Fréchet définit d'abord des **familles de vecteurs abstraits** : en langage moderne, il s'agit d'un espace vectoriel, muni d'une application dans $\mathbf{R}^+$, notée $\| \ \|$, vérifiant toutes les propriétés d'une norme sauf l'inégalité triangulaire.
Puis il définit un **champ de vecteurs abstraits**, qui correspond en langage moderne à un espace affine (que Fréchet note E) associé à un espace vectoriel (que Fréchet désigne par σ) muni d'une application $\| \ \|$ vérifiant toutes les propriétés d'une norme sauf l'inégalité triangulaire. Les points de cet espace affine sont appelés des points abstraits. Le vecteur associé au couple (A, B) de points abstrait est noté $\overline{AB}$.
Dans un tel champ de vecteurs abstraits, on peut définir des droites abstraites, les translations, les homothéties.

Comme exemple d'espace fonctionnel rentrant dans la catégorie des champs de vecteurs abstraits, Fréchet cite l'ensemble des fonctions numériques.

Définition géométrique

Fréchet démontre (la démonstration est longue, et fait appel à d'autres ouvrages du même auteur) que l'on peut caractériser un champ de vecteurs abstraits par la liste de propriétés suivantes :
a) A tout couple (A, B) de points abstraits du support du champ (l'ensemble E), correspond un nombre AB ou BA positif que l'on peut appeler longueur AB ou BA.
b) L'égalité AB = 0 exprime que A et B ne sont pas distincts.

c) Toute droite abstraite est un ensemble de points abstraits applicable sur une droite euclidienne (c'est-à-dire qu'il existe une correspondance ponctuelle biunivoque qui conserve les longueurs).
d) Par deux points abstraits distincts A et B, il passe une droite abstraite.
e) Si deux droites abstraites ont en commun deux points distincts, elles coïncident.
f) Par trois points abstraits non alignés passe au moins un plan.
g) Toute droite d'un plan divise ce plan en deux régions (version allégée de l'axiome de Pasch).
On dit que deux droites sont parallèles si elles sont sans point commun.
h) Étant donné une droite abstraite AB et un point abstrait C non situé sur cette droite, il existe une droite abstraite et une seule passant par C et parallèle à AB.
i) Deux droites parallèles qui rencontrent deux droites parallèles interceptent sur celles-ci des longueurs égales (autrement dit : dans un parallélogramme, les côtés opposés ont des longueurs égales).
j) Les diagonales d'un parallélogramme ne sont pas parallèles.
Un champ de vecteurs abstraits peut n'avoir d'autres points abstraits que ceux d'un plan abstrait de cet espace. Dans le cas contraire,
k) Si deux parallélogrammes ABB"A" , A'B'B"A" non situés dans un même plan ont un côté commun A"B", les côtés opposés à ce côté commun sont aussi côtés opposés d'un même parallélogramme ABB'A'.

Fréchet précise en détail, en partant de a), b), ..., k) comment satisfaire les conditions de la définition vectorielle, en distinguant deux cas :
– tous les points abstraits de E sont situés sur une seule droite abstraite ;
– cas général.
Dans ce dernier cas, il définit la notion de segment dirigé, puis l'équipollence de deux segments dirigés. Pour cela, il distingue trois cas :
– chaque segment a son origine confondue avec son extrémité ;
– les deux segments dirigés sont de longueurs égales, situés sur une même droite et dirigés dans le même sens ;
– en joignant les deux extrémités et les deux origines des deux segments dirigés on obtient un parallélogramme.
Il dit que l'on peut prouver que deux segments dirigés équipollents à un troisième sont équipollents (il renvoie à une de ses publications dans les Annales de la Société mathématique polonaise).
Puis il définit l'addition des vecteurs u et v en considérant des points A, B, C tel que $u = \overline{AB}$ et $v = \overline{BC}$, et en posant $u + v = \overline{AC}$, et en démontrant que le résultat est indépendant des points choisis.

Pour la définition du produit du vecteur u par le nombre réel a, si $u = \overline{AB}$ alors on prend $a.u = \overline{AB'}$ de façon à ce que AB' = |a| AB. Cela définit $a.u$ si $a = 0$ ou si $u = 0$. Sinon, on prend B' sur la droite (AB) tel que $\overline{AB'}$ et $\overline{AB}$ soient de même sens si $a > 0$, et de sens contraire si $a < 0$.
Enfin on prend pour $\|u\|$ la longueur commune aux divers segments dirigés qui représentent u.

Puis, il fait une remarque sur la longueur. Il définit l'ensemble d'étalonnage, (introduit par Minkowski dans un espace à n dimensions) : W étant un point quelconque, l'ensemble d'étalonnage relatif à ce point est l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overline{WM}$ ait pour longueur 1. Il remarque alors que les éléments géométriques d'un champ de vecteurs abstraits est indépendant de l'étalonnage : en d'autres termes, il n'y a aucune dépendance entre les unités de longueurs et par suite entre les longueurs de deux vecteurs non parallèles. « Qu'une de ces longueurs soit beaucoup plus petite que l'autre n'a aucune espèce de signification. ».

Alors, Fréchet en arrive à la définition d'un espace (D) vectoriel, dans laquelle intervient une condition de continuité (condition sans laquelle la notion d'espace affine lui paraît sans intérêt, car trop d'ensembles pourrait alors en être un) :
Un espace (D) vectoriel est un champ de vecteurs abstraits dont le support est un espace (D) – c'est-à-dire un espace métrique – et où la longueur de chaque vecteur peut être prise pour distance des extrémités de ce vecteur. On voit alors que l'ensemble d'étalonnage n'est plus entièrement arbitraire.

On peut également définir un espace (D) vectoriel comme un champ de vecteurs abstraits satisfaisant aux deux conditions suivantes :
1) Quels que soient les vecteurs abstraits u et v, $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$.
2) La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de points abstraits (A_n) converge vers un point abstrait A est que la longueur $\| \overline{AA_n} \|$ tende vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

Si, de plus, en tant qu'espace métrique, l'ensemble (D) vectoriel est complet, c'est un espace de Banach. Dans un tel espace, pour trois points A, B, et C,
$| \| \overline{AC} \| - \| \overline{BC} \| | \leq \| \overline{AB} \| \leq \| \overline{AC} \| + \| \overline{BC} \|$, et si les trois points sont alignés, l'un des signes d'inégalité peut être supprimé. Mais la réciproque n'est pas vraie ! Il n'est pas impossible que la longueur d'une ligne brisée joignant A à B ait une longueur égale à AB : Fréchet cite comme exemple le plan muni de la « taxi-distance ».

Après avoir cité des espaces fonctionnels qui sont des espaces (D) vectoriels, il définit enfin les espaces (D) affines :
Un espace (D) affine est un champ de vecteurs abstraits dont le support est un espace (D) vérifiant les deux conditions suivantes :
1) Toutes les translations et toutes les homothéties sont des transformations bicontinues.
2) Sur chaque droite abstraite prise isolément, la distance (A, B) et la longueur $\| \overline{AB} \|$ ne sont infiniment petites que simultanément quand A, arbitraire, restant fixe, B varie.

Le chapitre se termine par la démonstration dans un tel espace (D) affine d'une généralisation du théorème de Weierstrass permettant d'approcher les fonctions continues sur [0;1].

On retrouve dans ce texte de Fréchet, presque sous la même forme, des questions ayant fait l'objet d'un enseignement en Collège il y a quelques années : par exemple, les questions relatives à l'équipollence, et en particulier la transitivité de cette relation, la définition de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre. Ce texte éclaire sur la difficulté de certaines d'entre elles, même si les axiomes considérés par Fréchet sont un peu plus pauvres que ceux qui étaient utilisés dans l'enseignement.

32 - Les espaces de Minkowski et les espaces euclidiens.

Minkowski semble être le premier mathématicien à étudier, dans le cadre des espaces de dimension finie, les normes autres que la norme euclidienne[17]. D'ailleurs, on appelle espace de Minkowski un espace vectoriel normé de dimension finie.

Une question se pose alors : comment caractériser les espaces de Minkowski qui sont des espaces euclidiens ? Comme nous allons le voir, on peut même étendre la question à des espaces vectoriels normés de dimension quelconque. On se pose alors la question de caractériser ceux qui sont des espaces munis d'un produit scalaire.

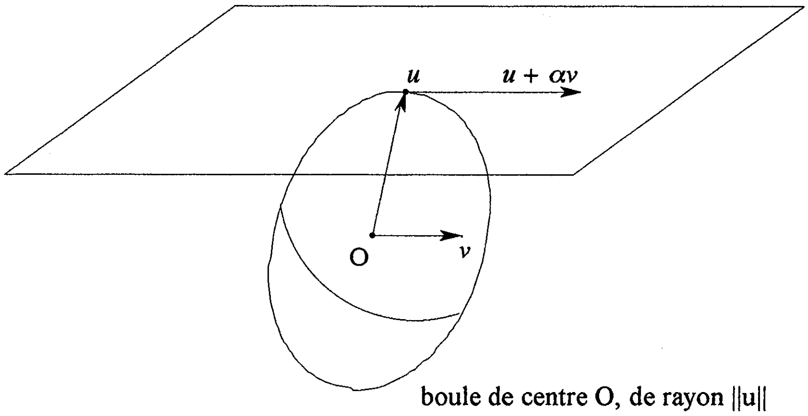
La première caractérisation a été trouvée par P. Jordan et J. Von Neumann dans un article intitulé « On inner products in linear metric spaces », publié en 1935 :
Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel euclidien si et seulement si la norme vérifie la loi du parallélogramme :

Quels que soient u et v, $\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2(\| u \|^2 + \| v \|^2)$.

[17]Notre référence est ici l'ouvrage de A.C. THOMPSON, « Minkowski geometry », Cambridge University Press, 1996.

Le mathématicien Day a montré en 1959 que cette condition peut être affaiblie, car la propriété d'être euclidien est une propriété bi-dimensionnelle: si tout sous-espace de dimension 2 est euclidien, il en est de même de l'espace tout entier.

Dans tout espace normé, on peut définir une relation de normalité, notée $\dashv$, par $u \dashv v$ si et seulement si pour tout α appartenant à R, $\| u + \alpha v \| \geq \| u \|$.



Géométriquement, "$u \dashv v$" signifie que la droite $u + \alpha v$ est incluse dans un hyperplan d'appui de la boule B(O, $\| u \|$) en u.
Cette relation n'est pas symétrique en général.
On peut démontrer que dans un espace de Minkowski, il existe une base formée de vecteurs de la boule unité normaux deux à deux.
Cette relation de normalité permet de donner d'autres caractérisations des espaces normés qui sont euclidiens.
Par exemple, nous citerons les deux résultats suivants.
Si un espace normé X est tel que pour tout couple (u, v) de vecteurs de norme 1, $(u + v) \dashv (u - v)$, alors X est euclidien.
Si un espace normé X est tel que pour tout couple (u, v) de vecteurs de norme 1, $\| u + v \|/2 \leq \| \alpha u + (1 - \alpha) v \|$ pour tout α de [0;1], alors X est euclidien.

33 - Caractérisation du plan euclidien en tant qu'espace métrique

Cette question a été étudiée par Karl Menger en 1928. Ses résultats ont été repris dans l'ouvrage de L. M. Blumenthal, intitulé « Theory and applications of distance geometry », publié à la Chelsea Publishing Company à New York en 1953, puis dans un ouvrage beaucoup plus accessible et connu du même auteur, intitulé « A modern view of geometry » publié chez Dover en 1961. Pour la démonstration, il utilise des résultats établis par Forder en 1958 dans son ouvrage « The foundations of Euclidean

Geometry » paru chez Dover. Voici cette caractérisation qui fournit un système catégorique d'axiomes pour les plans affines euclidiens.

Un ensemble X est un plan euclidien si et seulement si il vérifie les six conditions suivantes :

1) X est un espace métrique
2) L'espace X est métriquement convexe, c'est-à-dire que si p, r sont des points de X tels que $p \neq r$, alors il existe un élément q de X distinct de p et de r tel que $pq + qr = pr$.
3) L'espace X est extérieurement convexe, c'est-à-dire que si p, q sont des points de X tels que $p \neq q$, alors il existe un élément r de X distinct de q tel que $pq + qr = pr$.
4) L'espace X est complet, c'est-à-dire que si (p_n) est une suite de points de X tels que p_ip_j ait pour limite 0 quand i et j tendent vers l'infini, alors il existe un point p tel que la suite pp_n converge vers 0.
5) L'espace X contient trois points a, b, c tels qu'aucune des distances ab, bc, ac n'est égale à la somme des deux autres ; c'est-à-dire $D(a, b, c) \neq 0$.
6) Pour tout quadruplet p, q, r, s de points de X, $D(p, q, r, s) = 0$.

$D(a, b, c)$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & ab^2 & ac^2 \\ 1 & ab^2 & 0 & bc^2 \\ 1 & ac^2 & bc^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$D(p, q, r, s)$ est le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & pq^2 & pr^2 & ps^2 \\ 1 & pq^2 & 0 & qr^2 & qs^2 \\ 1 & pr^2 & qr^2 & 0 & rs^2 \\ 1 & ps^2 & qs^2 & rs^2 & 0 \end{vmatrix}$$

4 - D'autres approches de la géométrie

Dans ce paragraphe, nous évoquerons des façons de présenter la géométrie euclidienne élémentaire autres que celle d'Euclide et celle reposant sur les notions d'espace affine et d'espace vectoriel euclidien, dans le but d'examiner les alternatives du point de vue des organisations mathématiques disponibles pour une transposition à des fins d'enseignement.

41 - L'approche de Hilbert (1899 - traduction française en 1900)

La fin du XIXe siècle et le début du vingtième voient apparaître de nombreux projets d'axiomatisation de la géométrie (Hilbert, Pieri, Tarski, ...) ; la géométrie est constituée de deux parties : des êtres géométriques, et des relations entre ces êtres, dont les propriétés vérifient certains axiomes. Le projet hilbertien des « Grundlagen der geometrie » revisite l'édifice d'Euclide en prenant pour êtres géométriques de base les points et les droites (alors que Tarski n'utilise que les points). Les axiomes d'incidence ou d'association (axiomes du groupe I) ne permettent pas de définir un ordre sur une droite ; pour cela, on a besoin d'exprimer qu'un point d'une droite se trouve entre deux autres points de cette même droite, ce que permettent les premiers axiomes du groupe II ; on peut ainsi définir les segments, et démontrer qu'un point C appartenant au segment AB appartient au segment BC ou au segment AC, mais pas aux deux à la fois, résultat parfois connu sous le nom d'*axiome linéaire de séparation*, pour le distinguer de l'*axiome non linéaire de séparation*, qui dit que toute droite coplanaire avec trois points non alignés A, B et C rencontrant le segment AB rencontre le segment BC ou le segment AC mais pas les deux à la fois. Le mathématicien allemand Pasch ayant montré l'existence de modèles dans lequel l'axiome de séparation linéaire est vérifié et dans lequel l'axiome non linéaire ne l'est pas, Hilbert adjoint ce dernier axiome, connu sous le nom d'axiome de Pasch, a son deuxième groupe d'axiomes. Les axiomes des groupes I et II ne permettent ni de mesurer segments et angles, ni de définir le cercle ; les axiomes du groupe III (axiomes de congruence) permettent de se rapprocher de ce but. Le premier permet d'assurer le report d'un segment, le deuxième permet de démontrer que la relation de congruence entre les segments est une relation d'équivalence ; les trois autres axiomes permettent de définir l'addition des segments, ainsi que la congruence entre les angles. On peut alors montrer l'existence d'angle droits, ainsi que la possibilité de bissecter un segment ou un angle. On peut alors comparer les segments et les angles d'un triangle : un angle extérieur est supérieur à chacun des angles intérieurs non adjacents ; dans tout triangle, au plus grand cîoté est opposé le plus grand angle. Le groupe IV contient un seul axiome : l'axiome d'Euclide. Il est indépendant de ceux qui précède. Si on ne le prend pas en compte, on obtient la géométrie absolue. Si on l'accepte, on obtient la géométrie euclidienne ; sinon, on obtient la géométrie hyperbolique. Enfin, le groupe V comporte deux axiomes : le premier est l'axiome d'Archimède (ou axiome de la mesure) – il est indépendant des axiomes précédents – ; le second est l'axiome de complétude (ou axiome d'intégrité linéaire) : il permet d'introduire la continuité dans la géométrie et d'établir la bijectivité entre une droite et l'ensemble des nombres réels. Ce dernier axiome ne porte pas sur les objets et les relations de la géométrie, mais sur les modèles de cette dernière, auxquels il impose d'être saturés et de contenir tout point limite ; le caractère bien particulier de ce dernier axiome est mis clairement en évidence dans l'axiomatique de Tarski : il y apparaît sous la forme d'un schéma d'axiomes, contenant une infinité d'axiomes.

Cette construction axiomatique de la géométrie, qui n'admet aucune notion de nombre au départ, est réputée difficile, notamment dans la partie où Hilbert construit l'analogue du corps des réels, partie qu'il a appelé le calcul segmentaire. Il construit un premier calcul segmentaire à l'aide du théorème de Pappus–Pascal, puis un autre calcul segmentaire fondé sur le théorème de Desargues, et cette fois-ci, sans employer la congruence. L'exposé de ce deuxième calcul segmentaire est allégé si l'on introduit tout d'abord l'addition vectorielle en partant du théorème de Desargues. Cet ouvrage, important sur le plan des mathématiques, n' a inspiré à lui seul aucune transposition didactique au niveau de l'enseignement secondaire, et semble-t-il très peu au niveau du supérieur, mais de nombreux ouvrages très récents y font référence[18].

Il convient cependant de noter que Hilbert, même s'il n'utilise à aucun moment les vecteurs, établit à l'aide de son calcul segmentaire la possibilité d'élaborer la géométrie par les méthodes de la géométrie analytique. Ce travail sera repris par la suite et formalisé, en ce qui concerne la géométrie affine, à l'aide de la notion d'anneau ternaire[19], dont nous donnerons un bref aperçu au paragraphe 44.

42 - L'approche de Birkhoff (1929)

D'autres reconstructions contemporaines ont cependant été réalisées. Par exemple, George E. Martin publie en 1932 un ouvrage intitulé « The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane ». Cet ouvrage a été republié chez Springer en 1975, et une troisième édition est parue chez le même éditeur en 1996. L'approche est faite en termes de systèmes d'axiomes et de modèles, au sens suivant :
Si on donne une signification aux termes primitifs d'un système d'axiomes à l'aide d'objets pris dans un second système d'axiomes, de manière à ce que les axiomes du premier système soient des théorèmes du second, alors on dit que le résultat obtenu est un modèle du premier système d'axiomes.

Avec cette définition, on comprend ce que peut signifier un modèle euclidien d'une géométrie non-euclidienne. On considère des objets de la géométrie euclidienne et on en fait des termes primitifs de la géométrie non-euclidienne en question. Pour garantir la vérité des axiomes à la suite de cette substitution, il convient évidemment que les énoncés de géométrie euclidienne ainsi obtenus, soient des théorèmes de

[18]Par exemple, l'ouvrage de Erwin ENGELER, *Foundations of Mathematics, Questions of Analysis, Geometry, and Algorithmics*, Springer-Verlag, 1993, ainsi que le deuxième ouvrage cité dans la note 20 suivante.
[19]Voir par exemple l'ouvrage de BLUMENTHAL « A modern view of geometry », cité précédemment, ainsi que l'ouvrage *Éléments de géométrie mécanique*, par Philippe BALBIANI, Vincent DUGAT, Luis FARIÑAS DEL CERRO et Anne LOPEZ, aux éditions Hermès (1994).

géométrie euclidienne. Alors tous les théorèmes de la géométrie non-euclidienne vont pouvoir s'interpréter dans ce modèle par des énoncés vrais de géométrie euclidienne.

L'ouvrage est construit de façon à enrichir petit à petit le système d'axiomes, de façon à faire disparaître des propriétés indésirables d'une part, et de façon à introduire le plus tard possible l'axiome d'Euclide d'autre part. On développe ainsi au maximum la géométrie dite « absolue » dans laquelle on ne fait intervenir ni cet axiome ni sa négation. Puis ensuite, on démontre des énoncés qui, en géométrie absolue, sont équivalents à l'énoncé d'Euclide. On démontre ensuite, que dans le cadre de cette géométrie absolue, il ne peut se présenter que deux possibilités : l'une d'elle conduit à la géométrie euclidienne, l'autre à la géométrie de Lobatchevski ou géométrie hyperbolique.

Ce livre s'adresse à des étudiants ayant au moins le niveau de la licence. On remarquera qu'aucune considération vectorielle n'y apparaît. Il constitue une façon de structurer, sur le plan du savoir « savant », l'édifice enseigné au collège. Les noms donnés aux axiomes se veulent suggestifs.

Axiome 1 : Incidence

a) $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ sont des ensembles ($\mathscr{P}$ est le plan) ; un élément de $\mathscr{D}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{P}$ ($\mathscr{D}$ est l'ensemble des droites du plan).

b) Si P et Q sont deux éléments distincts de l'ensemble $\mathscr{P}$, il existe un élément de $\mathscr{D}$ et un seul auquel P et Q appartiennent (Par deux points distincts passe une droite et une seule).

c) Il existe trois éléments de $\mathscr{P}$ qui n'appartiennent simultanément à aucun élément de $\mathscr{D}$. (Il existe trois points du plan qui ne sont pas alignés)

Axiome 2 : le postulat de la règle (graduée)

Il existe une application d de $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$ dans $\mathbf{R}$, $(P, Q) \mapsto PQ$, telle que pour chaque droite d il existe une bijection f de d dans $\mathbf{R}$, telle que : pour tout couple (P, Q) de points de d on ait : $PQ = |f(P) - f(Q)|$.

On peut alors définir la relation « être entre », les notions de segment, de demi-droite, d'angle (comme réunion de deux demi-droites de même origine, non portées par la même droite), d'ensemble convexe.

Axiome 3 : Séparation

Quelle que soit la droite d appartenant à $\mathscr{D}$, il existe deux sous- ensembles convexes H_1 et H_2 de $\mathscr{P}$ tels que les deux propriétés suivantes soient vraies :

a) $\mathscr{P} \setminus d = H_1 \cup H_2$

b) Quels que soient les points P et Q distincts appartenant respectivement à H_1 et H_2, l'intersection du segment PQ et de d est non vide.

On peut alors définir l'intérieur d'un angle (comme intersectionde deux demi-plans) et démontrer qu'il y a équivalence entre l'appartenance d'un point M à l'intérieur d'un angle $\angle AVB$ et le fait que la demi-droite [VM) coupe le segment AB.

Axiome 4 : l'axiome du rapporteur

Il existe une application m de l'ensemble des angles dans l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ de R telle que :

a) si [VA) est une demi-droite portée par la frontière d'un demi-plan H, alors, quel que soit l'élément r de $]0\ ;\ \pi[$, il existe une demi-droite [VP), où P appartient à H, et une seule telle que $m\,(\angle AVP) = r$;

b) si B est un point de l'intérieur de l'angle $\angle AVC$, alors $m(\angle AVB) + m(\angle BVC) = m(\angle AVC)$.

Axiome 5 : axiome du miroir (ou côté-angle-côté : cet axiome peut être présenté sous deux formes équivalentes)

Pour toute droite d, il existe une bijection de $\mathscr{P}$ sur lui-même, transformant les droites en droites, conservant les distances et les mesures d'angles, laissant d invariante point par point et échangeant les deux demi-plans de frontière d.

Axiome 6 : Postulat d'Euclide (ou pour la géométrie non-euclidienne : l'axiome des parallèles).

L'auteur donne une liste d'énoncés équivalents, en géométrie absolue, à l'axiome d'Euclide. En voici quelques-uns :

Énoncé 1 : (forme donnée par Euclide de son fameux postulat)

Si A et D sont des points du même côté de la droite BC tels que m(ABC) + m(BCD) < π, alors les droites AB et CD se coupent.

Énoncé 2 : Quelles que soient les droites l, m, n, si $l \,//\, m$ et si $m \,//\, n$, alors $l \,//\, n$.

Énoncé 3 : Si deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre.

Énoncé 4 : (forme donnée par Playfair à l'axiome d'Euclide)

Si un point P est hors d'une droite d, il existe une droite et une seule qui passe par P et qui soit parallèle à d.

Énoncé 5 : Si deux droites sont parallèles, et si une droite est perpendiculaire à l'une d'elles, elle est perpendiculaire à l'autre.

Énoncé 6 : Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Énoncé 7 : Une droite perpendiculaire à l'un des côtés d'un angle aigu coupe l'autre côté.

Énoncé 8 : Par tout point intérieur à un angle passe une droite qui coupe ses deux côtés (en des points autres que le sommet de l'angle).

Énoncé 9 : La somme des mesures des angles de tout triangle est π.

Énoncé 10 : Si C est hors du segment [AB] et sur le cercle de diamètre [AB], alors l'angle ACB est droit (l'auteur l'appelle « Théorème de Thalès »).

Énoncé 11 : il existe un triangle dont la somme des angles est égale à π.

Énoncé 12 : Si trois angles d'un quadrilatère sont droits, le 4ème l'est aussi.

Énoncé 13 : Il existe un rectangle.

Énoncé 14 : Il existe deux droites équidistantes l'une de l'autre.

Énoncé 15 : Il existe deux triangles semblables qui ne sont pas isométriques.

À la lecture de cette liste, on mesure le confort que procure une construction de la géométrie reposant sur les propriétés des vecteurs, prises comme axiomes !

George E. Martin, au cours de l'ouvrage, signale l'influence très importante du mathématicien Garrett D. Birkhoff (1884-1944) sur l'enseignement de la géométrie. Dans un ouvrage destiné au grand public, ce dernier a écrit en 1925 :
« Les faits concernant la géométrie plane reposent sur les quatre affirmations suivantes : 1) On peut mesurer les distances sur une droite à l'aide d'une règle graduée. 2) On peut mesurer l'angle que font deux droites avec un rapporteur. 3) Il y a une seule ligne droite passant par deux points donnés. 4) Le plan est homogène et même semblable à lui-même en chacune de ses parties. ».
L'axiome des parallèles, qui ne figure pas dans cette liste, y est caché dans 4).
En 1929, Birkhoff et un enseignant, Ralph Beatley, ont écrit un article intitulé « A New approch to Elementary Geometry » fondé sur les propriétés ci-dessus et donnant des conseils à l'intention des enseignants de lycée. Martin précise que son travail se place dans ce courant d'idées, visant à promouvoir les axiomes de la règle et du rapporteur.

43 - L'approche d'Emil Artin

Dans le chapitre II de son ouvrage « Algèbre géométrique »[20], Artin propose une construction axiomatique de la géométrie affine et de la géométrie projective répondant à la problématique suivante :
« Soit donnée une géométrie plane dont les objets sont les éléments de deux ensembles, l'ensemble des points et l'ensemble des droites. Supposons vérifiés certains axiomes, de nature géométrique. Est-il possible de trouver un corps k tel que les points de notre géométrie puissent être représentés par des coordonnées dans k et les droites par des équations linéaires ? ».

Il décrit ensuite très succintement les grandes étapes de sa construction axiomatique :
« Nous énoncerons tout d'abord les axiomes nécessaires d'une manière assez vague. Les deux premiers sont les axiomes d'incidence : il passe exactement une droite par deux points distincts, et exactement une parallèle à une droite passant par un point donné. Le troisième axiome élimine certains types exceptionnels de géométrie, [...] et nous garantit l'existence de points et de droites en suffisance. Pendant quelques temps, nous ne travaillerons qu'avec ces trois axiomes, et nous préparerons le terrain pour le quatrième (le dernier) qui est le plus intéressant.

---

[20]ARTIN E., 1967, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris (élaboré à partir de notes de cours professé à l'université de New York en 1955).

On introduit certaines symétries[21] de la géométrie, appelées dilatations. Ce sont (à part quelques cas exceptionnels) des applications biunivoques du plan sur lui-même qui transforment tous les points d'une droite en des points d'une droite parallèle.

L'application identique est une telle dilatation, et nous ne pouvons pas nous attendre à en trouver d'autres dans notre géométrie tant que nous n'aurons à notre disposition que les trois premiers axiomes. C'est ici qu'entre en jeu le quatrième. Il se décompose en deux parties 4a et 4b. L'axiome 4a postule l'existence d'une translation (une dilatation d'un type particulier) qui transforme un point donné en un autre point donné quelconque. Avec ce seul axiome 4a on peut déjà construire un certain corps[22]. L'axiome 4b nous garantira l'existence d'une quantité suffisante de dilatations d'un autre type (qui sont analogues aux homothéties du plan euclidien). Au moyen de l'axiome 4b, on montre que les points peuvent être représentés par des coordonnées dans k, et les droites par des équations linéaires. ».

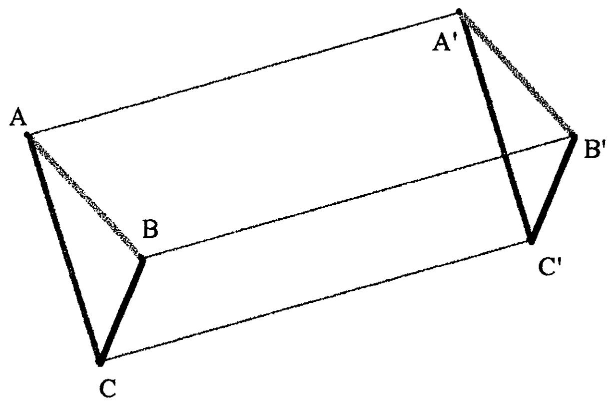
Les axiomes 4a et 4b sont les deux versions affines du théorème de Desargues (cas où les droites sont parallèles, cas où elles sont concourantes). D'où le nom de « plan arguésien » donné à un plan vérifiant les axiomes qui précèdent. Le corps k ainsi construit n'est pas nécessairement commutatif : il l'est si et seulement si un nouvel axiome (dont l'énoncé est l'analogue du théorème de Pappus) est ajouté au système d'axiomes ou remplace le quatrième.

Il étudie ensuite les géométries ordonnées, c'est-à-dire celles dans lesquelles chacune des droites est munie d'une relation d'ordre total et dans laquelle les projections parallèles des points d'une droite sur les points d'une autre droite sont monotones. Le résultat fondamental est le suivant : la condition nécessaire et suffisante pour qu'une géométrie ordonnée provienne d'un corps isomorphe à un sous-corps du corps des nombres réels est l'axiome d'Archimède.

L' “Algèbre géométrique” d'Artin va être à l'origine de plusieurs autres ouvrages, écrits à l'intention des professeurs, dont les auteurs reprendrons la problématique d'Artin de reconstruction de corps de nombres. Citons :
– l'ouvrage de G. Papy intitulé « Nombres et vectoriel plan RÉELS »[23], paru en 1971 ;
– plus récemment, en 1985[24], l'ouvrage de Jacqueline Lelong-Ferrand, écrit à l'intention des professeurs chargés de mettre en place les « nouveaux » programmes de Collège, programmes sur lesquels l'enseignement reçu à l'université les a peu préparés. La reconstruction de la géométrie affine et projective qu'elle y propose s'inspire du

[21]au sens de « transformations ».
[22]Ainsi qu'un espace vectoriel sur ce corps.
[23] Publié conjointement chez Eyrolles et aux Presses Universitaires de Belgique.
[24]LELONG-FERRAND J., 1985, *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris.

travail d'Artin en le détaillant davantage, et en mettant à jour le calcul vectoriel qui n'est pas explicité chez Artin, ce dernier allant directement aux aspects analytiques. En particulier, elle montre comment l'introduction de l'axiome de Desargues « affine » (l'axiome 4a de Artin)



Si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient parallèles et distinctes, alors
les relations (A'B') // (AB) et (A'C') // (AC) impliquent : (B'C') // (BC).

permet de caractériser la notion de « plan de translations », c'est-à-dire un plan tel que quel que soit le couple de points (A, A'), il existe une translation τ telle que $\tau(A) = A'$. On peut alors démontrer que le groupe des translations est commutatif.

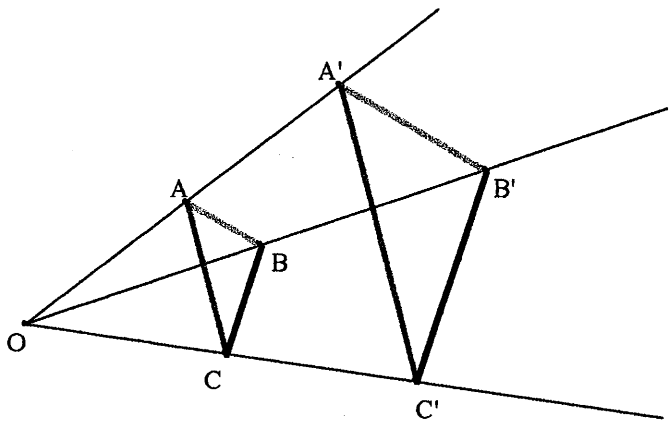
Un exemple important de plan de translation (qui a été exploité par Gustave Choquet dans son ouvrage « L'enseignement de la géométrie ») est donné dans un exercice : il s'agit d'un plan dans lequel à tout couple (A, B) de points on peut associer un point de la droite (AB) appelé milieu de (A, B) et noté m(A, B) de telle sorte que :
i) m(A, B) = m(B, A) ; ii) m(A, A) = A ; iii) si A' et B' sont les images des deux points A et B par une projection sur une droite $\mathscr{D}$ suivant une direction δ, alors m(A', B') est l'image par cette projection de m(A, B). On peut alors démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu, puis démontrer qu'un tel plan vérifie le petit axiome de Desargues, et donc que c'est un plan de translation.

Dans un tel plan de translation[25], on peut définir un calcul vectoriel. On peut par exemple définir l'équipollence des bipoints à partir des translations ou en termes de parallélogrammes en distinguant deux cas (suivant que les points sont alignés ou non) :

[25]Les plans de translation font l'objet de recherches très récentes, comme en témoigne le numéro 1611 des « Lectures Notes in Mathematics » (Norbert KNARR, 1995), précisément intitulé : « Tranlation planes ». On y signale que les résultats fondamentaux relatifs aux plans de translations (définis comme des plans affines tels que le groupe des translations opère transitivement sur l'ensemble des points) ont été obtenus en 1954 par le mathématicien allemand André.

quelle que soit la méthode choisie, la transitivité de la relation met en jeu l'axiome de Desargues affine. Ensuite, on peut démontrer le croisement des équipollences , définir l'addition des vecteurs, et montrer que l'on obtient ainsi un groupe abélien. On peut même démontrer dans un tel plan de translation le « petit » théorème de Thalès relatif aux divisions régulières sur une droite. L'ensemble des vecteurs peut ainsi être muni d'une structure d'espace vectoriel sur **Q** ou sur **Z**/*p***Z** suivant que la caractéristique du plan[26] est nulle ou égale au nombre premier p.

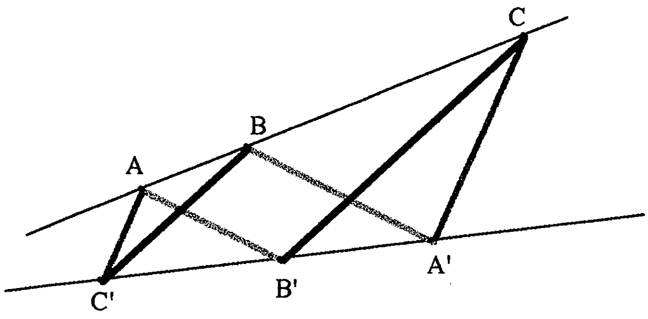
Pour obtenir un plan affine, et en particulier obtenir un corps K sur lequel l'ensemble des vecteurs obtenu précédemment soit un espace vectoriel, il convient de prendre un axiome plus fort, le « grand » axiome de Desargues affine (l'axiome 4b de Artin) :



Si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes et distinctes, alors les relations (A'B') // (AB) et (A'C') // (AC) impliquent : (B'C') // (BC).

On obtient alors un « plan arguésien », qui est automatiquement un plan de translation. La construction du corps se fait à l'aide des homothéties vectorielles, auxquelles on adjoint l'application nulle. Ce corps est commutatif si et seulement si le plan vérifie l'axiome de Pappus (axiome qui implique les deux axiomes de Desargues qui précèdent) :

[26]La caractéristique du plan est le plus petit entier p (supérieur à 1), s'il existe, tel qu'il existe un vecteur a pour lequel $pa = 0$. Sinon, on pose $p = 0$.



Si (A,B,C) et(A,'B,'C') sont deux triplets de points alignés et distincts, alors les relations (AB') // (A'B) et (AC') // (A'C) impliquent : (BC') // (B'C).

L'auteur reprend ensuite l'étude des plans ordonnés (plans dont chaque droite est munie de deux relations d'ordre total opposées l'une de l'autre), en montrant comment l'axiome de Pasch permet de démontrer que les projections d'une droite $\mathscr{D}$ sur une droite $\mathscr{D}'$ parallèlement à une direction sont des applications monotones, puis que, dans un plan de translation, les translations de toute droite orientée sont des applications croissantes, ce qui permet d'ordonner le groupe des vecteurs de direction donnée. Si, de plus, on impose que cet ordre soit archimédien, on peut alors démontrer le théorème de Thalès ; si on désigne par $K_{\mathscr{P}}$ l'ensemble des abscisses des points d'une droite (quelconque) du plan, on peut alors démontrer que le plan est un plan affine, associé à un espace vectoriel sur $K_{\mathscr{P}}$ de dimension 2 ; autrement dit, *un plan de translation ordonné archimédien est un plan affine sur le sous-corps $K_{\mathscr{P}}$ de* **R**. Ce résultat, qui constitue la base de la géométrie élémentaire, montre la puissance des axiomes liés à l'ordre et de l'axiome d'Archimède, qui impliquent le grand axiome de Desargues et l'axiome de Pappus.

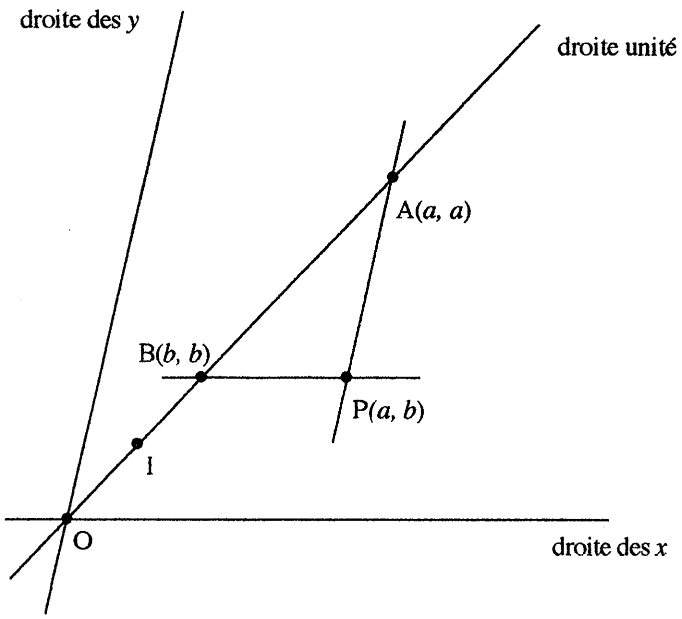
Dans une autre partie de l'ouvrage, elle propose une reconstruction axiomatique de la géométrie euclidienne et non-euclidienne plane, s'inspirant beaucoup du travail de Martin, ainsi que d'un ouvrage de Robert Brisac, publié en 1955 chez Gauthier-Villars intitulé « Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne », que nous allons commenter brièvement dans le paragraphe suivant.

L'ouvrage écrit par Annie Cousin-Fauconnet, « Enseigner la géométrie au collège, un chemin pour la découverte progressive par l'élève », propose aux enseignants, selon les termes utilisés par Mme Lelong-Ferrand dans la préface, une « axiomatique adaptable à l'enseignement », ainsi qu'un « chemin pour la découverte progressive de la géométrie, basé sur cette axiomatique et susceptible d'intéresser les élèves, avec des exemples d'activités déjà expérimentées dans de nombreuses classes ». L'axiomatique utilisée ici n'est pas la même que dans l'ouvrage de Mme Lelong-Ferrand évoqué précédemment[27], même si certaines démonstrations (symétrie de la relation « est perpendiculaire à », parties de l'étude du groupe des isométries, étude des symétries centrales) en sont directement inspirées.

44 – L'approche de Blumenthal (1961)

Nous allons évoquer ici l'adéquation entre la structure d'un plan vérifiant les axiomes d'incidence (d'un plan affine) et celle d'anneau ternaire annoncée au paragraphe 41. L'idée est de construire un ensemble abstrait de coordonnées des points du plan, et de le munir d'une structure algébrique (on retrouve la démarche d'Artin) telle que l'on puisse inverser le processus : à partir d'une telle structure algébrique, définir un plan (de type affine). Cette démarche est influencée par les travaux de Hilbert.

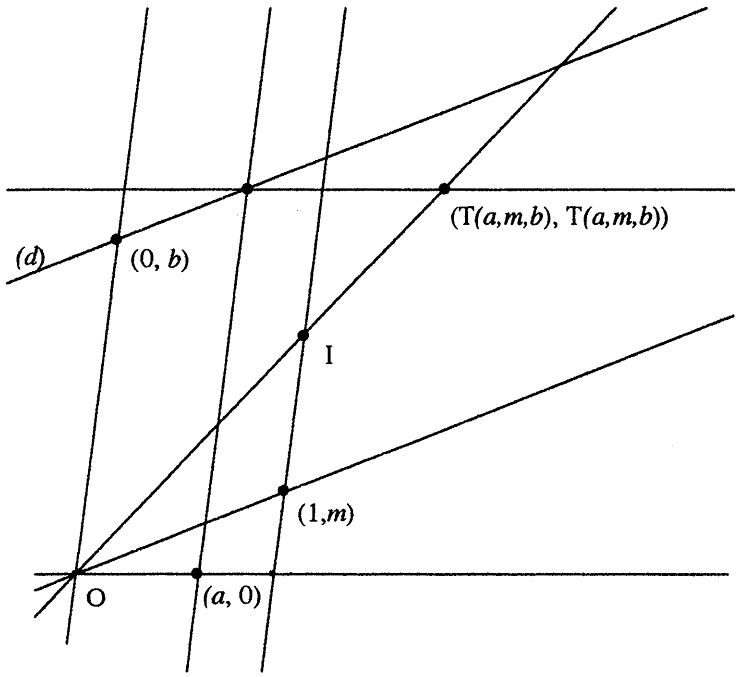
Au début, on part d'un plan tel que par deux points distincts passe une droite et une seule, dans lequel il existe au moins quatre points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés, et dans lequel l'axiome d'Euclide soit vrai. Ensuite, on définit un système de coordonnées de la manière suivante :



Soit O un point du plan, et trois droites passant par O, respectivement appelées « droite des x », « droite des y » et « droite unité ». I est un point de la droite unité distinct de O. Soit Γ un ensemble, appelé ensemble des coordonnées, et γ une bijection de la droite unité sur Γ. On pose $0 = \gamma(O)$ et $1 = \gamma(I)$; pour tout point A de cette droite, on note $a = \gamma(A)$.

[27]En fait, elle est presque identique à celle développée par Gustave Choquet, que nous détaillerons au paragraphe 45 suivant.

On peut alors associer à tout point P du plan un couple de coordonnées : à un point A de la droite unité, on associe le couple (a, a) ; à un point P n'appartenant pas à cette droite, on associe le couple (a, b) défini comme l'indique la figure.
On appelle « droite des pentes » la parallèle à la droite des y passant par I.
Considérons un triplet quelconque (a, m, b) d'éléments de Γ. Nous allons lui associer un élément de Γ, noté $T(a, m, b)$, qui nous permettra de caractériser les droites non parallèles à la droite des pentes.



Considérons la droite (d) de pente m, d'ordonnée à l'origine b. La parallèle à la droite des y passant par le point de coordonnées $(a, 0)$ coupe (d) en un point dont l'ordonnée est $T(a, m, b)$.
La droite (d) a alors pour équation $y = T(x, m, b)$.
L'opérateur ternaire plan T munit l'ensemble Γ d'une structure d'anneau ternaire $[\Gamma, T]$, caractérisée par les propriétés suivantes :
a) Pour tous les éléments a, b, c de Γ, $T(0, b, c) = T(a, 0, c) = c$;
b) Pour tout élément a de Γ, $T(a, 1, 0) = T(1, a, 0) = a$;
c) Pour tous les éléments m, m', b et b' de Γ, si $m \neq m'$, alors l'équation $T(x, m, b) = T(x, m', b')$ a exactement une solution dans Γ ;
d) Pour tous les éléments a, a', b et b' de Γ, si $a \neq a'$, alors le système d'équations $\{T(a, x, y) = b, T(a', x, y) = b'\}$ a exactement une solution dans Γ ;
e) Pour tous les éléments a, m et c de Γ, l'équation $T(a, m, x) = c$ a exactement une solution dans Γ.
Inversement, si l'on se donne une structure d'anneau ternaire $[\Gamma, T]$, il est possible de définir un plan vérifiant les axiomes d'incidence rappelés ci-dessus : les points sont les couples d'éléments de Γ ; quant aux droites, elles sont de deux sortes : celles de

première espèce sont les ensembles de la forme $\{(a,y)$; y appartenant à $\Gamma\}$; celles de seconde espèce sont les ensembles de la forme $\{(x, T(x, m, b)$; x appartenant à $\Gamma\}$. Si à l'aide du plan ainsi obtenu on définit comme précédemment l'anneau ternaire associé, on retrouve l'anneau ternaire $[\Gamma, T]$. Il y a donc adéquation complète entre l'entité géométrique qu'est le plan muni de ces quelques axiomes d'incidence (affines) et l'entité algébrique qu'est l'anneau ternaire.

Comme Hilbert l'a fait dans les Fondements de la géométrie pour l'élaboration de son calcul segmentaire, il est possible de munir l'ensemble Γ d'une addition et d'une multiplication. Sans axiomes supplémentaires, l'addition admet 0 comme élément neutre, et l'expression $a + b = c$ détermine toute coordonnée parmi a, b et c sitôt que deux d'entre elles sont données : $(\Gamma, +)$ possède une structure algébrique de boucle. Il en est de même pour $(\Gamma^*, .)$. D'autre part, il n'est pas possible de définir la relation permettant de définir les vecteurs à partir du parallélisme ; on a des difficultés pour définir l'équipollence de deux bipoints portés par une même droite, mais une autre difficulté encore plus grande surgit : même en se limitant à des bipoints portés par des droites deux à deux distinctes, la transitivité de la relation n'est pas assurée. Hilbert produit un exemple dans lequel elle n'est pas vraie ; plus tard, Moulton donne un autre exemple, plus simple, de plan non arguésien, que l'on trouvera dans l'édition de 1971 des Fondements de la géométrie de Hilbert préparée par Paul Rossier, ainsi que dans les ouvrages de Martin, de Blumenthal[28] et de Samuel[29].

En revanche, si l'on rajoute l'axiome de Desargues (Axiome IVa de Artin, ou petit axiome de Desargues affine de Mme Lelong-Ferrand) au système d'axiomes, on peut définir la relation d'équipollence à partir du parallélisme, démontrer que c'est une relation d'équivalence, définir l'addition des vecteurs et montrer que l'on obtient ainsi un groupe commutatif. Du point de vue de l'anneau ternaire $[\Gamma, T]$, l'adjonction de ce premier axiome de Desargues fait de $(\Gamma, +)$ un groupe commutatif. Cette adjonction est par ailleurs équivalente à la propriété suivante : toute droite du plan qui coupe la droite des y a une équation de la forme $y = x.m + b$. En ce qui concerne la multiplication, ce premier axiome de Desargues permet de démontrer sa distributivité à droite par rapport à l'addition. En résumé, on dit que $[\Gamma, T]$ est un système de Veblen-Wedderburn pour résumer les propriétés suivantes :
1) $(\Gamma, +)$ un groupe commutatif ; 2) $(\Gamma^*, .)$ a une structure de boucle ; 3) pour toute coordonnée a, $a.0 = 0.a = 0$; 4) la multiplication est distributive à droite par rapport à l'addition.

---

[28]Le plan de Moulton peut également être muni d'une distance et d'une mesure des angles : son intéressante géométrie est traitée en détail dans l'ouvrage suivant :
MILLMAN Richard S., PARKER George D., 1991, *Geometry, a metric approach with Models*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Londres, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelone.
[29]SAMUEL P., 1986, *Géométrie projective*, PUF, Paris., pp. 46-48.

La réciproque est vraie : si l'anneau ternaire est un système de Veblen-Wedderburn, alors le plan possède la première propriété de Desargues. L'adjonction de l'axiome IVb de Artin (grand axiome de Desargues affine de Mme Lelong-Ferrand) permet de munir Γ d'une structure de corps. Enfin, l'adjonction de la propriété de Pappus rend ce corps commutatif : on retrouve les résultats déjà présents dans les ouvrages de Hilbert et de Artin.

45- L'approche de Robert Brisac (1955)

Dans la préface, René de Possel résume bien les caractéristiques de l'ouvrage et le projet de son auteur. Après avoir remarqué que dans la plupart des manuels d'enseignement de la géométrie on fait appel à l'intuition tout en énonçant certains axiomes, que certains mots ne sont pas très clairement définis ou ont plusieurs acceptions, il trouve cet état de fait regrettable d'une part pour les bons élèves et d'autre part pour les professeurs qui « peut-être, dans ces conditions, ne peuvent acquérir des idées précises sur les bases de la théorie qu'ils doivent enseigner ». Le livre est fait pour combler cette lacune, et s'adresse également à toute personne qui s'intéresse à la géométrie sans être initiée aux mathématiques actuelles et à leur méthode axiomatique : « Elle prendra contact avec cette méthode ; elle verra comment, en complétant tant soi peu les traités classiques, on peut parvenir à un exposé complet et rigoureux, partant d'un petit nombre d'axiomes, et ne faisant aucun appel à l'intuition. »

Au lieu de partir comme Hilbert de l'égalité des segments et des angles, Brisac met l'accent sur le groupe de déplacements, conformément aux souhaits d'Émile Borel.

• Après avoir, dans un premier chapitre, énoncé les axiomes d'appartenance et de partage, il introduit les déplacements de l'espace dans le deuxième chapitre à l'aide de quatre axiomes que nous allons énoncer :

– Les déplacements de l'espace forment un sous-groupe du groupe des permutations de l'espace.

– A, B, C étant transformés dans un déplacement en A', B', C', si A est entre B et C, alors A' est entre B' et C'.

– Si un déplacement conserve un élément rectiligne[30], il en conserve chacun de ses points.

– Étant donné deux éléments plans quelconques, il existe un déplacement et un seul qui transforme l'un en l'autre.

• Le chapitre III met en scène les deux derniers axiomes relatifs aux déplacements. Le premier va permettre de définir la perpendicularité des droites et des plans, et de

[30]Un élément rectiligne est défini comme un ensemble ayant deux éléments : une demi-droite ouverte et son bord, c'est-à-dire son origine ; on définit de même un élément plan (demi-plan ouvert et son bord) et un élément spatial (demi-espace ouvert et son bord)

définir les retournements ; c'est la raison pour laquelle on l'appelle parfois l'axiome « de retournement d'un segment » :
– Il existe des déplacements qui échangent deux points quelconques.
Quant au deuxième, on peut l'appeler « axiome de retournement d'un angle » :
– Il existe un déplacement qui échange les deux côtés d'un angle.
• Le chapitre IV introduit le dernier axiome, l'axiome d'Euclide. L'étude des notions de glissement sur un plan (déplacement conservant le plan et chacun des demi-espaces), puis de glissement sur une droite (déplacement qui est un glissement de tout plan la contenant, et qui conserve la droite et chacun des demi-plans qu'elle détermine dans un tel plan) permet d'introduire la notion de translation ; l'axiome d'Euclide permet de démontrer qu'un glissement sur une droite peut être défini sans faire référence à une droite particulière : un tel glissement est alors nommé « translation ». L'auteur utilise une notation vectorielle $\overrightarrow{\mathscr{A}}$ ou $\overrightarrow{MM'}$ pour les désigner. Elles forment un groupe commutatif, et la notation additive en termes de vecteurs est utilisée. Ensuite sont introduites les translations parallèles à une droite, à un plan, ce qui permet de définir les projections, et de décomposer toute translation de l'espace d'une manière unique sous forme d'une somme de translations parallèles à trois droites non coplanaires.
• Le chapitre V est consacré à la mesure des translations. Il commence par la théorie de la mesure des grandeurs, dans le cadre des groupes archimédiens complets. Pour revenir à la question de la mesure des translations, l'auteur introduit trois nouveaux axiomes : l'axiome d'ordre, l'axiome d'Archimède et l'axiome de continuité, qui sont des traductions en termes de translations des axiomes portant le même nom dans la théorie de Hilbert. Le premier, qui énonce que si B est entre A et C, A n'est pas entre B et C, est ici traduit sous la forme suivante :
– La somme de deux translations de même sens est une translation de même sens.
• Le dernier chapitre est consacré aux coordonnées et au produit scalaire.
La commutativité du produit scalaire résulte de l'axiome de retournement de l'angle. À ce sujet, René de Possel, dans la préface, attire l'attention du lecteur initié sur l'originalité de l'exposé : « ... le lecteur verra avec bonheur comment [l'auteur] a disséqué la démonstration classique du théorème de Pythagore, dégagée de ses petits triangles, pour la ramener à la commutativité du produit scalaire, laquelle résulte de l'axiome de retournement de l'angle. ».

En appendice, une théorie « complète et enseignable » de l'orientation dans l'espace est proposée.

45 – L'approche de Gustave Choquet (1964)

Nous l'avons brièvement évoquée dans le paragraphe 25 : Dieudonné fait allusion à cette approche sous le nom de « méthode de l'échafaudage préalable », car elle se propose de définir un système d'axiomes[31] permettant de « dégager commodément la structure vectorielle de l'espace ainsi que l'existence et les propriétés du produit scalaire ». Nous verrons plus loin que cet ouvrage aura une influence sur l'évolution des programmes d'enseignement en France.

Choquet propose en fait deux axiomatiques, la deuxième mettant davantage l'accent sur les propriétés métriques du plan, et sur la symétrie orthogonale. Voici les axiomes de la première.

Axiome O:

Le plan contient au moins deux droites, et toute droite contient au moins deux points. (Cet axiome peut se déduire des suivants).

Axiomes d'incidence

Axiome Ia :

Pour tout couple (x, y) de points distincts, il existe une droite et une seule contenant x et y.

Axiome Ib :

Pour toute droite D, et pour tout point x, il passe par x une parallèle et une seule à D.

Axiomes d'ordre

Axiome IIa :

À toute droite sont associées deux structures d'ordre total, opposées l'une de l'autre.

Choquet préfère introduire l'ordre plutôt que la relation « être entre », qu'il juge moins facile à utiliser. Il définit alors les demi-droites et les segments, ainsi que la notion d'ensemble convexe.

Axiome IIb : (Relations entre les structures d'ordre des diverses droites)

Pour tout couple (A, B) de droites parallèles, quels que soient les points a et a' de A, b et b' de B, toute parallèle à ces droites qui rencontre le segment $[a, b]$ rencontre aussi le segment $[a', b']$.

---

[31]Cette axiomatique a été présentée pour le première fois en 1959, dans le cadre d'un séminaire de l'OCDE à Royaumont.

Cet axiome lui permet de démontrer que l'image d'un segment par une projection parallèle est un segment puis, en utilisant le fait que l'image réciproque d'un convexe par une telle projection est un convexe, permet de démontrer que toute droite définit une partition du plan, ce qui lui permet de définir les demi-plans.

Axiome IIIa : structure affine de chaque droite.
Au plan Π est associé une application d de $\Pi \times \Pi$ dans $\mathbf{R}^+$, appelée *distance* et telle que :
a) pour tous points x, y de Π, $d(x, y) = d(y, x)$;
b) Pour toute droite orientée D, tout x de D, et pour tout nombre $l \geq 0$, il existe un point y de D et un seul tel que : $x \leq y$ et $d(x, y) = l$;
c) $(x \in [a, b]) \Rightarrow (d(a, x) + d(x, b) = d(a, b))$.

Choquet fait alors remarquer qu'il utilise seulement le fait que $\mathbf{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné et archimédien, sans utiliser l'axiome de continuité. Ce nouvel axiome lui permet de définir, sur chaque droite orientée pointée en un point a, une unique bijection f de cette droite sur $\mathbf{R}$ telle que $f(a) = 0$, et telle que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ pour tous x, y appartenant à la droite.
$f(x)$ est alors appelé l'abscisse du point x de cette droite, pointée en a.
La bijection f fait de la droite pointée un espace vectoriel de dimension 1.
Il peut ensuite définir le milieu d'un bipoint, à l'aide de son abscisse, puis la notion de parallélogramme.

Axiome IIIb : relation entre les structures affines des diverses droites.
Pour tout couple (A, B) de droites parallèles, quels que soient les points a et a' de A, b et b' de B, toute parallèle à ces droites passant par le milieu du segment $[a, b]$ passe aussi par le milieu du segment $[a', b']$.

Il peut alors démontrer que toute projection oblique d'un parallélogramme est un parallélogramme, ce qui lui permet de définir, dans le plan pointé (Π, O) une addition : la somme des deux points x et y est le point z tel que (O, x, z, y) soit un parallélogramme. On démontre alors que l'on obtient un groupe commutatif, et que toute translation du groupe ainsi obtenu transforme une droite passant par O en une droite parallèle. Ce résultat se démontre sans faire intervenir la structure d'ordre du plan, ce qui ouvre la possibilité à une axiomatique plus faible (la deuxième, que nous exposerons rapidement ci-dessous).

Ensuite, il cherche à caractériser ces translations indépendamment du point O : ce sont les applications f de Π dans Π telles que , pour tous x, y de Π, $(x, f(x), f(y), y)$ est un parallélogramme.

Choquet introduit alors le langage des vecteurs libres : pour tout couple (x, y) de points de Π, le vecteur libre associé, noté $\overrightarrow{xy}$, n'est qu'une autre manière de désigner l'unique translation transformant x en y. La composition des translations est alors noté additivement, ce qui donne le groupe additif des vecteurs libres du plan.

Il lui reste à définir la multiplication externe. Pour cela, il se place dans le plan pointé (Π, O) et exploite le fait que chaque droite pointée est déjà un espace vectoriel de dimension 1. La propriété faisant intervenir des sommes de vecteurs :

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

est la seule dont la démonstration pose alors problème : cette dernière repose sur le théorème connu (en France) sous le nom de théorème de Thalès. La démonstration de ce dernier théorème est la seule faisant intervenir, dans le cas où λ n'est pas un nombre rationnel, l'axiome de continuité.

Enfin, on peut démontrer que tous les espaces vectoriels (Π, O), lorsque O décrit Π, sont isomorphes, et que l'on peut munir l'ensemble des vecteurs libres d'une structure d'espace vectoriel ne dépendant pas de l'origine choisie. De plus, l'application $x \mapsto \overrightarrow{Ox}$ est un isomorphisme de (Π, O) sur l'espace vectoriel $\mathscr{V}$ des vecteurs libres de Π.

Quant à la structure euclidienne du plan, on peut l'obtenir en adjoignant deux nouveaux axiomes à l'ensemble de ceux qui précèdent.

Axiome IVa : (des perpendiculaires)

La perpendicularité (noté $\perp$) est une relation binaire sur l'ensemble des droites de Π, telle que :

a) $(A \perp B) \Leftrightarrow (B \perp A)$

b) $(A \perp B) \Rightarrow$(A et B ne sont pas parallèles)

c) Pour toute droite A, il existe au moins une droite B telle que $A \perp B$.

d) Pour tout couple (A, B) tel que $(A \perp B)$, on a l'équivalence : $(B // B') \Leftrightarrow (A \perp B')$.

On peut alors définir le rapport de projection de deux demi-droites de même origine A_1 et A_2, noté $c(A_1, A_2)$.

Axiome IVb (de symétrie)
Pour tout couple (A_1, A_2) de demi-droites de même origine, $c(A_1, A_2) = c(A_2, A_1)$.

On peut alors définir le produit scalaire ....

La deuxième axiomatique, seulement donnée en annexe de l'ouvrage, permet de commencer le développement de la géométrie par les notions métriques. Elle comporte les axiomes I et II précédents ; le troisième axiome comporte l'axiome IIIa précédent, auquel on ajoute l'inégalité triangulaire stricte :
d) Pour tout triplet (a, x, b) de points non alignés, on a : $d(a, b) < d(a, x) + d(x, b)$.

On en déduit une caractérisation des segments en termes de distances :

$$(x \in [a, b]) \Leftrightarrow (d(a, x) + d(x, b) = d(a, b))\,;$$

ainsi que le fait qu'une isométrie, application conservant les distances, conserve l'alignement et la relation « être entre », ce qui permet de démontrer qu'elle transforme un segment en un segment, une droite en droite, deux droites parallèles en droites parallèles, un demi-plan en un demi-plan.

Le quatrième axiome, dit du pliage, est le suivant :
Axiome IV'
Pour toute droite D, il existe au moins un pliage autour de D (c'est-à-dire une isométrie de l'un des demi-plans fermés de frontière D sur l'autre, laissant invariant tout point de D).
On peut alors définir la projection orthogonale sur une droite D, la symétrie orthogonale par rapport à D, mais également la notion de « droite perpendiculaire à une droite » : « D est perpendiculaire à D' » signifiant « D' est égale à sa symétrique par rapport à D ».
On peut alors démontrer que la relation ainsi définie vérifie l'axiome IVa, ainsi que l'axiome IVb.
On peut alors caractériser la médiatrice d'un segment ab en termes de distances, ainsi que les demi-plans qu'elle détermine, comparer les obliques $d(x, a)$ et $d(x, b)$ et montrer qu'elles sont dans le même ordre que $d(p, a)$ et $d(p, b)$, p désignant le projeté orthogonal de x sur la droite ab.

On peut démontrer le « petit théorème de Thalès » relatif aux divisions régulières.

Enfin, l'auteur donne une démonstration du théorème de Pythagore ne faisant pas intervenir le produit scalaire, reposant sur l'emploi du rapport de projection orthogonale.

Nous verrons dans notre troisième partie que cet ouvrage de Choquet aura une grande influence sur l'évolution des programmes en France.

47 – L'approche de Radu Miron et Dan Brânzei (1995)

L'ouvrage de Radu Miron et Dan Brânzei « Backgrouds of arithmetic and geometry »[32], paru en 1995, présente en quelque sorte une synthèse des diverses façons de présenter axiomatiquement la géométrie. Cette question occupe six chapitres du livre, que nous allons décrire dans l'ensemble brièvement, avant de revenir en détail sur certains d'entre eux.

– le chapitre IV, dans lequel les auteurs présentent les fondements algébriques de la géométrie, à l'aide de ce qu'ils nomment une axiomatique minimale de type Weyl, dans laquelle ils introduisent les espaces vectoriels, affines, et euclidiens. Cette question a été revisitée par R. Miron, du point de vue logique, de façon à ce que le système d'axiomes soit non contradictoire et minimal, ce qui l'a conduit à définir de nouveaux objets, appelés respectivement « espaces presque vectoriels », « espaces presque affines », avant d'introduire ceux auxquels nous sommes habitués ; la définition de ces derniers apparaît alors sous un jour nouveau.

– le chapitre V construit la géométrie sur la base du système d'axiomes de Hilbert, et étudie la question de la non-contradiction, de l'indépendance et de la catégoricité du système d'axiomes à travers des modèles arithmétiques de ce système.

– dans le chapitre VI, l'axiomatique de Hilbert est comparée à celle de Birkhoff, qui a été récemment adopté pour l'enseignement de la géométrie dans de nombreux pays.

– le chapitre VII est consacré à l'étude des principaux types de transformations géométriques, de leur action sur les figures géométriques fondamentales, ainsi qu'à leur composition.

– le chapitre VIII présente la conception des géométries selon Félix Klein.

– Enfin, le dernier chapitre est écrit par Francise Radó, qui présente une construction de la géométrie à l'aide d'une axiomatique de type Bachmann, dans laquelle la notion d'isométrie est une notion primitive.

Nous allons maintenant revenir sur les chapitres mettant directement en jeu les vecteurs : le chapitre relatif à l'axiomatique de type Weyl, et le chapitre sur les transformations, les auteurs fournissant dans ce dernier des éléments intéressants relatifs à la définition des vecteurs en terme de classes d'équivalence de bipoints.

[32]MIRON R. et BRÂNZEI D., 1995, Backgrouds of arithmetic and geometry, an introduction, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

La raison de leur introduction est la suivante : le système d'axiomes usuellement utilisé pour définir un espace vectoriel n'est pas minimal : on peut renoncer à la commutativité de l'addition et affaiblir l'axiome $1.\, x = x$.

Un espace presque vectoriel est un ensemble non vide E, auquel appartient un élément noté 0, muni d'une loi de composition interne, noté +, et d'une loi de composition externe à opérateurs dans **R**, noté *, vérifiant les axiomes suivants :

1. + est associative ;
2. $\forall x \in \mathrm{E}, x + 0 = x$;
3. $\forall x \in \mathrm{E}, \exists (-x) \in \mathrm{E}, x + (-x) = 0$;
4. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x, y \in \mathrm{E}, \alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$;
5. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathrm{E}, (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$;
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathrm{E}, \alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x$;

Un espace vectoriel est un espace presque vectoriel dans lequel l'axiome suivant est vérifié :

7. $\forall x \neq 0,\ 1 * x \neq 0$.

On peut alors démontrer que le système d'axiomes 1 – 7 de la notion d'espace vectoriel est minimal.

Les deux propriétés suivantes, faisant partie de la définition usuelle des espaces vectoriels, sont alors des théorèmes (la démonstration de la première est délicate):

+ est commutative

$\forall x \in \mathrm{E},\ 1 * x = x$.

Ce résultat permet de fournir une réponse (complexe) à la question souvent posée par des élèves, mais aussi par des professeurs, au sujet de l'utilité et même de la légitimité de l'axiome « $\forall x \in \mathrm{E},\ 1 * x = x$ ».

L'introduction des espaces presque affines obéit aux mêmes préoccupations : trouver un système d'axiomes minimal pour les espaces affines, qualité que ne possède pas celui de Weyl[33]. $\mathscr{A}$ désignant un ensemble non vide, dont les éléments sont appelés points, on considère une relation d'équivalence ρ définie sur l'ensemble $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$ des bipoints, notés (A, B). L'ensemble quotient $\mathscr{A} \times \mathscr{A} / \rho$ est appelé *espace des vecteurs* de $\mathscr{A}$ ou encore espace tangent de $\mathscr{A}$, noté $\boldsymbol{T}\mathscr{A}$; le vecteur associé au bipoint (A, B) étant noté $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. La définition d'un espace presque affine est alors la suivante :

On appelle espace presque affine un ensemble non vide $\mathscr{A}$, tel que les conditions suivantes soient réalisées :

[33] Les auteurs évoquent également une modification apportée au système de Weyl par le mathématicien russe Rasewsky en 1959 : le système ainsi obtenu n'est pas minimal.

1° Une relation d'équivalence ρ sur l'ensemble des bipoints $\mathscr{A}\times\mathscr{A}$, les éléments de l'ensemble quotient $\mathscr{A}\times\mathscr{A}/\rho$, noté $\boldsymbol{T}\mathscr{A}$, étant appelés vecteurs de $\mathscr{A}$.
2° Une application $*$ de $\mathbf{R}\times\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$: $(\alpha, x) \mapsto \alpha * x$, telle que les axiomes des groupes I et II ci-dessous soient vérifiés.
Groupe I
I_1. $\forall A \in \mathscr{A}, \forall x \in \boldsymbol{T}\mathscr{A}\ \exists B \in \mathscr{A}, \overrightarrow{AB} = x$;
I_2. $\forall A, B, A' \in \mathscr{A}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B} \Rightarrow A = A'$;
I_3. $\forall A, B, C, A', B', C' \in \mathscr{A}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.
(Ce premier groupe d'axiomes permet de démontrer que quels que soient les points A et B, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ et de définir ainsi le vecteur nul ; de démontrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} \Rightarrow B = B'$; enfin, de définir la somme de deux vecteurs, de la manière suivante : si x, y sont des éléments de $\boldsymbol{T}\mathscr{A}$, et si A est un point de $\mathscr{A}$, il existe un point B et un seul tel que $x = \overrightarrow{AB}$, un point C et un seul tel que $y = \overrightarrow{BC}$; alors, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est indépendant du point A et ne dépend que des vecteurs x et y : on l'appelle somme des vecteurs x et y, on le note $x + y$. L'opération, notée +, ainsi définie est appelée addition dans $\boldsymbol{T}\mathscr{A}$; ($\boldsymbol{T}\mathscr{A}$, +) est un groupe, en général non commutatif.).
Groupe II
II_1. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall x, y \in \boldsymbol{T}\mathscr{A} : \alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$;
II_2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in \boldsymbol{T}\mathscr{A} : (\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$;
II_3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \forall x \in \boldsymbol{T}\mathscr{A} : \alpha * (\beta * x) = (\alpha\beta) * x$.
(On démontre alors que ($\boldsymbol{T}\mathscr{A}$, +, *) est un espace presque vectoriel ; la définition de la droite passant par A et B par la propriété usuelle $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$ ne convient pas, car elle n'assure pas l'appartenance de B à la droite).

On arrive enfin à la définition d'un espace affine, à l'aide d'un dernier axiome : un espace presque affine est affine si l'axiome III suivant est vérifié :
$\forall x \in \boldsymbol{T}\mathscr{A} \setminus \{0\}: 1 * x \neq 0$.
(On démontre alors que ($\boldsymbol{T}\mathscr{A}$, +, *) est un espace vectoriel sur **R**.).

Dans le développement des résultats essentiels valables dans les espaces affines, les auteurs introduisent la notation spéciale k = (A, B ; C) pour remplacer l'égalité : $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$. Ainsi, (A, B ; C) = – 1 signifie que C est le milieu de AB.

Nous allons maintenant nous intéresser au passage du chapitre réservé aux transformations géométriques spécialement consacré aux vecteurs. Après avoir étudié les isométries, les symétries orthogonales par rapport à une droite, les auteurs introduisent les vecteurs pour pouvoir les utiliser dans l'étude des translations et des homothéties.

Une définition mathématique des vecteurs en termes de direction, sens, longueur

Si cette façon d'introduire les vecteurs, d'un point de vue intuitif, est simple, rapide et accessible, il n'en est pas de même si l'on veut définir rigoureusement les vecteurs de cette façon.
Nous ne reviendrons pas sur la notion de direction, obtenue à l'aide de la relation de parallélisme, qui est une relation d'équivalence (conséquence de l'axiome d'Euclide) : les classes d'équivalences pour cette relation sont les directions. On notera $[d]$ la direction d'une droite d.
La notion la plus délicate à définir est évidemment celle de sens. Tout dépend d'abord du système d'axiomes dans lequel on travaille. Les auteurs choisissent celui de Hilbert à cause de son caractère géométrique plus prononcé (mais précisent qu'il est possible d'utiliser celui de Birkhoff). Les axiomes jouant un rôle important sont ceux du groupe II, que l'on appelle usuellement les axiomes d'ordre et qui ont été étudiés pour la première fois par Pasch. Ils portent sur la relation « être entre » ; trois concernent les droites (ordre linéaire) et le quatrième, créé par Pasch, concerne le plan. Ces axiomes permettent de démontrer que :
• si A et B sont deux points distincts, il existe un point C entre A et B (on note A–C–B) ;
• si A, B et C sont trois points d'une droite deux à deux distincts, un et un seul des trois est entre les deux autres[34] ;

Les auteurs présentent ensuite une construction originale (plus simple que celle figurant dans Hilbert) pour établir l'existence d'une relation d'ordre total sur toute droite, et définir les demi-droites, comportant les étapes suivantes :
• si A, B, C et D sont quatre points alignés et si D n'est ni entre A et C, ni entre B et C, alors D n'est pas entre A et B ;
• si A, B, C et D sont quatre points alignés et si D est entre A et C, et entre B et C, alors D n'est pas entre A et B ;
On peut alors démontrer que, si d désigne une droite et O l'un de ses points, la relation $\sim$ sur $d \setminus \{O\}$ définie par :

$$A \sim B \Leftrightarrow (A = B \text{ ou } O\text{–}A\text{–}B \text{ ou } O\text{–}B\text{–}A)$$

est une relation d'équivalence. Un élément de l'ensemble quotient est appelé « demi-droite (ouverte) d'origine O » sur la droite d.

---

[34]Cette propriété met en évidence la différence entre trois points alignés et trois droites coplanaires concourantes : alors que pour les droites, l'une quelconque d'entre elles est située entre les deux autres, il n'en est plus de même pour les points alignés. Cette propriété, qui résulte immédiatement d'un des axiomes d'ordre, exclut la dualité et donc la géométrie projective.

On peut alors démontrer qu'il existe exactement deux demi-droites (ouvertes) d'origine O sur *d*.

Ce résultat (dont l'évidence intuitive a résisté longtemps à une axiomatisation véritable) permet ensuite de définir une autre relation d'équivalence, concernant cette fois-ci les demi-droites fermées d'une droites donnée. *d* désignant une droite, Σ désignant l'ensemble des demi-droites fermées de *d*, la relation $\overset{\sim}{\rightarrow}$, définie par :

$$h \overset{\sim}{\rightarrow} k \Leftrightarrow h \cup k \in \Sigma$$

ou encore par :

$$h \overset{\sim}{\rightarrow} k \Leftrightarrow h \subset k \text{ ou } k \subset h$$

est une relation d'équivalence sur Σ, dont l'ensemble quotient comporte exactement deux éléments, que l'on appelle « orientations » de la droite *d*.
Ainsi, pour définir une orientation sur une droite *d*, il suffit de se donner une demi-droite [O;A) sur cette droite : les demi-droites appartenant à la classe d'équivalence de [O;A) sont dites d'orientation positive, les autres sont dites d'orientation négative.
Sur une droite munie d'une orientation, on peut définir des segments orientés : on dira que le bipoint (A, B) est un segment positivement orienté si la demi-droite [A;B) est d'orientation positive.

On peut alors définir sur toute droite orientée *d* une relation d'ordre de la manière suivante : A précède B, ce que l'on note A $\prec$ B, si et seulement si le segment AB est positivement orienté.
On démontre alors que la relation $\prec$ est une relation d'ordre total, et que cet ordre est dense. De plus, elle est compatible avec la relation « être entre », au sens suivant :

$$A \prec B \text{ et } B \prec C \Rightarrow A\text{–}B\text{–}C.$$

Mieux même, on peut démontrer qu'il est équivalent de définir un ordre compatible avec la relation « être entre » sur une droite *d* ou de définir une orientation sur la droite *d*. C'est pour éviter d'utiliser l'expression assez lourde « relation d'ordre sur une droite compatible avec la relation " être entre " », que l'on emploie l'expression plus courte de « sens sur une droite d ».

Nous ne détaillerons pas ici la définition d'un demi-plan à partir des axiomes d'ordre. Cette notion est indispensable pour définir la notion d'orientations cohérentes de deux droites de même direction [*d*]. Rappelons qu'une orientation d'une droite est une famille ω de demi-droites fermées ayant cette droite comme support, droite que nous désignerons par $\sigma(\omega)$. Considérons maintenant l'ensemble Ω_d des orientations de toutes les droites ayant la direction [*d*]. On définit sur cet ensemble une relation, notée $\uparrow$

de la manière suivante : $\omega \uparrow \omega'$ équivaut à $\omega = \omega'$ dans le cas où les droites supports $\sigma(\omega)$ et $\sigma(\omega')$ sont égales ; dans le cas contraire, $\omega \uparrow \omega'$ équivaut à l'existence d'une demi-droite [O;A) appartenant à ω et d'une demi-droite [O';A') appartenant à ω' telles que A et A' soient dans le même demi-plan déterminé par la droite (OO').
On démontre que cette relation est une relation d'équivalence, dont l'ensemble quotient est formé exactement de deux éléments.
Désignons par $\underrightarrow{AB}$ l'élément de cet ensemble quotient auquel appartient l'orientation ω de la droite (AB) telle que $[A;B) \in \omega$. Alors, nous sommes enfin en mesure de définir la relation d'équipollence des bipoints :

$$(A, B) \sim (C, D) \text{ est équivalent à :}$$
$$(A = B \text{ et } C = D) \text{ ou}$$
$$(A \neq B \text{ et } AB \equiv CD \text{ et } (AB) \parallel (CD) \text{ et } \underrightarrow{AB} = \underrightarrow{CD}.$$

La condition « $AB \equiv CD$ » fait ici référence au troisième groupe d'axiomes de Hilbert, qui comprend les axiomes de congruence relatifs aux segments et ceux relatifs aux congruences d'angles.

Cet exposé met en évidence la complexité de la construction nécessaire pour définir l'équipollence des bipoints en se plaçant dans une perspective axiomatique, et en particulier dans celle de Hilbert : le rôle fondamental joué par les axiomes du groupe II (axiomes d'ordre) y apparaît en toute lumière.

5 – Conclusion de la deuxième partie

Dans cette conclusion, nous nous plaçons au premier et surtout au dernier niveau d'une organisation mathématique, au sens de Chevallard : le niveau des questions (ou types de problèmes) et le niveau théorique. Nous organiserons cette conclusion en deux temps.

Dans le premier, nous synthétiserons les différentes questions et théories (mathématiques mais aussi physiques) que nous avons évoquées dans cette deuxième partie, en gardant la question de l'algébrisation de la géométrie comme fil directeur.

Dans le second, nous examinerons la question des transpositions, à des fins didactiques, des théories disponibles (celles évoquées dans ce qui précède, mais également celles qui sont apparues à la même époque), en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie.

51 - Les différentes théories concernées par l'émergence des concepts de vecteurs, espaces vectoriels et espaces affines

511 – Théories en rapport avec la création des vecteurs

Le paragraphe 1 de notre deuxième partie souligne un fait déjà bien connu : les vecteurs ont été créés par des savants ayant des préoccupations relevant autant des Sciences Physiques que des Mathématiques. L'outil est nouveau, en phase de mise au point, notamment en ce qui concerne les notations.

L'outil est nouveau, mais est-il nécessaire ?

En physique, et notamment en Électromagnétisme, la réponse devient vite affirmative : des savants novateurs les utilisent (Gibbs, Heaviside) dans leurs travaux de spécialistes.

En mathématique, la situation n'est pas la même :

• Les travaux de Hamilton sur les quaternions peuvent ainsi se rattacher d'une part à la théorie des extensions de corps pour ce qui concerne l'algèbre, et d'autre part à l'analyse vectorielle pour ce qui concerne leurs utilisations en Physique. Les quaternions, dont la découverte procède d'une démarche d'extension de corps, faite par un universitaire de renom, sont considérés comme des objets mathématiques dignes d'intérêt pour le mathématicien pur ; leur utilisation en géométrie pour remplacer les coordonnées cartésiennes est contestée.

• La théorie de l'extension de Grassmann est suffisamment complète pour pouvoir s'appliquer aussi bien aux mathématiques (géométrie notamment) qu'à différentes branches des sciences physiques ; mais elle est très complexe, et d'accès difficile, notamment en raison de présupposés philosophiques non partagés par les mathématiciens. Toute la géométrie affine, euclidienne, projective est dans Grassmann, mais aussi la théorie des vecteurs glissants (statique et mécanique). Le manque de légitimité de l'auteur, qui n'est pas universitaire, fait que ses travaux se répandent assez peu, dans un premier temps, du moins.

512 – Théories en rapport avec l'émergence des espaces affines

Le créateur des espaces affines, Hermann Weyl, est un géomètre différentiel s'occupant de problèmes de Physique théorique de haut niveau : la théorie de la relativité générale d'Einstein. Weyl met l'accent sur la nécessité, pour résoudre le problème de l'unification des théories mathématiques rendant compte des développements de la physique jusqu'à la théorie de la relativité générale d'Einstein, de s'intéresser à un groupe plus petit que le groupe des déplacements de l'espace : le groupe des translations. Et il utilise le langage des vecteurs pour décrire ce groupe et son action sur les points. Ainsi naît la notion d'espace affine. Il établit le clivage affine/métrique pour pouvoir montrer que la théorie du déplacement parallèle, élaborée selon les idées de Riemann par Levi-Civita en 1917, peut être faite dans un cadre élargi : on peut la faire sans supposer que l'espace Riemannien dans lequel on travaille soit plongé dans un espace euclidien à un nombre suffisant de dimensions, il suffit de se placer dans un espace muni d'une connexion affine.

Quant aux espaces affines abstraits munis d'une métrique définis plus tard par Fréchet, leur intérêt réside dans la possibilité de conjuguer les questions topologiques autorisées par la distance avec des questions de calcul différentiel (extension de la notion de différentielle, notamment) : pour cela, on est amené à distinguer la norme d'un vecteur de la distance des deux points servant à le définir, même si elles sont liées par une condition de continuité.

513 – Théories en rapport avec l'émergence des espaces vectoriels

La problématique de Grassmann dans son calcul de l'extension constitue un cadre suffisamment général pour le conduire à envisager des espaces de dimension supérieure à 3. La définition générale d'un espace vectoriel, donnée par Peano, sera réinvestie dans des questions d'analyse fonctionnelle, sans grand succès dans un premier temps, puis de manière importante à la suite des travaux de Banach et de Fréchet, concernant les espaces normés, et les espaces affines abstraits (c'est-à-dire des espaces affines associés à un espace vectoriel muni d'une application ayant toutes les propriétés d'une norme sauf l'inégalité triangulaire).

Il a fallu ce détour vers des espaces de dimension infinie pour montrer l'intérêt de la dualité, ce qui a conduit à distinguer volontairement, en dimension finie, un espace vectoriel de son dual, ces deux espaces étant pourtant isomorphes.

Les espaces normés de dimension finie ont été créés par Minkowski pour traiter les questions liées à la convexité (ensembles et fonctions convexes). Dans ces espaces, les unités pour mesurer les longueurs sont différentes pour des directions différentes, et les cercles et boules unités n'ont plus la forme ronde qu'ils ont en géométrie euclidienne ; mais ils conservent la propriété de convexité.

514 – Autres théories relatives à la géométrie

Les travaux de la fin du XIXe et du début du XXe siècle relatifs aux fondements de la géométrie, intégrant les géométries non euclidiennes, restructurent l'édifice proposé par Euclide dans ses Éléments, en partant des mêmes objets de base. Les travaux de Hilbert sur ce sujet sont complexes, notamment en raison du fait que le corps des réels n'y est pas d'abord supposé connu : l'algébrisation de la géométrie passe alors par le calcul segmentaire, complété par l'adjonction d'axiomes spécifiques dont le but est d'assurer la bijectivité de toute droite avec **R**.

Les travaux de Birkhoff font intervenir **R**, la bijectivité entre **R** et toute droite beaucoup plus tôt, ainsi qu'une application ayant toutes les propriétés d'une distance dans le plan, à l'exception de l'inégalité triangulaire. Le développement de la théorie qu'il propose demeure cependant difficile, car l'introduction de l'axiome d'Euclide est retardée le plus possible, dans le but de développer au maximum la géométrie absolue.

Dans une perspective d'algébrisation de la géométrie, le calcul segmentaire de Hilbert est repris dans une perspective de fondement de la géométrie analytique : en partant d'un plan vérifiant des axiomes d'incidence (de type affine, par opposition avec le type projectif) et l'axiome d'Euclide, on cherche à définir un ensemble de nombres permettant de définir les points du plan à l'aide de couples de coordonnées, les droites ayant dans le système d'axes correspondant une équation linéaire. C'est la perspective entreprise par Blumenthal, qui introduit la structure d'anneau ternaire, ainsi que par Artin. Le rôle des axiomes de Desargues et de Pappus-Pascal, déjà présents dans les deux calculs segmentaires d'Hilbert est ici fondamental. En particulier le premier axiome de Desargues est indispensable pour pouvoir munir l'ensemble de nombres d'une structure de groupe additif, et pour pouvoir définir les vecteurs comme classes d'équivalence, leur ensemble pouvant également être muni d'une structure de groupe commutatif. Le deuxième axiome de Desargues permet de munir l'ensemble de nombres d'une structure de corps, sur lequel l'ensemble des vecteurs est un espace vectoriel de dimension 2, le plan apparaissant comme un plan affine associé à cet espace vectoriel.

Nous citons sans le détailler le développement de la théorie des groupes de transformations, mise en valeur par Félix Klein dans son programme d'Erlangen[1].

52 – Transpositions didactiques des théories précédentes

L'édifice des “Grundlagen der Geometrie” de Hilbert est difficile à simplifier, sans porter atteinte à son contenu : il se prête donc mal à une transposition didactique à des fins d'enseignement au niveau du lycée, et encore moins au niveau du collège. En ce qui concerne l'introduction des vecteurs en termes de direction, sens et longueur, à partir de l'axiomatique de Hilbert, l'ouvrage de Miron et Brânzei met clairement en évidence l'impossibilité d'en envisager une transposition à un tel niveau.

En revanche, malgré un niveau de complexité comparable, la perspective d'une transposition à des fins d'enseignement est présente dans les travaux de Birkhoff, et on retrouve en bonne place des références à ses travaux dans la bibliographie de l'ouvrage de Gustave Choquet : ce dernier s'en inspire effectivement pour construire son axiomatique, notamment par l'introduction précoce d'une application ayant certains caractères d'une distance. L'ingéniosité de sa première construction axiomatique consiste à utiliser un cas particulier important de « plan de translation », caractérisé par l'existence d'une fonction « milieu », ce dernier étant conservé par projection parallèle. Nous verrons dans notre troisième partie que cette axiomatique a inspiré les contenus des programmes de collège en France dans la période dite « des mathématiques modernes », et que sa deuxième axiomatique, introduisant une application ayant toutes les propriétés d'une distance, ainsi qu'une importante propriété supplémentaire sera utilisée pour aménager les programmes qui suivront, et même d'une manière implicite les programmes actuellement en vigueur.

Quant à l'introduction par Weyl des espaces affines pour décrire l'espace euclidien, il n'est guère étonnant que la clarté de son exposition dans l'ouvrage « Temps, espace, matière » en ait fait un candidat pour une transposition didactique. Le caractère séduisant de l'exposé n'est, en effet, pas son seul avantage : à la lumière de la complication des théories de Hilbert et de Birkhoff, on mesure facilement le confort que procure l'introduction préalable dans l'exposé d'un espace vectoriel sur **R**. D'abord, cela signifie que **R** est d'emblée disponible, ce qui n'est le cas ni chez Hilbert, ni chez Grassmann. Ensuite, cela permet de doter d'emblée le plan (affine), de manière implicite, de résultats forts, dont la démonstration devient beaucoup moins coûteuse que dans les autres transpositions. Le prix à payer est évidemment l'instauration du clivage affine/métrique, ce qui oblige à retarder, par rapport aux transpositions antérieures,

---

[1]Klein F., 1974, *Le programme d'Erlangen, considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Gauthier-Villars éditeur, Paris/Bruxelles/Montréal, réédition J. Gabay, 1991.

le traitement du second aspect. Dieudonné a eu une influence considérable pour favoriser la transposition didactique de cette construction de la géométrie élémentaire.

L'évolution du contenu des ouvrages universitaires relatifs au calcul vectoriel fait également ressortir un fait déjà bien identifié par certains chercheurs en didactique des mathématiques[2] : la disparition progressive d'une référence aux unités (de longueur notamment). Alors que cette question est clairement abordée dans les ouvrages du début du siècle (Marcolongo et Burali-Forti, Coffin) et même chez Weyl (qui dans sa définition de la forme métrique fondamentale Q fait intervenir un vecteur unitaire $\mathbf{e}$ tel que $Q(\mathbf{e}) = 1$, puis plus tard évoque l'étalonnage d'une multiplicité, ainsi que la possibilité du transport d'un étalon), l'ouvrage de Véronnet de 1933 est le seul dans lequel la notion d'unité joue un rôle fondamental (rappelons que Véronnet est astronome).

Quant à la théorie des groupes de transformations, elle inspire l'ouvrage de René Brisac, qui en propose une transposition, au niveau de la classe de mathématiques des lycées : le contenu en est exigeant, notamment en ce qui concerne la définition des translations, ainsi que par la présence d'une théorie complète de la mesure des longueurs.

Qu'est devenue l'œuvre de Grassmann du point de vue de sa transposition à des fins d'enseignement ? À la lecture des développements préliminaires à son calcul vectoriel, on comprend l'embarras provoqué par le texte de Grassmann chez de nombreux mathématiciens au moment de sa parution ; mais on ne peut qu'être frappé par la proximité entre le contenu de ce texte et le discours tenu oralement par de nombreux professeurs pour expliquer aujourd'hui ce qu'est un vecteur, ou une droite ... Malgré le mauvais accueil fait à l'ouvrage, les préoccupations didactiques n'étaient pas absentes chez l'auteur, qui s'en explique dès l'introduction, dans le paragraphe intitulé « Forme de la présentation » , dont nous citerons quelques passages fondamentaux[3] :

« *L'essence de la méthode philosophique est sa progression par contrastes, et qu'elle parvient ainsi du général au particulier ; en revanche, la méthode mathématique progresse des concepts les plus simples aux concepts les plus composés et obtient ainsi, par la liaison du particulier, des concepts nouveaux et plus généraux.*

...

Comme les mathématiques ainsi que la philosophie sont des sciences au sens le plus rigoureux, les deux méthodes doivent alors avoir quelque chose en commun ... Nous attachons maintenant un caractère scientifique à un mode de traitement si d'une part il conduit le lecteur à la nécessité d'admettre chaque vérité individuelle et si,

---

[2] Voir par exemple la thèse de Marianna Bosch.
Cette question a souvent été abordée au cours des séances de travaux lors de la dernière École d'Été de didactique des mathématiques.

[3] Voir l'ouvrage de D. Flament, pp. XIV-XVI.

d'autre part, il le met en état d'embrasser à chaque pas du développement l'orientation prise par la progression.

...

À tout moment du développement, la manière ultérieure de développer est essentiellement marquée par une idée directrice qui est, ou bien rien d'autre qu'une analogie présumée avec des branches voisines du savoir déjà connues, ou bien, – et c'est le meilleur cas – un pressentiment direct de la vérité suivante à chercher.

...

C'est pourquoi la présentation scientifique est essentiellement un enchaînement de deux séries de développements dont l'une conduit en conséquence d'une vérité à l'autre et forme le contenu propre, cependant que l'autre gouverne le processus lui-même et détermine la forme. En mathématiques, ces deux séries de développements sont les plus distantes l'une de l'autre. .... Le second développement est d'un caractère tout à fait contraire au premier, et l'interpénétration des deux semble être plus difficile que dans n'importe quelle autre science. Mais on n'a pas le droit, à cause de cette difficulté, d'abandonner et de désavouer tout le procédé ...".

Grassmann constate alors que les nouveaux mathématiciens, et surtout les français, ont commencé à entremêler les deux développements, et il reproche aux mathématiciens allemands de s'en tenir au premier. Il ne fait guère de doute qu'un tel jugement, émis par un professeur de lycée, n'a guère contribué à lui faire trouver un écho très favorable chez ses lecteurs universitaires allemands. Mais nous avons vu que l'accueil n'a pas été meilleur auprès des mathématiciens d'autres pays, et en particulier français ...

Comme nous l'avons vu précédemment, l'une des idées fondamentales de Grassmann est celle d'engendrer une « formation spatiale » par une succession de changements de lieux ou de mouvements, idée que les vecteurs permettent de concrétiser : on devine le rôle que les vecteurs devraient alors jouer dans la modélisation de configurations et transformations appartenant à la géométrie affine ou euclidienne. Dans la suite de notre travail, nous étudierons la place faite à cette idée dans diverses transpositions didactiques.

Troisième partie

Les vecteurs dans les programmes d'enseignement en France

Leur emploi
dans les problèmes d'alignement
et dans l'étude des configurations

A – L'évolution des programmes en France de 1853 à nos jours.

1 - L'emploi de l'expression « rayon vecteur »

On voit apparaître cette expression pour la première fois dans les programmes de la classe de mathématiques spéciales du 26 janvier 1853, au sujet de l'ellipse ; puis dans les programmes du 24 et 25 mars 1865, où elle apparaît dans les programmes de la classe de mathématiques élémentaires, à la fois pour l'ellipse et pour la parabole.

Un élément d'explication relatif à l'emploi du mot « vecteur » est donné par J. Itard (bulletin de l'APM n° 278) : ce mot, employé comme qualificatif, est utilisé par les anciens astronomes qui appelaient « rayon vecteur », « ce rayon matériel qui porte l'astre en quelque sorte au bout de son bras ».

2 - L'apparition du mot « vecteur » dans les programmes de 1902 et 1905

Alors qu'on ne note aucune occurrence du mot dans les programmes du 15 juin 1891 (pas même en statique ou en dynamique), ils apparaissent dans ceux du 31 mai 1902, précisément dans celui de la classe de première C et D, dans le chapitre Mécanique, en tant que titre de même niveau que le titre « Cinématique »[1]. Sous le titre « Vecteurs », on trouve les points suivants :

« Projection d'un vecteur sur un axe orienté – Somme géométrique de plusieurs vecteurs concourants – Théorème des projections. Différence géométrique de deux vecteurs.

Moment linéaire d'un vecteur par rapport à un point : le moment linéaire de la somme de vecteurs concourants par rapport à un point est égal à la somme géométrique des moments de ces vecteurs.

Systèmes de vecteurs quelconques ; somme géométrique ; moment résultant par rapport à un point – Cas particulier : couple de vecteurs.

---

[1] Voir BELHOSTE B. (1995), *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels*, Tome 1 : 1789/1914, INRP Économica, page 602.

Moment par rapport à un axe. Moment de la somme géométrique de vecteurs concourants. Somme des moments de deux vecteurs d'un couple.
Tétraèdre et parallélépipède construits sur deux segments. Extension de la notion de moment (il est recommandé, dans cette étude, de faire surtout usage de la géométrie). »
Dans le titre « Cinématique », les vecteurs interviennent pour représenter la vitesse à un instant donné, dans un mouvement rectiligne et dans un mouvement varié quelconque ; dans le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe, on utilise un vecteur porté par l'axe pour représenter la rotation : la vitesse d'un point du corps est alors le moment linéaire du vecteur représentatif par rapport à ce point.

Ces programmes sont modifiés le 27 juillet 1905.[2]
Dans le programme de la classe de mathématiques A et B, on note l'apparition d'un paragraphe intitulé « Vecteurs » dans le titre « Géométrie » (et non plus dans le titre « Mécanique »)[3] dont le contenu est le suivant :
« Projection d'un vecteur sur un axe. Moment dipolaire par rapport à un point, par rapport à un axe.
Somme géométrique d'un système de vecteurs ; moment résultant par rapport à un point ; Cas particulier : couple de vecteurs.
Somme des moments par rapport à un axe. Application à un couple de vecteurs. »
Dans les titres « Cinématique » et « Dynamique et statique », on continue à considérer les vecteurs comme moyen de représentation d'une vitesse, d'une accélération, d'une force.[4]

L'instruction du 27 juillet 1905 relative à l'enseignement des mathématiques dans les lycées et collèges de garçons (page 676) explique ainsi les raisons de ce transfert : « En mécanique, (...) le professeur devra éviter tous les développements et les exercices présentant uniquement un intérêt géométrique ; c'est pour supprimer toute occasion de développements de ce genre que les théorèmes se rapportant aux vecteurs ont été réduits au minimum indispensable et transportés dans le programme de géométrie, où ils se présentent sous leur véritable jour. ».

Cas des programmes de classes préparatoires (ENS)

Alors que dans les programmes de 1900 aucune allusion n'est faite aux vecteurs, ceux du 10 janvier 1905 les évoquent dans le premier titre « Analyse, algèbre, géométrie analytique » , surtout dans une perspective analytique :

[2]Op. cit. page 658.
[3]Op. cit. page 668.
[4]Op. cit. pages 669 et 670.

« Vecteurs et segments. Projections. Théorème des projections. Définition d'un vecteur par son point d'application et ses trois projections sur trois axes rectangulaires. Coordonnées d'un point. Condition de parallélisme de deux vecteurs. Formule PP' cosPP' = XX' + YY' + ZZ'. Angle de deux vecteurs ; condition de perpendicularité. »
Dans le titre « Mécanique », on évoque l'hodographe et le « vecteur accélération » pour la cinématique du point, la composition des vitesses et des accélérations dans le cas où le mouvement du système de comparaison est un mouvement de translation.
Dans les programmes du 30 décembre 1913, les interventions des vecteurs en géométrie disparaissent, mais le théorème des projections est introduit dans le titre « Trigonométrie »[5] ; celles relatives à la mécanique demeurent.

3 - Les instructions du 2 septembre 1925.

On retrouve les vecteurs dans le programme de la Classe de mathématiques, dans le titre « Trigonométrie », sous la rédaction suivante : « Théorie des projections. Somme géométrique des vecteurs. Formule d'addition pour le sinus, le cosinus et la tangente. ». L'intervention des vecteurs en Cinématique est plus précise : le vecteur vitesse est clairement nommé, les vitesses moyenne et à un instant donné étant définies comme vecteurs. Le vecteur accélération est évoqué dans le cas particulier du mouvement circulaire. En statique, la représentation d'une force par un vecteur est évoqué pour le point matériel. Pour les forces appliquées à un corps solide, le centre de gravité est introduit en liaison avec le centre des forces parallèles.
Les instructions relatives à ce programme précisent sur le premier point :
« En signalant simplement la somme géométrique de vecteurs à propos de la théorie des projections, on a entendu limiter les développements relatifs aux systèmes de vecteurs. L'étude purement géométrique des propriétés de cette somme conserve pourtant son importance et se place naturellement avant le théorème des projections dont elle éclaire les formes géométriques et algébriques. En sortant de la droite pour passer dans le plan ou s'élever dans l'espace, on facilite la vision du fait particulier. ». L'idée qui présidait à l'autonomisation des vecteurs en géométrie dans les programmes de 1902 est gardée, mais mise au service de l'étude du théorème des projections. Cette introduction des

[5]On pourra se faire une idée précise de l'importance de ce théorème en consultant le "Traité de géométrie" de E. ROUCHÉ et C. de COMBEROUSSE, 1900, réédition J. Gabay, 1997, pages 218 et 219. On y parle de segments ayant une origine et une extrémité ; le théorème dit que « La projection sur un axe de la résultante de segments consécutifs est égale à la somme des projections des composantes. ». La trigonométrie permet de traduire cet énoncé en une relation entre les segments consécutifs et leurs inclinaisons sur l'axe de projection : « la projection d'un segment sur un axe est égale au produit de ce segment par le rapport des sinus des angles que les directions positives de la base du segment et de l'axe font avec la direction positive des projetantes. ». Dans le cas où la projection est orthogonale, on retrouve ainsi le résultat relatif « au produit du segment par le cosinus de l'angle de la direction positive de l'axe avec la direction positive de la base du segment. ».

vecteurs dans un titre de géométrie est également jugée bénéfique par les instructions relatives à l'enseignement de la statique : « En statique, la confusion qui se produisait si souvent, entre les propriétés des systèmes de forces et celles des systèmes de vecteurs associés, disparaîtra avec l'étude générale de ces derniers. »

Quant aux classes préparatoires[6], les vecteurs interviennent dans deux titres du programme : « Mécanique » (Cinématique, Dynamique et statique), et « Géométrie analytique ». Pour cette dernière, la nouveauté réside dans l'introduction du produit vectoriel, à la suite de celle du produit scalaire, ainsi que la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Les produits scalaire et vectoriel sont réinvestis pour traiter de la représentation analytique de la droite dans le plan, du plan et de la droite dans l'espace, ainsi que dans des problèmes simples sur leurs intersections, des questions d'angles et de distances, les équations du cercle et de la sphère. En Mécanique, le vecteur vitesse est expressément cité, ce qui constitue une nouveauté ; le vecteur accélération continue à être introduit en relation avec l'hodographe.

4 - Instructions du 30 septembre 1938

Pour la première fois, les vecteurs font leur apparition dans les programmes du premier cycle.
Le programme de la classe de Quatrième (et de 2ème année d'EPS), dans leur partie relative à l'Arithmétique et Algèbre font apparaître les « Vecteurs et droites orientées » comme sous-titre de paragraphe dans le titre I « Graphiques et équations »[7]. Il s'agit de vecteurs ayant une origine et une extrémité, la notation étant $\overrightarrow{AB}$; figurent au programme les notions de droites orientées ou axes, de vecteur unitaire, de direction orientée, de mesure algébrique d'un vecteur, sur un axe, ou parallèle à une direction donnée (notée $\overline{AB}$, la relation de Chasles étant traitée), de somme géométrique de deux vecteurs de même direction, et de somme algébrique de leurs mesures ; puis on passe au repérage sur une droite : abscisse d'un point sur une droite orientée comportant un point origine, changement d'origine, mesure d'un vecteur vue comme accroissement de l'abscisse de l'origine à l'extrémité, abscisse du milieu d'un segment ; interprétation géométrique des inégalités, position d'un point par rapport à un segment. Ces questions sont réinvesties dans la représentation des valeurs d'une grandeur orientée par des points d'une droite orientée, pour évoquer les accroissements de la grandeur.

---

[6]L'analyse des programmes est faite sur la base du programme du concours d'admission à l'École Normale Supérieure, d'après l'arrêté du 31 août 1937.
[7]Instructions du 30 septembre 1938 relative à l'application des arrêtés du 30 août 1937 et du 11 avril 1938 fixant les programmes de l'enseignement du second degré, troisième édition, Librairie Vuibert, Paris, pages 159 et 160.

Le sous-titre suivant « Projections », fait intervenir de manière importante les vecteurs :

– en prenant en charge la proportionnalité de la mesure algébrique d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de la mesure algébrique de sa projection $\overrightarrow{ab}$:

$$\overline{ab} = \overline{AB} \times k,$$

la projection concernant des vecteurs de même direction, sur une même droite (projection orthogonale ou parallèle à une direction de projetantes).

– en proposant l'étude facultative des rapports algébriques de vecteurs, comme préalable à l'introduction du produit d'un vecteur par un nombre algébrique α, avec les notations suivantes : $\alpha.\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB}.\alpha$.

– la notion de rapport algébrique de deux vecteurs parallèles, le rapport d'un vecteur au vecteur unité d'une direction orientée, le quotient des mesures de deux vecteurs parallèles sont introduits pour traiter la conservation du rapport algébrique de deux vecteurs en projection, et traiter d'une autre manière la proportionnalité des mesures algébriques d'un vecteur parallèle à une direction orientée et de sa projection.

Les commentaires précisent à ce sujet :

« L'idée de projection (oblique ou orthogonale) sur une droite du plan des vecteurs dont les supports sont des droites parallèles de ce plan fournit une illustration de la multiplication de deux nombres algébriques. Le nombre algébrique qui mesure la projection d'un vecteur est obtenu en multipliant la mesure algébrique de ce vecteur par un nombre constant qui est la mesure de la projection du vecteur unité. On retrouve ainsi, dans le domaine algébrique, la notion de valeur de l'unité ou de coefficient de proportionnalité. »

Les interventions des vecteurs dans le titre « Géométrie » de la classe de Quatrième sont nettement plus discrètes, reprenant succinctement ce qui a été détaillé dans le titre « Arithmétique et algèbre » au sujet des projections : on peut remarquer cependant que la conservation en projection du rapport concerne aussi bien les segments que les vecteurs. L'homothétie est introduite à partir de segments interceptés sur deux parallèles par des sécantes concourantes. La définition de l'homothétique d'un point est donnée à l'aide de mesures algébriques.

On ne note aucune intervention des vecteurs dans le programme de Troisième.

Les programmes du second cycle ainsi que ceux des classes préparatoires (aux ENS) ne sont pas modifiés.

5 - Les programmes de 1941

• Ceux du premier cycle sont complètement modifiés ainsi que les horaires, qui sont tous revus à la baisse.

Aucune occurrence du mot vecteur n'y figure à quelque niveau que ce soit en ce qui concerne la géométrie : en Troisième, le théorème de Thalès est vu en termes de rapports de segments.

La seule apparition du mot « vecteur » se trouve dans la partie réservée à l'Algèbre dans le programme de Troisième : « mesure algébrique d'un vecteur sur un axe. Repérage d'un point sur un axe. Formule de Chasles. ».

• On retrouve les vecteurs dans les programmes de second cycle :
– en classe de Seconde (quelle que soit la section), ils apparaissent dans le titre « Géométrie » : il s'agit de vecteurs de même support ou de supports parallèles. Sont introduites les notions de mesure algébrique d'un vecteur sur un axe, d'abscisse d'un point ainsi que la formule de Chasles. La recherche des points d'une droite partageant un segment dans un rapport algébrique donné constitue un type de problèmes rattaché à ce thème, qui se termine par l'étude des droites parallèles et lignes proportionnelles, et par celle des triangles semblables.

L'homothétie plane est introduite, en vue de donner les figures homothétiques d'une droite et d'un cercle, propriétés qui seront réinvesties dans l'étude du périmètre du cercle. L'emploi des vecteurs à son sujet n'est pas imposé.
– en classe de Première classique, section C et de Première moderne, on retrouve les vecteurs parallèles et leur rapport, ainsi que la définition de l'homothétie (dans l'espace) dans le titre « Géométrie ». Le traitement de cette dernière n'est pas vectoriel.

On retrouve une allusion aux vecteurs dans le titre « Trigonométrie » : la somme géométrique de vecteurs est introduite pour faciliter l'établissement des formules donnant le cosinus ou le sinus de la différence ou de la somme de deux arcs.
– en classe de Philosophie-Sciences, le titre III de la partie intitulée « Algèbre et trigonométrie » est consacré aux vecteurs : rapport de deux vecteurs de même support ou de supports parallèles ; mesure algébrique d'un vecteur sur un axe ; abscisse d'un point ; formule de Chasles ; la somme géométrique ; notions qui sont des reprises du programme de première. La projection orthogonale d'un vecteur y bénéficie d'un meilleur affichage, sans doute en vue de définir les coordonnées rectangulaires d'un vecteur. Dans la partie « Mécanique », les vecteurs vitesse et accélération figurent au programme ; aux mouvements rectilignes et circulaires s'ajoutent l'étude d'un mouvement curviligne plus général, le mouvement vibratoire simple, ainsi que la composition de mouvements vibratoires simples de même période, pour lequel les instructions recommandent une interprétation en terme de vecteur tournant, et

l'utilisation effective de la construction de Fresnel pour calculer l'amplitude et la phase initiale.

– en classe de Mathématiques, on note peu de différence de contenu par rapport à la classe précédente en ce qui concerne la cinématique, mais aucun commentaire n'est fait concernant l'utilisation des vecteurs tournants et de la construction de Fresnel. La différence essentielle concerne bien sûr la géométrie : on y reprend les vecteurs parallèles, le rapport de deux vecteurs de même support ou de supports parallèles. À la somme est adjointe la différence de deux vecteurs ; la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe, les systèmes d'axes de coordonnées, la représentation d'un point par ses coordonnées dans le plan et dans l'espace, ainsi que le transport des axes parallèlement à eux-mêmes complètent le titre I de la partie « Géométrie ». Sa place au début du programme est justifiée dans les commentaires : l'étude des vecteurs a pour objet de coordonner et de préciser des définitions et des démonstrations déjà données antérieurement ; il est cependant précisé que le professeur pourra l'aborder au moment où il la jugera indispensable, et que sa place par rapport à la théorie des nombres algébriques n'est pas imposée.

– Les ENS sont transformées en « écoles nationales préparatoires à l'enseignement dans les collèges ». Le programme du concours d'admission est défini par l'arrêté du 4 décembre 1941. Une partie du programme est commune à toutes les disciplines scientifiques et repose essentiellement sur le programme de la classe de mathématiques. Dans le programme complémentaire pour l'option « mathématiques », les vecteurs sont présents dans plusieurs paragraphes du titre « Géométrie et géométrie analytique. Cinématique plane ». Le premier paragraphe traite de la somme géométrique de vecteurs, des coordonnées d'un vecteur ; du produit scalaire et de ses applications au triangle, au trièdre et à la trigonométrie sphérique ; du barycentre d'un système de points ; des coordonnées de points en géométrie plane, des équations de droites ; des questions de distances et d'angles en coordonnées rectangulaires ; de changement de coordonnées ; de l'étude analytique du cercle en axes rectangulaires (en allant jusqu'aux droites isotropes du plan).

Le paragraphe consacré à la cinématique distingue le mouvement rectiligne du mouvement curviligne, et évoque dans ce dernier cas, le vecteur vitesse, l'hodographe et le vecteur accélération. Un paragraphe spécial concerne le produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace orienté et le produit mixte de trois vecteurs. Le dernier paragraphe concerne la géométrie analytique du point, de la droite et du plan dans l'espace, l'intersection de plans, les questions de parallélisme et d'orthogonalité, d'angles et de distances en axes rectangulaires ; le dernier alinéa concerne la sphère, la conjugaison, les faisceaux de sphères.

6 - Les programmes de 1945.

Comme dans les programmes de 1938, on retrouve les vecteurs dans les programmes de premier cycle.

– On les évoque pour la première fois dans le titre « Algèbre » du programme de Quatrième:

« Mesures algébriques de vecteur sur une droite graduée. Formule de Chasles. Repérage d'un point sur un axe.»

On ne note, pour cette classe, aucune intervention des vecteurs dans le titre « Géométrie ».

– En classe de Troisième, malgré quelques variantes entre la section classique et la section moderne, aucune allusion n'est faite aux vecteurs dans la partie « Géométrie ». Les questions relatives au théorème de Thalès (rapport de deux segments, points divisant un segment dans un rapport donné, construction du produit d'un segment par une fraction, d'une quatrième proportionnelle) ne mettent en jeu que des longueurs ou mesures de longueur (ce qui rompt sur ce point avec les programmes de 1938, qui considéraient aussi des rapports de vecteurs).

– On retrouve les vecteurs sur un axe (mesure algébrique, relation de Chasles) dans la partie Algèbre du programme de la classe de Seconde, quelle que soit la section (A et B, ou C et moderne), mais l'élément nouveau à ce niveau est l'introduction des vecteurs parallèles, du rapport algébrique de deux vecteurs, débouchant sur le point divisant un segment dans un rapport algébrique donné. Le théorème de Thalès est traité dans ce contexte. L'homothétie n'est introduite que dans les Secondes C et moderne.

– Dans les classes de Première C et Moderne, on retrouve en Algèbre une introduction de la valeur algébrique de la vitesse instantanée (sans allusion aux vecteurs). On note comme dans les programmes de 1941 (et même de 1925) une introduction de la somme vectorielle et de la projection d'une somme vectorielle sur un axe dans le titre « Trigonométrie » en tant qu'outil commode pour établir les formules relatives aux lignes trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs.

La réelle nouveauté réside dans l'introduction dans le titre « Géométrie » des vecteurs équipollents en vue de définir la translation, du rapport de deux vecteurs parallèles pour définir vectoriellement l'homothétie.

– Dans la classe de Sciences expérimentales, on retrouve les vecteurs dans le titre « Algèbre et trigonométrie » : le paragraphe III mentionne le rapport de deux vecteurs parallèles, de mesure algébrique d'un vecteur sur un axe, d'abscisse d'un point et de formule de Chasles ; de projection orthogonale, somme algébrique et coordonnées rectangulaires d'un vecteur. Le programme de cinématique est le même que dans la classe de Mathématiques.

– Le programme de cette classe fait intervenir massivement les vecteurs dans le traitement de la cinématique : on introduit par exemple le vecteur vitesse de la projection d'un mobile sur un plan ou une droite, ainsi que la détermination des vecteurs vitesse et accélération lorsque la position du mobile à tout instant est définie par ses coordonnées dans un système d'axes. L'originalité dans le titre « Géométrie » consiste à regrouper dans le titre I tout ce qui concerne les « éléments orientés » : vecteurs, orientation du plan et de l'espace, mesures algébriques d'angles orientés, trièdres orientés. En ce qui concerne les vecteurs, on voit apparaître pour la première fois le mot « équipollence », avec la signification de « vecteurs égaux ». Le repérage d'un point dans le plan et dans l'espace à l'aide d'un système d'axes fait allusion aux projections d'un vecteur, ce qui n'était pas précisé dans les programmes précédents. L'impact des vecteurs ne se limite pas à ce titre I : ils sont réutilisés dans le traitement des transformations du plan ou de l'espace (titre II du programme). En revanche, ils sont très peu utilisés dans les titres III (Division harmonique, puissance d'un point par rapport à un cercle, faisceaux de cercles, polaire et pôle, inversion) et IV (coniques). Le produit scalaire ne figure pas au programme (même si certains manuels le traitent, celui de C. Lebossé et C. Hémery, par exemple).
– En classes préparatoires, l'arrêté du 27 juin 1956 fixe le programme des deux années : celui (programme A1) de première année, dans la série où les mathématiques sont prépondérantes, comporte dix-neuf paragraphes.

Le deuxième a pour titre « Vecteurs », et installe la dichotomie « Notions affines/Notions métriques » : au rang des premières, on trouve l'équipollence, la somme et la différence, le produit par un scalaire et leurs propriétés algébriques, les repères et changement de repères, les opérations sur les composantes, les conditions de parallélisme, et enfin, le barycentre ; on signale que l'on peut distinguer les vecteurs liés, glissants, ou libres d'après la définition de leur égalité). Les notions métriques concernent les trois produits – scalaire, vectoriel et mixte – leurs propriétés et leurs expressions « en coordonnées rectangulaires, avec une même unité de longueur ».

Le cinquième paragraphe a pour titre « Algèbre linéaire » : sans imposer d'ordre, il évoque les systèmes d'équations linéaires à deux ou trois inconnues et leur interprétation à l'aide de vecteurs, les déterminants d'ordre deux et trois ; les matrices rectangulaires et leur produit par une matrice uniligne ou unicolonne ; les vecteurs à n coordonnées, réelles ou complexes ; la notion d'espace vectoriel de dimension n, de base, de sous espace ; les matrices carrées régulières, et leur caractérisation à l'aide de leur déterminant ; le produit des matrices ; la notion de rang d'une matrice rectangulaire.

Le treizième paragraphe a pour titre « Géométrie analytique ». Les coordonnées cartésiennes sont rectangulaires ou obliques, les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques figurent au programme. Il est précisé que les questions métriques ne seront traitées qu'en « coordonnées rectangulaires avec une même unité de longueur, en liaison avec le calcul vectoriel ». On retrouve les mêmes types de questions que dans les programmes précédents ; s'y rajoutent le volume d'un tétraèdre, la recherche et l'étude analytique d'un lieu défini par des conditions simples, ainsi que des exemples simples d'enveloppes de droites en géométrie plane.

Le quatorzième paragraphe, intitulé « Géométrie infinitésimale (en liaison avec la cinématique du point) » traite de l'analyse vectorielle, jusqu'à la formule de Taylor ; il comporte également l'étude d'une courbe définie paramétriquement (y compris la courbure et les points d'inflexion ou de rebroussement), ou en coordonnées polaires (symétries, tracé, tangentes, branches infinies).

Le dix-huitième paragraphe traite de la Cinématique, en liaison avec la géométrie infinitésimale.

7 - Les programmes des années 1960

Les programmes précédents vont subir plusieurs modifications, de 1958 à 1966. Les analyses qui suivent concernent les programmes en vigueur en 1966.

– Dans le programme de Quatrième, dans le titre « Algèbre », la formule de Chasles pour trois points d'un axe est traitée en terme de segment orienté (le mot « vecteur » n'apparaît plus).

– Dans le programme de Troisième, en Géométrie plane, apparaît le rapport de deux segments, ainsi que celui de deux segments orientés portés par une même droite, la division d'un segment dans un rapport donné est traité dans le cas arithmétique et dans le cas algébrique. Le théorème de Thalès est traité dans ce cadre. En géométrie dans l'espace, figurent les notions de vecteurs équipollents, et vecteurs opposés, ainsi que la somme de deux vecteurs, ce qui constitue la première apparition des vecteurs dans ce domaine d'étude.

– En classe de Seconde, dans le programme de géométrie, apparaît un nouveau et important titre, libellé sous la forme « Éléments orientés -Vecteurs » dans les sections A et C et « Vecteurs » en section T.

Le paragraphe 1 concerne les éléments orientés sur une droite : on y reprend le langage des segments orientés vu en classe de Troisième. En section C, on pousse jusqu'à la division harmonique.

Le paragraphe 2 traite des vecteurs : équipollence ; addition : associativité et commutativité, vecteur nul, vecteurs opposés, soustraction. Ensuite sont introduites les projections (orthogonales ou non, en géométrie plane ou de l'espace) ainsi que leur effet sur une somme ou différence de vecteurs. Le cas où la droite sur laquelle on projette est orientée fait l'objet d'un traitement particulier, par le biais de la mesure algébrique de la projection d'un vecteur, d'une somme ou différence de vecteurs.

Le paragraphe 3 introduit pour la première fois la multiplication d'un vecteur par un nombre, en liaison avec le traditionnel rapport de deux vecteurs parallèles. Le théorème de Thalès et sa réciproque sont vus dans le plan et dans l'espace, en liaison avec la projection du produit d'un vecteur par un nombre, ou avec sa mesure algébrique si l'on projette sur une droite orientée.

Le paragraphe 4 traite de la translation et de l'homothétie, définies à l'aide des vecteurs. Un des buts explicites est de démontrer la double distributivité, par rapport à l'addition, de la multiplication d'un vecteur par un nombre. Les effets de ces transformations sur les droites, plans, segments, angles, cercles sont mis au service de problèmes tels que la recherche des homothéties transformant un cercle en un autre, ou la recherche des tangentes communes à deux cercles.

Un autre titre aborde les coordonnées en géométrie plane, en axes obliques ou rectangulaires d'un point , d'un vecteur.

– en classe de Première C, la partie du programme relative à la géométrie est intitulée « Géométrie et géométrie analytique », et comporte six paragraphes, dont nous donnerons les éléments essentiels :

1 - Application des vecteurs à la géométrie

Vecteurs liés équipollents, vecteur libre

Addition, projection, multiplication par un nombre relatif

Coordonnées dans une base (cette dernière étant définie séparément dans le plan et dans l'espace)

Condition analytique pour que deux vecteurs du plan soient parallèles à une même direction de droite ; pour que trois vecteurs soient parallèles à une même direction de plan

Interprétation vectorielle d'un système de deux ou trois équations du premier degré à deux inconnues

Correspondance bijective point-vecteur, un point A étant choisi.

Représentation paramétrique vectorielle d'une droite, d'un plan

Barycentre de deux points

Multiplication scalaire de deux vecteurs ; commutativité, distributivité par rapport à la somme ; carré scalaire d'une somme, d'une différence ; relation dans un triangle quelconque. Expression de $MA^2 \pm MB^2$; étude de la somme $MA^2 - k^2 MB^2$ (ce point apparaît déjà dans les programmes du 2 mai 1961).

2 - Géométrie analytique plane (repère affine)

Repère, changement de repère

Représentation paramétrique d'une droite (déduite de la représentation paramétrique vectorielle)

Équation cartésienne d'une droite ; application aux équations et inéquations du 1er degré à deux inconnues

3 - Géométrie analytique plane (repère orthonormé)

Formule de changement de repère orthonormé, les deux repères étant de même sens

Expression analytique du produit scalaire. Distance de deux points. Calcul du cosinus de l'angle de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs (ce point apparaît déjà dans les programmes du 2 mai 1961).

Calcul du sinus de l'angle orienté de deux vecteurs donnés par leur coordonnées le plan et le repère ayant la même orientation.

Coordonnées d'un vecteur normal à une droite donnée par son équation cartésienne ; condition d'orthogonalité de deux droites ; équation d'une droite donnée par un de ses points et un vecteur normal unitaire ou non ; distance d'un point à une droite (ce point apparaît déjà dans les programmes du 2 mai 1961)

Équation du cercle ; problème inverse (ce point apparaît déjà dans les programmes du 2 mai 1961).

Définition géométrique de la parabole : foyer, directrice, paramètre, axe, sommet,équation de la tangente en l'un de ses points (ce point apparaît déjà dans les programmes du 2 mai 1961).

4 - Éléments de géométrie analytique dans l'espace

En repère affine (synonyme de repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ quelconque)

Repère cartésien affine ; coordonnées d'un point, d'un vecteur

Changement de repère

Représentation paramétrique d'une droite, d'un plan

Équation cartésienne d'un plan ; conditions pour que deux plans donnés par leurs équations soient parallèles

Intersection d'une droite définie paramétriquement et d'un plan

Condition pour qu'une droite (définie par un vecteur directeur) soit parallèle à un plan donné par son équation cartésienne.

En repère orthonormé :

Expression analytique du produit scalaire. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs. Distance de deux points.

Coordonnées d'un vecteur normal à un plan donné par son équation cartésienne ; condition d'orthogonalité de deux plans ; distance d'un point à un plan.

5 - Étude de quelques surfaces

Surface prismatique, surface cylindrique

Surface conique

Sphère

6 - Cinématique

Mouvement rectiligne ; équation horaire, vecteur vitesse, vecteur accélération, leurs mesures algébriques

Mouvement circulaire uniforme : vecteur vitesse, hodographe, vecteur accélération.

Relation entre le mouvement circulaire uniforme et le mouvement vibratoire simple. Mouvement rectiligne défini par $x = a\cos(\omega t+\varphi) + b\sin(\omega t+\varphi)$.

Les éléments complètement nouveaux dans ce programme ne manquent pas. Au premier rang d'entre eux figurent le barycentre et surtout la multiplication scalaire, ainsi que la distinction géométrie affine/géométrie métrique en ce qui concerne la géométrie analytique. On peut également noter l'importance de cette dernière, et le rôle d'intermédiaire joué par les vecteurs, qui constituent un passage obligé.

– Le programme de la classe de Terminale C (programme en vigueur à partir du 15/09/67) comporte en géométrie des compléments de géométrie plane parmi lesquels figurent l'ensemble des points M tels que l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ soit égal à un angle donné ; en ce qui concerne la géométrie dans l'espace, il comporte le barycentre d'un système de *n* points, ainsi que la transformation de la somme $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ en géométrie affine, et de la somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ en géométrie métrique dans les deux cas $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Les vecteurs interviennent également dans l'importante partie du programme réservée aux transformations : translations, produit de translations, déplacements et symétries en géométrie plane, déplacements dans l'espace, produit de deux demi-tours d'axes coplanaires ou non, symétries dans l'espace, homothétie (plan et espace), similitudes, affinité (géométrie plane), inversion.

De plus, les vecteurs font leur entrée dans la partie du programme intitulée «Arithmétique, algèbre et notions d'analyse », dans le titre « Fonctions vectorielles d'une variable réelle » : il s'agit de fonder la dérivation vectorielle, en vue de son intervention en Cinématique ; la dérivée d'une somme, du produit d'une fonction par un scalaire (variable), du produit scalaire de deux vecteurs figurent au programme, avec pour application la recherche de tangentes aux coniques et à l'hélice circulaire.

La Cinématique affiche un usage très important des vecteurs : les vecteurs vitesse et accélération apparaissent comme titres de paragraphe ; pour chacun d'eux, on s'intéresse à leurs coordonnées, ainsi qu'à l'effet d'une projection sur un plan ou une droite fixe.

Enfin, dans le premier titre du programme, « Notions générales », à la rubrique « Loi de composition ; loi interne, loi externe » figure l'étude d'une loi externe et la structure d'espace vectoriel sur le corps des réels.

On notera l'importance du volume de ces programmes de Première et Terminale C qui ont joué un rôle de transition entre les programmes de 1945 et ceux dits « de la période des mathématiques modernes », auxquels nous allons nous intéresser dans le prochain paragraphe. Ce volume s'explique par la volonté de rénover (introduction du langage ensembliste et dans une moindre mesure du vocabulaire de la logique, introduction des structures de groupe, anneau et corps, et espace vectoriel), tout en gardant l'étude de questions classiques telles que le birapport et la division harmonique, la polaire d'un point par rapport à deux droites, la puissance d'un point par rapport à un cercle, les faisceaux de cercles, la conjugaison par rapport à un cercle, et l'inversion.

– Les programmes de Mathématiques Supérieures et Spéciales (arrêté du 21 janvier 1963) sont les premiers dans lesquels les espaces vectoriels et les espaces affines sont introduits en tant que tels : les espaces vectoriels apparaissent en tant que titre du premier sous-paragraphe du titre « Algèbre linéaire » dans le programme de mathématiques supérieures ; quant aux espaces affines, leur introduction dans le programme des classes de mathématiques spéciales est plus discrète : elle n'existe que dans le programme A' renforcé en mathématiques, et le paragraphe qui les concerne est affecté d'un astérisque signifiant qu'ils « peuvent être utilisés à l'occasion de problèmes ou d'exercices d'application, à l'exclusion de toute question de cours, écrite ou orale ».

En ce qui concerne l'introduction des espaces vectoriels, les commentaires des programmes de la classe de mathématiques supérieures relatifs au titre III « Algèbre linéaire » sont très éclairants :

« Pour les rédacteurs du programme de 1956, d'une part le calcul matriciel précédait et éclairait la notion d'espace vectoriel, d'autre part un vecteur était défini par l'ensemble rangé de n nombres réels ou complexes ; autrement dit, le programme se bornait à des « modèles » particuliers d'espaces vectoriels, $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$. Le nouveau programme a adopté un point de vue plus abstrait, utilisant une terminologie inspirée de la géométrie. Un espace vectoriel sur un corps est défini axiomatiquement, cette définition étant, bien entendu, suivie d'exemples. »

Les rédacteurs précisent d'ailleurs d'emblée qu'une « introduction naturelle à l'étude de l'algèbre linéaire est fournie par l'étude des notions présentées en géométrie et géométrie analytique, et par l'interprétation vectorielle des systèmes de deux ou trois équations linéaires à deux ou trois inconnues. » Quant aux détails du programme relatif aux espaces vectoriels, ils font apparaître les notions suivantes :

Structure d'espace vectoriel sur un corps commutatif. Sous espaces vectoriels.

Espace vectoriel engendré par un nombre fini d'éléments ;

système libre de vecteurs ; définition et existence d'une base.

Dimension. Base d'un sous espace, et théorème dit « de la base incomplète ».

Application linéaire d'un espace vectoriel dans un espace vectoriel ; noyau ; image.

produit par un scalaire, somme, composée de telles applications linéaires. Rang.

Le calcul matriciel, les déterminants, les systèmes d'équations linéaires sont les titres des autres paragraphes de la partie « Algèbre linéaire », et il est rappelé que l'ordre du programme (qui, rappelons-le, fait apparaître les espaces vectoriels en premier) n'est nullement imposé.

– En analyse, l'intégrale est présentée en tant que forme linéaire, même si les commentaires précisent que la théorie de ces formes n'est pas au programme.

– On retrouve les vecteurs dans le titre VII relatif aux fonctions de plusieurs variables, où apparaissent pour la première fois[8] les éléments principaux de l'analyse vectorielle :

Notion de champ de vecteurs. Définition du gradient, de la circulation.

Énoncé de la formule de Riemann.

Définition de la divergence et du rotationnel ; énoncé des formules d'Ostrogradski et de Stokes.

Potentiel scalaire ; potentiel vecteur.

Mais le programme précise que « le professeur pourra ne donner aucune démonstration et se limiter à deux ou trois variables ; l'essentiel est que les élèves sachent appliquer les résultats énoncés ci-dessous en vue de la physique ». Toutes ces notions d'analyse vectorielle font l'objet d'un descriptif détaillé dans les commentaires des programmes.

– Les interventions des vecteurs dans le titre X « Géométrie et la géométrie analytique », n'apportent guère de nouveauté par rapport aux précédents programmes ; d'ailleurs, les rédacteurs du programme rappellent en introduction que « l'objet de cette section est l'application du calcul à l'étude de faits géométriques déjà rencontrés dans les classes précédentes. ». Le programme de ce titre est organisé autour de cinq sous-titres :

A) Vecteurs liés, équipollence, vecteur libre.

Vecteurs (libres) : somme et différence, produit par un scalaire, projection. Base, changement de base.

B) Notions affines et projectives :

Repère cartésien, coordonnées cartésiennes d'un point. Changement de repère. Barycentre.

Paramètres directeurs d'une direction de droite.

La droite dans le plan ; la droite et le plan dans l'espace ; représentations diverses. Problèmes simples relatifs à leurs déterminations et à leurs intersections. Faisceaux linéaires de droites dans le plan ; faisceaux linéaires de plans dans l'espace.

Introduction des coordonnées homogènes ; éléments à l'infini, birapport. Division harmonique ; faisceau harmonique.

---

[8] À l'exception de la notion de gradient qui faisait une timide apparition dans les programmes de 1956, à l'occasion de l'introduction des « fonctions scalaires d'un point ».

C) Notions métriques :

a) Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte ; expression de ces produits dans une base orthonormée. Cosinus directeurs d'une direction d'axe.

b) Coordonnées cartésiennes d'un point. Changement de repère orthonormé : matrice des neuf cosinus directeurs. Coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

c) Problèmes d'angles et de distances dans le plan et dans l'espace, le repère étant orthonormé.

Aire du triangle, volume du tétraèdre.

D) Modes analytiques de représentation des courbes planes (coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires) ; équation, représentations paramétriques.

Application aux coniques : équations réduites, équations d'une conique ayant l'origine pour foyer (coordonnées cartésiennes, coordonnées polaires).

Recherche de lieux géométriques dans le plan.

E) Vecteurs glissants :

Définition ; moment en un point et par rapport à un axe. Systèmes de vecteurs glissants ; somme, moment résultant.

Systèmes équivalents ; torseur, axe central. Systèmes de vecteurs parallèles, concourants, coplanaires.

La Cinématique est le dernier titre dans lequel les vecteurs jouent un rôle important, comme en témoigne leur affichage :

Système de référence, mouvement d'un point ; trajectoire, vecteur-vitesse, vecteur-accélération.

Composantes du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées cartésiennes ou cylindriques.

(On définira à cette occasion le plan osculateur, la courbure et le trièdre de Frenet.).

Mouvement à accélération centrale (les formules de Binet ne sont pas au programme).

Cinématique du corps solide : mouvement de translation, mouvement de rotation autour d'un axe, mouvement hélicoïdal.

Distribution, à un instant donné, des vecteurs-vitesses des points d'un corps solide. Définition de l'axe instantané de rotation et de glissement.

Changement de système de référence ; composition des vitesses, composition des accélérations.

Les commentaires vont au delà de ces aspects d'affichage, soulignant la volonté d'autonomiser la Cinématique par rapport à la Physique : ils précisent à son sujet, qu'elle « peut être présentée comme un chapitre de la physique. Mais parce qu'elle n'utilise que les notions d'espace et de temps, [elle] peut être présentée aisément sans faire appel à l'expérience, c'est-à-dire par voie axiomatique. [...] L'espace est un espace affine euclidien réel de dimension 3, et la cinématique utilise ses axiomes, ses définitions, les notions qui y sont étudiées, notamment les notions affines et métriques et la théorie des déplacements. Le temps est une variable réelle *t*, ayant un caractère d'indépendance absolue, en particulier vis-à-vis des éléments géométriques auxquels elle est éventuellement associée. »

Le programme de Mathématiques Spéciales (arrêté du 21 janvier 1963), fait apparaître les mêmes interventions des vecteurs.

– Le titre III « Algèbre linéaire » reprend le contenu du programme de Mathématiques Supérieures, auquel est ajouté un paragraphe relatif aux valeurs et vecteurs propres. La vraie nouveauté est l'introduction, dans le titre IV, des espaces vectoriels euclidiens de dimension finie pour ce qui concerne la section A, des espaces hermitiens de dimension finie pour la section A'. Les deux programmes ont en commun le premier sous titre A, relatif aux formes quadratiques sur un espace vectoriel réel ou complexe dont le contenu détaillé est le suivant :

Forme bilinéaire ; matrice relative à une base, discriminant. rang. Changement de base.

Forme bilinéaire symétrique. Forme quadratique et forme polaire associée. Rang. Changement de base.

Vecteurs conjugués par rapport à une forme quadratique ; noyau.

Décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Énoncé (sans démonstration) du théorème d'inertie pour une forme à coefficients réels. Forme positive, forme définie positive.

Les commentaires insistent sur l'aspect intrinsèque de cette introduction (indépendante de la base adoptée), déjà souligné en ce qui concerne celle des formes linéaires : « De même que les formes linéaires ne sont plus nécessairement définies de manière formelle comme des polynômes homogènes et du premier degré à n variables, les formes quadratiques et les formes hermitiennes peuvent être définies comme des fonctions, la variable étant un élément d'un espace vectoriel. »

Le sous-titre B a un contenu très différent dans les sections A et A'. Dans la première, il est consacré aux espaces vectoriels euclidiens de dimension deux ou trois : le produit scalaire, l'orthogonalité, les bases orthonormées (ou repères euclidiens), les matrices orthogonales, le produit vectoriel et le produit mixte sont traités en admettant les résultats de géométrie élémentaire acquis dans les classes antérieures (les commentaires précisent que « les notions de longueur, d'angle, d'orientation dans le plan et dans l'espace sont celles qu'a suggéré le monde physique »). En revanche, dans la section A', on traite des espaces vectoriels euclidiens de dimension n, de l'orthogonalité, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité triangulaire, ..., du groupe orthogonal, de la comparaison des orientations de deux repères. Le produit vectoriel et le produit mixte sont traités dans le cas d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois. On aborde même la complexification d'un espace vectoriel réel, le produit scalaire de deux vecteurs du complexifié, ainsi que les vecteurs isotropes.

Le même phénomène se retrouve à propos du sous-titre C. Alors qu'en section A on traite des matrices hermitiennes et matrices symétriques réelles d'ordre deux ou trois, de leurs valeurs et vecteurs propres, et de la réduction d'une matrice symétrique réelle à la forme diagonale par une transformation orthogonale, en section A', on traite plus généralement des espaces hermitiens. En plus des questions figurant au programme de la section A, on voit donc apparaître les rubriques suivantes :

Définition d'une forme hermitienne sur un espace vectoriel complexe ; définition d'un espace hermitien. Produit scalaire de deux vecteurs, orthogonalité. Norme d'un vecteur. Bases orthonormées. Groupe unitaire, matrices unitaires.

– Le titre X « Géométrie et géométrie analytique » fait également l'objet de la même dichotomie. Les programmes des deux sections A et A' ont en commun les rubriques rassemblées sous les sous-titres :

B) Problèmes d'angles et de distances dans le plan et dans l'espace, le repère étant orthonormé ;

C) Vecteurs glissants.

En revanche, le sous-titre A) ne figure qu'au programme de la section A' : il concerne les notions d'espace affine de dimension n ($n \leq 3$) – pour laquelle sont abordées les notions de points et vecteurs, vecteurs liés, translations, groupe affine, repère affine, variétés linéaires affines, barycentre – et d'espace projectif de dimension n ($n \leq 3$), et en particulier les systèmes de coordonnées homogènes, de groupe projectif, ainsi que la liaison entre la géométrie affine et la géométrie projective faisant intervenir les éléments à l'infini. Figurent également au programme les homographies d'une droite projective dans une autre, et l'étude des homographies sur une droite (points doubles, formes canoniques) et celle des involutions. Les commentaires détaillent avec précision cette rubrique du programme, donnant la définition d'un espace affine dans une forme voisine de celle élaborée par Hermann Weyl :

Un espace affine **A** sur un espace vectoriel E est un ensemble (non vide) d'éléments, appelés points, dans lequel est donné pour tout couple (A, B) de deux de ses points un vecteur de E noté $\overrightarrow{AB}$, ceci de façon que soient satisfaites les conditions suivantes :

a) Quels que soient les trois points A, B, C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

b) À tout point P de **A** et à tout vecteur V de E, il correspond un point Q et un seul tel que $\overrightarrow{PQ} = V$.

ainsi que la définition d'une application affine ; les commentaires sont encore plus abondants en ce qui concerne la définition d'un espace projectif, car ils suggèrent une préparation à leur construction algébrique assise sur la géométrie élémentaire.

– La distinction « affine/métrique » se retrouve également dans le titre XI « Géométrie différentielle », pour laquelle les commentaires demandent de distinguer de ce point de vue les propriétés différentielles des courbes.

– Le programme de Cinématique (titre XIII) est le même pour les deux sections : au programme de la classe de mathématiques supérieures il ajoute l'étude du centre instantané de rotation dans le mouvement d'un plan sur un plan, ainsi que celle du roulement sans glissement de la base sur la roulante, question dont nous avons vu que sa généralisation aux plans tangents à une surface présente de l'intérêt pour introduire la notion de transport parallèle. Les commentaires des programmes insistent sur la définition d'un « espace mobile » S de dimension 3 dans un espace affine euclidien E, définition qui permet de ramener la composition des mouvements à la composition des applications et évoquent les abus de langage traditionnels utilisés en physique : « solide mobile » au lieu de « position d'un solide mobile à l'instant t » et éventuellement son « prolongement indéfini ».

8 - Les programmes de 1968-1972

Ces programmes, souvent évoqués sous le nom de « programme de la période des Mathématiques modernes », vont voir apparaître dans l'enseignement du premier et du second cycle des objets qui n'étaient jusqu'alors présents que dans les programmes des classes préparatoires. Ils ont en commun avec ces derniers des commentaires très abondants relatifs aux contenus à enseigner, destinés aux professeurs.

Les programmes de Collège

La première occurrence des vecteurs figure dans le programme de Quatrième (arrêté du 22 juillet 1971). Dans le titre IV « Géométrie plane », le paragraphe 3 leur est entièrement consacré :

Équipollence de bipoints. C'est une relation d'équivalence. Vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations.

Direction d'un vecteur non nul.

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel. Propriétés.

Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur en est combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. Repères du plan ; coordonnées cartésiennes par rapport à un repère.

Exercices de calcul vectoriel ; médianes d'un triangle.

Le titre III « Géométrie de la droite » insiste sur la notion de distance, sur le repérage d'un point à l'aide de son abscisse dans un repère normé, sur la notion d'ordre :

1. Droite. Distance de deux points sur une droite, repères normés d'une droite.

Abscisse d'un point M dans un repère normé ; notation $\overline{MM'}$.

Changement de repères normés sur une droite.

Expression de la distance de deux points en fonction de leurs abscisses dans un repère normé.

Changement d'unité.

2. Ordre sur une droite. Droite orientée (ou axe). Demi-droite. Segment. Milieu de deux points. Exercices sur le barycentre de deux points.

Les commentaires des programmes de géométrie de Quatrième et de Troisième occupent 29 pages très denses. Leur introduction précise de manière très détaillée la rupture avec les pratiques sollicitées dans les classes antérieures, ainsi que les intentions des auteurs des programmes :

« En Sixième et Cinquième, l'observation des objets de l'espace physique, les constructions graphiques opérées avec les outils usuels constituent une préparation essentielle à l'étude de la géométrie proprement dite, bien que le mot *géométrie* prenne en Quatrième un sens différent du sens initial.

La géométrie en Quatrième et Troisième offre le premier exemple de mathématisation d'une réalité physique.

Nous partons donc de la réalité physique : les plans, droites, points, sont donnés par le monde concret et les mots ont leur sens intuitif antérieur, les plans sont plats, les droites rectilignes ... ; nous admettons, sans insister à ce niveau, que sont expérimentalement satisfaisants les échantillons dont nous disposons, et qui ne nous donnent que des morceaux de plans, des morceaux de droites, des taches petites en guise de points.

Nous étudions expérimentalement ces droites et ces plans et la comparaison des situations observées nous conduit à dégager, de façon plus ou moins intuitive, un ensemble de propriétés que nous considérons comme pratiquement vérifiées et qui constituent le point de départ de la mathématisation. Ce point de départ, et c'est là l'une des difficultés du programme, doit être choisi en fonction de ses développements et de ses généralisations éventuelles, autant que de sa simplicité initiale. Aussi importe-t-il que les propriétés de base apparaissent à la fois comme naturelles et simples à des débutants, et faudra-t-il consacrer à cette étude expérimentale beaucoup de soin et un temps assez important.

Le point de départ ainsi choisi, nous définissons des êtres mathématiques comme des ensembles d'éléments ayant les propriétés précédentes que nous énonçons sous forme d'*axiomes*. De l'ensemble des axiomes choisis seront alors déduites d'autres relations entre les êtres mathématiques ainsi définis et entre leurs combinaisons ; ces relations démontrées sont énoncées sous forme de *théorèmes*. On prendra garde, en adoptant un choix d'axiomes différent de ceux que formulait, plus ou moins explicitement, la géométrie élémentaire d'autrefois, que certains théorèmes anciens deviennent des axiomes et vice versa.

Pour fixer les idées, considérons une droite physique (fil tendu non élastique, trait à la règle sur une feuille de papier) ; nous serons amenés à lui associer, selon l'opportunité, tantôt une droite affine, tantôt une droite euclidienne, êtres mathématiques qui sont des ensembles structurés de points. [...]. Pour ces êtres mathématiques, nous gardons les termes de points, de droites, de plans, qui rappellent leur origine concrète. Si nos expériences sont valides, les axiomes qui lient tous ces êtres mathématiques, ainsi que le réseau de leurs conséquences, traduisent, avec une certaine approximation et avec une bonne efficacité, des propriétés de la droite et du plan physique et il est légitime d'illustrer ces énoncés par des figures faites au moyen d'instruments de dessin, une règle et un double décimètre (une « fausse équerre » ...) lorsqu'il s'agit d'une droite affine, en outre au moyen d'un compas (une équerre) ...), lorsqu'il s'agit d'un plan euclidien.

À ce sujet, il serait essentiel, comme l'écrivait M. Maurice Fréchet dans un article cité par l'instruction complémentaire de janvier 1957 relative à l'enseignement des mathématiques :

« – de faire vérifier expérimentalement sur un ou deux exemples que les relations rigoureuses entre certains éléments de la théorie ne sont pas vérifiées rigoureusement par les objets concrets correspondants,

– de constater cependant qu'elles le sont approximativement,

– d'affirmer que, quelle que soit la précision des mesures entreprises, elle n'ont jamais conduit dans le passé à des approximations inadmissibles (sauf peut-être dans les phénomènes très particuliers de la relativité où la théorie de la relativité donne une précision " un peu " meilleure). ».

Par ailleurs, remarquons-le, une route sans embranchement, un fil sans nœud, tout aussi bien qu'un morceau de droite physique, illustrent un morceau de droite euclidienne ; un fil de caoutchouc étiré, l'ensemble des températures, illustrent un morceau de droite affine. De même, une feuille de papier posée sur une table constitue un morceau de plan physique et illustre un morceau de plan affine ; la même feuille déformée dans l'espace ne constitue plus un morceau de plan physique, elle continue néanmoins à illustrer un morceau de plan affine. C'est dire, pour compléter la citation précédente de M. Maurice Fréchet, que « les axiomes de la géométrie gardent un sens indépendant de l'interprétation concrète qu'on leur donne, mais ils dépendent de l'expérience en ce sens que c'est l'expérience qui a conduit leur choix et qui, ensuite, l'a justifié ».

En définitive, l'enseignement de la géométrie en Quatrième et en Troisième, qui se borne à la géométrie plane, exprime les intentions suivantes :

– pénétrer la connaissance du plan physique, de ses éléments, de ses formes et de ses relations ;

– en déduire des définitions d'êtres mathématiques et montrer que de telles définitions permettent (et de diverses façons) de construire une géométrie qui soit un modèle fécond de l'espace physique ; il n'est pas exclu que ce modèle ait d'autres images ;

– demander au développement de la géométrie une formation de l'esprit par un entraînement au raisonnement déductif ;

– lui demander aussi des méthodes pour atteindre de nouvelles propriétés du plan physique ; tout vocable, tout schéma abstrait doit, pour être utile à ce niveau, pouvoir se traduire par un dessin du plan physique, réalisable au moyen des instruments usuels de dessin ; acquérir une familiarité avec le plan physique, est indispensable pour toutes les disciplines que servent les mathématiques ;

– offrir éventuellement, pour l'avenir, des ouvertures sur d'autres domaines que le plan physique.

L'enseignant s'astreindra à conjuguer et à équilibrer ces diverses intentions, en particulier à l'égard des élèves nombreux du premier cycle dont les études se poursuivront ailleurs que dans le second cycle classique et moderne. Un mode de présentation du programme, conforme à de telles intentions et retenu par la Commission, a fait l'objet d'une première annexe, publiée in fine, qui suggère la démarche décrite par le présent commentaire ; d'autres modes de présentation pourront faire l'objet de nouvelles annexes accompagnées de connaissances appropriées.

Ce commentaire, répétons-le, est destiné à *l'information des professeurs* ; il dépasse sur de nombreux points le niveau d'un enseignement de premier cycle ; il peut même présenter l'éclairage de certaines rubriques dans un ordre différent de la lettre du programme et sur ce dernier point les professeurs gardent, selon la tradition, une liberté semblable dans leur enseignement. »

Compte tenu de sa longueur nous ne reproduirons pas ici la présentation du programme retenue par la Commission ; elle est restée dans la mémoire du système d'enseignement sous la formule « droite = famille de bijections ». Nous en donnerons cependant les titres des paragraphes successifs, parfois accompagnés de quelques précisions.

Géométrie de la droite

• *La droite physique*

Le dernier alinéa de ce paragraphe précise :

« Toute cette étude fera l'objet de manipulations et de nombreux exercices numériques ; leur but est de familiariser les élèves avec une terminologie qui, utilisée initialement pour la droite physique, sera ensuite conservée pour les droites qui seront mathématiquement définies ; dans cette terminologie, si une droite physique est munie d'une unité de longueur, elle est euclidienne, sinon elle est affine ; en fixant l'unité de longueur et le sens de parcours, on en fait un axe physique. »

• *Présentation mathématique d'un axe*

Un axe A est un ensemble E muni d'une famille F de bijections de E sur $\mathbf{R}$, telle que :

a) pour tout élément f de F et pour toute constante réelle a, l'application g définie par $g(\mathrm{M}) = f(\mathrm{M}) + a$ appartient à F ;

b) réciproquement, si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de F, il existe une constante réelle α telle que $f_2(\mathrm{M}) = f_1(\mathrm{M}) + \alpha$.

A et B étant deux points quelconques d'un axe, le nombre $f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A})$ est indépendant de f ; on le note $\overline{\mathrm{AB}}$; la relation de Chasles est vraie.

On définit « A est avant B » par « $\overline{AB} \geq 0$ ».

• *Présentation mathématique d'une droite euclidienne*

La famille de bijections est agrandie ; elle est telle que :

a) pour tout élément f de F et pour toute constante réelle a, les applications g et g' définies par $g(M) = f(M) + a$ et $g'(M) = -f(M) + a$, appartiennent à F ;

b) réciproquement, si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de F, alors l'une des deux éventualités suivantes est réalisée :

– ou bien il existe une constante réelle α telle que $f_2(M) = f_1(M) + \alpha$.

– ou bien il existe une constante réelle β telle que $f_2(M) = -f_1(M) + \beta$.

A et B étant deux points quelconques d'un axe, le nombre $| f(B) - f(A) |$ est indépendant de f ; on le note d(A, B) ou plus simplement AB et on l'appelle distance des deux points A et B. La distance vérifie les propriétés

d(A, B) = d(B, A)

d(A, B) ≥ 0 et d(A, B) = 0 si et seulement si A = B

si C est entre A et B, on a d(A, B) = d(A, C) + d(C, B).

• *Présentation mathématique d'une droite affine*

On agrandit encore la famille Φ de bijections, de façon à ce que :

a) pour tout élément f de Φ et pour tout élément (a, b) de $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$, l'application g définie par $g(M) = af(M) + b$ appartient à Φ ;

b) réciproquement, si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de Φ, alors il existe un couple (α,β) appartenant à $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ tel que $f_2(M) = \alpha f_1(M) + \beta$.

P et Q désignant deux points de la droite, la différence $f(Q) - f(P)$ dépend de l'élément f de Φ ; en revanche, R et S étant deux points distincts de la droite, le rapport $\dfrac{f(Q) - f(P)}{f(S) - f(R)}$ n'en dépend pas ; on le note parfois $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$. L'invariance de ce rapport donne une propriété affine du quadruplet (P, Q, R, S).

• *Repères*

Le repère correspondant à f est le couple (I, A) tel que $f(I) = 0$ et $f(A) = 1$.

• *Milieux, barycentres*

Ils sont définis par une relation entre $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$, ou à l'aide de leurs abscisses dans un repère, en justifiant à chaque fois l'indépendance de la définition par rapport à la bijection f ou au repère choisi.

Dans ce paragraphe, un type de problèmes est évoqué : celui de la recherche du point M tel que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, k désignant un nombre réel différent de 1.

• *Exemples*

Sont cités :

– le ruban-mètre flexible d'une couturière comme exemple de morceau de droite euclidienne ;

– l'ensemble des instants comme exemple de droite affine ;

– l'ensemble des températures comme exemple de morceau de droite affine (en première approximation).

– l'ensemble des nombres réels comme exemple d'axe, de droite euclidienne et de droite affine.

• *Remarques*

L'une d'elles attirent l'attention sur le fait que deux droites affines peuvent avoir le même support et être cependant distinctes : l'exemple d'une voie ferrée graduée en kilomètres, puis en minutes est cité.

Géométrie plane

Les paragraphes sont ici forts nombreux. Nous nous contenterons de donner leurs titres (ainsi que quelques brèves précisions), qui donnent une bonne idée générale du contenu.

• *Le plan physique*

• *Présentation mathématique d'un plan affine réel*

• *Axiomes d'incidence*

Présentation A ; présentation B

Les deux présentations diffèrent par le fait qu'il n'est pas indispensable de munir dès le départ chacune des droites d'une structure affine : l'axiome de Thalès permet de les obtenir toutes à partir d'une seule, pourvu qu'on dispose des supports de toutes les droites.

• *Parallélisme et projections*

On démontre que la relation de parallélisme est une relation d'équivalence ; une direction en est une classe d'équivalence.

• *Axiome de Thalès*

• *Rapport de projection*

• *Application de l'axiome de Thalès*

(au triangle, conservation du milieu, conservation du barycentre par projection)

• *Symétrie centrale*

• *Parallélogramme*

Il est défini comme un quadruplet de points (A, B, C, D) tel que les segments [AC] et [BD] ont même milieu. Le parallélogramme est dit aplati si ses sommets appartiennent à une droite.

La caractérisation du parallélogramme non aplati par le parallélisme des côtés opposés est démontré à l'aide de la symétrie centrale.

On étudie précisément l'effet d'une projection sur un parallélogramme, dans le but de démontrer la transitivité de la relation d'équipollence.
Tout parallélogramme se projette sur une droite suivant un parallélogramme ; la réciproque est fausse, mais si les projections de direction différentes d'un même quadruplet sont deux parallélogrammes, alors le quadruplet est un parallélogramme.

• *Bipoints*
Il est précisé que pour rendre claire la notion de vecteur du plan, « il peut valoir mieux ne pas l'avoir introduite dans le cas particulier d'une droite, bien que ce soit une présentation mathématique correcte. »
• *Équipollence*
• *Étude de la relation d'équipollence*
sur une droite
dans le plan
• *Vecteur*
• *Addition des vecteurs*
• *Multiplication d'un vecteur par un réel*
• *Décomposition d'un vecteur, coordonnées*
Il est précisé que c'est seulement en classe de Troisième que l'on étudiera de façon systématique l'équation d'une droite. Le fait que les médianes d'un triangle sont concourantes est signalé comme étant un très bon exercice de calcul vectoriel, mais que si ce genre d'exercice est opportun, la notion de barycentre de trois points n'est pas au programme.
• *Réflexions sur le choix des axiomes*
L'une d'elles signale le cas de plans affines finis, pour lesquels les corps de base sont $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

La deuxième revient sur la détermination d'un plan affine réel : on sait déjà qu'il suffit de connaître la structure affine d'une seule des droites, cette propriété résultant de la construction du milieu d'un bipoint. Une autre façon de déterminer un plan affine réel est de se donner deux droites affines (support et structure) de directions différentes, ainsi que les supports de toutes les parallèles à ces droites : alors les supports de toutes les autres droites sont complètement déterminés. Le paragraphe se termine par la démonstration de la non-contradiction du système d'axiomes en question.

Ainsi l'essentiel du calcul vectoriel est introduit en classe de Quatrième. Le programme de Troisième a pour objet essentiel le plan euclidien. Il réutilise les vecteurs, les seules nouveautés concernent évidemment la notion de norme, ainsi que la condition d'orthogonalité de deux vecteurs dont on connaît les coordonnées dans un repère orthonormé. Une brève allusion aux isométries vectorielles – sans qu'elles soient explicitement nommées – apparaît dans les commentaires relatifs aux isométries du plan, comme moyen commode pour démontrer qu'une isométrie est déterminée par l'image d'un triangle.

Les programmes de Lycée

Programme de la classe de Seconde

Le programme de la classe de Seconde (arrêtés des 26 juillet 1968 et 3 juillet 1969), relatif aux sections C et T, voit apparaître un titre IV entièrement nouveau « Géométrie et espaces vectoriels sur **R** ».
Il reprend les contenus déjà vus au collège (bijection d'une droite sur R, abscisse, mesure algébrique, ..., parallélisme, projections, parallélogramme, bipoints, équipollence, vecteurs, addition, multiplication par un nombre réel) en vue de dégager l'idée de structure d'espace vectoriel, et d'en fournir des exemples autres que celui des vecteurs du plan : $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, fonctions affines, fonctions en escalier, fonctions affines par intervalles. On introduit les notions de combinaisons linéaires de vecteurs du plan, de dépendance et d'indépendance linéaire, de droite vectorielle, puis on élargit le cadre pour définir la notion de plan vectoriel, et de base d'un tel plan. À ce sujet, les instructions insistent sur le caractère progressif de la démarche : « La première phrase de ce paragraphe, *introduction à la locution « espace vectoriel »*, le début de la troisième, *combinaison linéaire de vecteurs du plan*, – alors que l'expression *plan vectoriel* n'apparaît qu'ensuite – suggèrent une démarche progressive s'appuyant sur les résultats des paragraphes précédents. Le professeur sera donc amené à reprendre et à compléter les faits connus du plan et à les traduire en langage d'espace vectoriel ; ainsi, deux vecteurs du plan sont linéairement dépendants s'ils appartiennent à une même droite vectorielle [...]. On arrive ainsi à l'ensemble des vecteurs $\vec{X} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs donnés linéairement indépendants, λ et μ décrivant **R** ; c'est un *espace vectoriel de dimension 2*, que le programme appelle plan vectoriel. [...] Certains professeurs préféreront peut-être donner plus tôt les axiomes définissant la structure d'un plan vectoriel et démontrer par un raisonnement algébrique que tout système de deux vecteurs linéairement indépendants d'un plan vectoriel en est une base. ». C'est dans le cadre de cette dimension 2 que sont traitées les coordonnées de vecteurs, la condition de dépendance linéaire de deux vecteurs, l'interprétation vectorielle d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Dans la section C, le programme introduit la notion d'application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même ou dans un autre, et propose comme exemples les formes linéaires, les projections d'un plan vectoriel sur une droite vectorielle ou d'une droite vectorielle sur une autre ; la notion d'application affine d'un plan vectoriel dans lui-même et le

groupe des dilatations d'un plan vectoriel (définies par $h(\vec{x}) = a\vec{x} + \vec{b}$ avec a appartenant à **R***) sont introduits en vue de l'étude des translations et homothéties ponctuelles : les instructions demandent explicitement de signaler à cet effet le sous-groupe des translations vectorielles ($a = 1$) et celui des homothéties vectorielles ($\vec{b} = \vec{0}$). L'utilité de la représentation paramétrique d'une droite définie par un point et un vecteur directeur est également signalée pour démontrer que l'image d'une droite (resp. demi-droite ou segment) par une translation ou une homothétie est une droite (resp. demi-droite ou segment). Cette représentation paramétrique vectorielle est enfin sollicitée pour traiter l'étude de la droite en géométrie analytique affine. Sur ce dernier point, les instructions précisent : « On insistera particulièrement sur la définition de l'équation cartésienne d'une droite qui traduit l'égalité de deux ensembles, d'une part celui des points de la droite, d'autre part celui des points du plan dont les coordonnées sont liées par une relation du type $ax + by + c = 0$, qui est en fait une équation à deux inconnues. C'est, en effet, la première fois que les élèves rencontrent la locution *équation cartésienne* ; il est essentiel qu'ils en comprennent tout le sens et que cette acquisition soit définitive. »

Le titre V « Géométrie métrique plane » semble construit de la même manière que le titre IV : dans le paragraphe 1, on regroupe les rappels du programme de Troisième indispensables pour la définition et l'étude du produit scalaire, qui font l'objet du paragraphe 2, ainsi que de remarques très détaillées dans les instructions (en particulier pour la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'inégalité triangulaire, qu'on en déduit). Figurent au programme la transformation des expressions $MA^2 \pm MB^2$ et les problèmes géométriques associés. Mais une autre façon d'introduire le produit scalaire, semblable dans ses grandes lignes à celle figurant au programme de Première C, est évoquée dans ces mêmes instructions, qui signalent l'intérêt de la comparaison de ces deux présentations pour mettre en évidence le fait que « l'introduction d'une notion nouvelle peut donner l'occasion d'une reconstruction axiomatique d'un modèle propre à représenter plus fidèlement l'espace physique. ». Dans un dernier paragraphe, les instructions évoquent l'utilité et l'efficacité de l'algèbre linéaire ainsi introduite, ainsi que la ligne de partage affine/métrique :

« On envisagera les éléments d'algèbre linéaire sous-jacents moins pour eux-mêmes que pour les services qu'ils peuvent rendre dans des domaines très variés ; on donnera ainsi confiance à tous les élèves, même s'ils ont un pouvoir d'abstraction encore modeste. De nombreux exercices et problèmes illustreront donc cette partie du cours, on veillera à ce qu'ils n'en soient pas une simple paraphrase, on choisira certains d'entre eux pour la simplicité et la rapidité avec lesquelles ils font retrouver des résultats acquis avec peine dans le premier cycle. On posera enfin comme nouvelle « règle du jeu » de ne plus emprunter d'ordinaire des outils de géométrie métrique (soit antérieurs comme les cas d'égalité ou de similitude des triangles, soit récents comme le produit scalaire), lorsqu'il s'agira de démontrer des propriétés affines. ».

Le programme de la classe de Première C

Les vecteurs interviennent dans les trois titres constituant le programme de géométrie : le titre IV « Géométrie vectorielle et géométrie affine », le titre V « Produit scalaire et fonctions circulaires », et le titre VI « Géométrie métrique (dans le plan et dans l'espace ». Les instructions correspondantes, qui comportent 22 pages, rentrent parfois dans le détail de certaines présentations et démonstrations. Dans leur introduction, elles précisent le sens qu'il convient d'attribuer au mot « Géométrie ».
« Ce mot a recouvert longtemps une certaine description du monde physique, une énumération (parfois incomplètement explicitée) de propriétés que des raisons expérimentales lui faisaient attribuer, enfin – et c'est l'essentiel – l'étude des propriétés qui pouvaient être déduites des précédentes par un raisonnement logique. Il désigne dorénavant une construction mathématique, logique par nature, s'appuyant sur un système cohérent d'axiomes où interviennent au premier chef les structures algébriques (espaces vectoriels, groupes ...) et topologiques ($\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ ...).

C'est ce dernier sens qu'adopte définitivement le programme de Première, auquel le programme de Seconde ménageait une transition ; dès lors, faire appel à l'expérience pour décrire un plan, pour détailler les positions relatives d'une droite et d'un plan, pour définir l'orientation d'un plan, serait entretenir une confusion dommageable ; cependant, un schéma, un diagramme, une « figure soignée », restent opportuns pour porter les notations, consigner les hypothèses, suggérer et guider une démarche déductive.

Le vocabulaire de la géométrie mathématique a été emprunté à la géométrie physique ; il y a donc lieu de faire constater, en retour, quels services le *modèle* créé par le mathématicien rend à l'organisation de l'espace physique, à l'échelle de l'expérience quotidienne (géométrie affine euclidienne de dimensions deux et trois). Ici, avec l'étude d'objets usuels et la pratique de certaines de leurs représentations, reprennent place des dessins exécutés à l'aide des instruments usuels, l'angle droit ayant alors sa signification physique ; de tels dessins sont licites dans toutes les sections de Première, ils sont indispensables dans la section E.

Le programme de Seconde et son commentaire ont souligné la variété des êtres mathématiques auxquels peut s'appliquer la structure d'espace vectoriel ; on conservera à la géométrie de Première ce même sens large, en ce qui concerne la structure d'espace affine, euclidien ou non ; c'est parfois en utilisant cette géométrie dans des domaines qui lui ont été récemment ouverts, que bien des élèves trouveront une motivation pour une recherche attentive et féconde ; à ce titre, on ne saurait sans doute juger trop vaste la place qu'accorde à la géométrie le programme de Première.

Même quand il s'agit d'êtres mathématiques qui ne représentent pas l'espace physique, schémas et figures sont utiles. Dans un espace affine de dimension $n = 2$, on dessinera de telles figures à la règle sur une feuille ; pour $n = 3$, on les dessinera en perspective ou en géométrie descriptive (section E). Les vecteurs $\vec{V}$ d'un espace vectoriel E seront figurés par des points, à savoir ceux qui figurent les points M d'un espace affine E auquel on a donné une structure d'espace vectoriel par le choix d'une origine O, $\overrightarrow{OM} = \vec{V}$. Le compas et la donnée de l'unité de longueur permettront de figurer les notions métriques, projection orthogonale, transport des distances, évaluation approchée d'un produit scalaire ; l'ensemble U des vecteurs de norme *un* d'un plan vectoriel euclidien sera figuré par l'ensemble des points du cercle de centre O et de rayon *un* dessiné au compas (cf. cercle trigonométrique). ».

Pour ce qui concerne *la géométrie vectorielle*, figurent au programme les notions de :

– sous-espace vectoriel

– vecteurs linéairement dépendants, indépendants

– base : à ce sujet, les commentaires suggèrent d'introduire la notion de famille génératrice ;

– dimension d'un espace vectoriel : elle résulte de la démonstration du théorème « si un espace vectoriel admet une base de n éléments, toute autre base possède n éléments », théorème pour lequel les commentaires détaillent une démonstration possible dans chacun des cas $n =1$, $n = 2$ et $n = 3$, et évoquent une extension du résultat au cas général.

– plan vectoriel : les commentaires détaillent la notion d'équation d'un tel plan dans une base d'un espace vectoriel de dimension 3.

– dimension d'un sous-espace vectoriel

– intersection de deux sous-espaces vectoriels (dans les cas où $n = 1, 2$ ou 3).

– projection d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel : cette notion n'est évoquée que dans les commentaires ; elle concerne surtout l'extension à la dimension 3 de la définition vue en Seconde pour la dimension 2.

– matrice, dans une base donnée, d'une application linéaire d'un plan vectoriel dans lui-même. Composition de ces applications et multiplication des matrices 2×2 ; déterminant d'une telle matrice.

Pour la *géométrie affine*, le programme comprend les notions suivantes :

– Espace affine de dimension 2 ou 3 : la définition donnée dans les commentaires est une variante de la définition donnée par H. Weyl : elle s'appuie sur le fait que s'il existe un point I pour lequel l'application $M \mapsto \overrightarrow{IM}$ est une bijection, alors il en est de même pour tout autre point I.

– Translations.

– Droites et plans affines (la notion de variété linéaire affine ne figure qu'au programme de Terminale C)

– Parallélisme

– Intersections de droites et de plans affines : dans les commentaires figure à ce sujet un paragraphe intitulé « Retour sur la géométrie physique », dans lequel les auteurs insistent sur le fait qu'à la fin de cette étude, « les élèves doivent constater que la droite, le plan, l'espace physiques sont des images d'un espace affine de dimension un, deux ou trois », et pour qu'ils reconnaissent les propriétés usuelles venues de la géométrie physique telles que « deux points distincts de E déterminent une droite et une seule », « si deux points distincts A et B appartiennent à un plan P, la droite AB est incluse dans le plan P ».

– Repère cartésien ; changement d'origine

– Représentations paramétriques de droites et de plans

– Équation cartésienne d'un plan.

Les commentaires précisent, au sujet des deux derniers alinéas, qu'il convient de conjuguer selon l'opportunité les équations et les représentations paramétriques, notamment pour l'intersection d'une droite et d'un plan, et qu'il conviendra de signaler la condition analytique de parallélisme d'une droite et d'un plan, de deux plans.

En ce qui concerne le titre V « Produit scalaire et fonctions circulaires », les instructions précisent que la définition du produit scalaire en terme de produit de mesures algébriques utilisée en Seconde n'est plus de mise, et le définissent comme forme bilinéaire symétrique définie positive. Le programme reprend celui de la classe de Seconde en ce qui concerne la norme d'un vecteur, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire. Au sujet de l'orthogonalité figure dans les instructions, sous le titre « Projection orthogonale » un paragraphe dont le but est de relier les deux définitions du produit scalaire, dans lequel est évoquée l'expression de la projection orthogonale $\vec{u}'$ du vecteur $\vec{v}$ sur la droite vectorielle de base $\vec{u}$: $\vec{u}' = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$, expression qui ne figure pas au programme, et dont nous reparlerons plus loin.

Les nouveautés, qui font presque toutes l'objet d'un commentaire très directif dans les instructions portent sur les notions et questions suivantes :

– Orthogonalité de deux droites vectorielles, d'une droite et d'un plan vectoriels.

– Bases orthonormées ; existence. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans une telle base.

– Applications linéaires du plan vectoriel euclidien dans lui-même conservant le produit scalaire. Leurs matrices dans une base orthonormée sont de deux types :

$\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$ (1) ou $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$ (2) *avec* $a^2 + b^2 = 1$.

Les matrices du type (1) forment un groupe commutatif ; a et $|b|$ *ne dépendent que de l'application et non pas de la base ; groupe des rotations vectorielles. Étant donné deux vecteurs unitaires* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$*, il existe une rotation vectorielle unique* ϕ *telle que* $\phi(\vec{x}) = \vec{y}$.

– Bases orthonormées donnant la même valeur au coefficient b dans la matrice d'une rotation vectorielle ϕ. Orientation du plan vectoriel euclidien. Cosinus et Sinus d'une rotation vectorielle ; notations Cos ϕ et Sin ϕ. Cosinus et Sinus de la composée de deux rotations vectorielles.
– Angle de deux demi-droites vectorielles D, D' (unique rotation vectorielle amenant D sur D') dans le plan vectoriel euclidien. Angle de deux vecteurs. Calcul du Cosinus et du Sinus de l'angle de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées (base orthonormée, plan vectoriel euclidien orienté). Rotations vectorielles et angles remarquables. Formules d'addition, le groupe des angles étant noté additivement.
– Cercle trigonométrique U. Définition. Bijection du groupe des rotations vectorielles sur U ; structure de groupe de U (notation additive).
Application canonique θ de $\mathbf{R}$ *sur le groupe des rotations vectorielles : on admettra l'existence d'une application surjective θ de* $\mathbf{R}$ *sur le groupe des rotations vectorielles telle que,*
pour tous x et y réels, $\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$,
et que la fonction définie par sinx = Sin [$\theta(x)$] soit dérivable et de dérivée égale à 1 pour x = 0. (L'enroulement d'un fil sur U pourra suggérer intuitivement le premier de ces faits). Nombre π.

Viennent ensuite l'introduction et l'étude (approximations en 0 et dérivées comprises) des fonctions trigonométriques, les équations trigonométriques, les formules d'addition et de duplication et leurs applications, la transformation du produit scalaire $a \cos x + b \sin x$, et l'application à l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$.

Le titre VI « Géométrie métrique (dans le plan et dans l'espace) » introduit la notion de distance dans un espace affine euclidien, avec vérification des trois propriétés d'une distance (au sens de Fréchet).

La projection orthogonale d'un point sur un plan, d'un point sur une droite fait l'objet d'une étude que les instructions suggèrent d'étendre à la projection orthogonale d'une droite, et même à titre d'exercice à l'étude des projections orthogonales de deux bipoints orthogonaux.

L'équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormé et les coordonnées d'un vecteur normal permettent de caractériser analytiquement les plans perpendiculaires. La distance d'un point à un plan, à une droite (dans le plan), ainsi que la perpendiculaire commune à deux droites sont hors programme.

Le programme de géométrie métrique se termine par l'étude du cercle et de la sphère, avec comme application les problèmes associés à la transformation des expressions $MA^2 \pm MB^2$.

Le programme de Terminale C

Les titres VI « Éléments de géométrie affine et euclidienne » et VII « Compléments de géométrie euclidienne plane » recouvrent le programme de géométrie, dans lequel les vecteurs occupent une place privilégiée ; on le retrouve également en analyse, plus précisément dans le titre III « Calcul différentiel » et en particulier dans les sous-titres 4 « Fonctions vectorielles d'une variable réelle » et 5 « Cinématique du point ». Enfin, on retrouve les espaces vectoriels dans la partie du programme relatif aux nombres complexes, leur ensemble **C** étant interprété comme espace vectoriel sur **R** de dimension 2 ; ceci est à rapprocher d'une remarque faite en préambule demandant au professeur, chaque fois que l'occasion s'en présentera « de mettre en évidence sur les exemples étudiés dans les différents chapitres, les structures de groupe, sous-groupe, anneau, corps, espace vectoriel, ainsi que les isomorphismes et homomorphismes (noyau), automorphismes associés. »

Le titre VI se situe dans le prolongement du programme de Première C, la dimension étant toujours égale à 2 ou 3. De plus, son organisation met clairement en évidence les unités structurelles suivantes :

Géométrie vectorielle : espaces vectoriels et applications linéaires ;

Géométrie affine : espaces affines et applications affines ;

Géométrie vectorielle euclidienne : espaces vectoriels euclidiens et transformations orthogonales (isométries vectorielles) ;

Géométrie affine euclidienne : espaces affines euclidiens et isométries.

Le détail de chacune d'elles fait apparaître les notions et questions suivantes :

Géométrie vectorielle

Somme directe de deux sous-espaces vectoriels ; sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F : image et noyau. (Les instructions précisent qu'il conviendra de vérifier que dans le cas où E = F, la somme des dimensions du noyau et de l'image est égale à la dimension de E).

Addition et composition des applications linéaires. Groupe linéaire.

Homothéties vectorielles (elles forment un groupe commutatif, et commutent avec toute application linéaire de E dans E).

Les instructions invitent à étudier les automorphismes involutifs d'un espace vectoriel E, et le lien avec les sous-espaces supplémentaires (afin de pouvoir réinvestir les résultats de cette étude dans celle des isométries vectorielles). Les manuels scolaires en profitent pour étudier les projections (ou même parfois les projecteurs), ainsi que les affinités vectorielles (qui seront réinvesties en géométrie affine).

Géométrie affine

Barycentre dans un espace affine. Variété affine. Repère affine.

Réduction, dans le cas euclidien, de $f(M) = aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$.

Application affine d'un espace affine dans lui-même. Application linéaire associée.

(Les instructions demandent de mettre en évidence la conservation du barycentre, d'établir que l'ensemble des points invariants est une variété linéaire affine).

Exemples : projection parallèle sur un sous-espace affine ; involutions affines, leurs points fixes ; translations et homothéties.

Géométrie vectorielle euclidienne

Applications linéaires d'un espace vectoriel euclidien dans lui-même conservant la norme (Les instructions demandent de démontrer l'équivalence avec la conservation du produit scalaire) ; transformations orthogonales (isométries vectorielles), groupe orthogonal.

Transformations orthogonales involutives (symétries) dans le plan vectoriel et dans l'espace vectoriel de dimension 3 : leurs éléments fixes (qui permettent d'en dresser une classification).

Orientation du plan vectoriel euclidien (rappels de Première)

En Première, seules les rotations vectorielles ont été étudiées. Il s'agit ici d'étudier les symétries orthogonales par rapport à une droite, de les composer, de décomposer une rotation vectorielle à l'aide de deux symétries, l'une quelconque d'entre elles étant fixée arbitrairement.

Étude des rotations vectorielles de l'espace euclidien de dimension 3 (par définition, une rotation vectorielle est, soit l'identité, soit une transformation orthogonale qui a pour seuls éléments fixes ceux d'une droite vectorielle) ; groupe des rotations vectorielles. (Les commentaires suggèrent de commencer l'étude des transformations orthogonales en les classant à l'aide de leurs éléments fixes, d'introduire alors les rotations vectorielles, ainsi que les symétries vectorielles orthogonales par rapport à un plan vectoriel : plusieurs façons d'étudier les autres isométries vectorielles sont détaillées dans ces instructions).

Orientation de l'espace vectoriel euclidien de dimension 3. Les instructions détaillent les orientations associées d'une droite et d'un plan vectoriel orthogonaux, ce qui permet de définir une rotation vectorielle par son axe orienté et un nombre réel.

Produit vectoriel. Les instructions donnent trois façons de définir le produit vectoriel de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ lorsque ces deux vecteurs sont linéairement indépendants :

• $\|\vec{U}\| \, \|\vec{V}\| \, \mathrm{Sin}(\vec{U}, \vec{V}) \, \vec{k}$, où $\vec{k}$ désigne le vecteur unitaire de la demi-normale positive du plan vectoriel P engendré par $\vec{U}$ et $\vec{V}$, le Sinus étant évalué relativement à une base orthonormé directe de P.

• $\|\vec{U}\| \, \|\vec{V}'\| \, \vec{k}$, où $\vec{V}'$ est la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur le plan vectoriel Q orthogonal à $\vec{U}$ et où $\vec{k}$ désigne le vecteur unitaire tel que $(\vec{U}, \vec{V}', \vec{k})$ soit un triplet orthogonal direct.

• le vecteur $\vec{W}$ se déduisant de $\vec{V}$ par trois applications linéaires successives, dont les deux dernières sont permutables :

– la projection de $\vec{V}$ sur le plan vectoriel Q orthogonal à $\vec{U}$;

– l'homothétie vectorielle de rapport $\|\vec{U}\|$;

– la rotation vectorielle d'axe D orienté par $\vec{U}$ et d'angle droit direct dans Q orienté par $\vec{U}$.

L'expression du produit vectoriel de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans une base orthonormée directe figure au programme (les instructions disent que les élèves doivent savoir la retrouver promptement) ; elle permet d'obtenir facilement la normale à un plan défini par deux vecteurs.

Géométrie affine euclidienne

Définition d'une isométrie de l'espace affine euclidien. Toute isométrie est une application affine bijective. Les instructions en donnent une démonstration rapide et élégante, déduisant la conservation du produit scalaire de celle des distances.

Groupe des isométries ; sous-groupe des déplacements.

Dans le plan affine euclidien, symétries, translations, rotations : tout déplacement est de l'un de ces deux derniers types. Concernant les antidéplacements, les instructions demandent d'en donner la forme canonique (produit commutatif d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation parallèle à l'axe).

Dans l'espace affine euclidien de dimension 3, symétries, translations, rotations, vissages : tout déplacement est de l'un de ces trois derniers types. Le classement des antidéplacements n'est pas au programme.

Exemples simples de groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné. À ce sujet, les instructions précisent : « on se gardera de faire de cet alinéa un domaine d'érudition ; il s'agit surtout d'enrichir d'exemples tous les alinéas antérieurs. On se bornera à des exemples simples tels que segment, triangle équilatéral, carré, ensemble de deux droites non coplanaires, ensemble de deux plans, tétraèdre régulier, cube, ... les élèves se familiariseront avec les modèles d'un certain nombre de configurations utiles dans les sciences et techniques ; on en rencontre dans l'étude des édifices atomiques. ».

Le titre VII « Compléments de géométrie euclidienne plane » concerne les angles de couple de droites, les similitudes planes et les coniques. Seul le premier de ces thèmes met en jeu les vecteurs, d'une manière assez indirecte.

Quant aux fonctions vectorielles d'une variable réelle, sont abordées les notions de limite lorsque la variable tend vers un nombre réel donné ou vers l'infini, ainsi que la notion de continuité ; mais l'essentiel concerne la dérivation : définition, coordonnées dans une base de la fonction dérivée ; dérivée d'une somme, du produit d'une fonction vectorielle par une fonction numérique, du produit scalaire de deux fonctions vectorielles, avec l'application à la recherche de tangentes, notamment aux coniques et aux hélices circulaires.

La cinématique du point introduit les notions de trajectoire, vecteur-vitesse, norme et coordonnées de ce vecteur, vecteur-accélération, coordonnées de ce vecteur. Les instructions insistent sur le fait que le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération sont des vecteurs, à ne pas confondre avec leur représentant privilégié dont l'origine est la position du mobile à l'instant considéré. Enfin, figure au programme l'étude des mouvements circulaires et hélicoïdaux uniformes.

Le programme de la classe de Mathématiques Supérieures (arrêté du 4 février 1972)

On retrouve l'organisation déjà présente dans les programmes de Terminale C, en terme de structures, avec un découpage légèrement modifié.

Les *espaces vectoriels* apparaissent dans le titre I « Structures fondamentales » en tant que 5ème sous-titre : « Espace vectoriel sur un corps commutatif K ». Sont alors abordées les notions générales suivantes : espace vectoriel produit de p espaces vectoriels ; sous-espace vectoriel, intersection de sous-espaces vectoriels ; sous-espace vectoriel engendré par une partie (finie ou non) ; somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme directe ; projection ; espace vectoriel quotient ; dépendance et indépendance linéaires. Parties liées et parties libres ; espace vectoriel admettant une partie génératrice finie, bases et dimension ; rang d'une famille de vecteurs ; définition de la structure d'algèbre.

On les retrouve évidemment dans le titre III « Algèbre linéaire et multilinéaire », où le sous-titre 2 est consacré aux espaces vectoriels de dimension finie. On s'intéresse plus généralement à des espaces vectoriels fabriqués à partir d'espaces vectoriels :

– l'espace vectoriel $\mathscr{L}$(E,F) des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F ;

– l'algèbre $\mathscr{L}$(E) des endomorphismes d'un espace vectoriel E ;

– le dual E* d'un espace vectoriel E, (et les questions d'orthogonalité d'un vecteur et d'une forme linéaire, de transposée d'une application linéaire) ;

– l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}$(K) des matrices n,p à coefficients dans K ;

– l'espace vectoriel des formes bilinéaires, somme directe du sous-espace des formes bilinéaires symétriques et de celui des formes bilinéaires antisymétriques. Dimensions de ces trois espaces ;

– la droite vectorielle des formes n-linéaires antisymétriques sur un espace vectoriel de dimension n (comme introduction à la théorie des déterminants : à ce sujet, à côté du déterminant, relatif à une base, d'un n-uplet de vecteurs et du déterminant d'une matrice carrée, on introduit pour la première fois la notion de déterminant d'un endomorphisme) ;

Les *espaces vectoriels euclidiens* font l'objet du titre IV, où l'on étudie d'abord les espaces vectoriels normés : normes équivalentes, exemples classiques de normes sur un espace vectoriel réel de dimension finie. L'équivalence entre toutes les normes sur un tel espace est admise. Les espaces vectoriels euclidiens sont introduits comme en Terminale C, à ceci près que l'espace vectoriel est de dimension quelconque. De plus, la forme bilinéaire ϕ (forme polaire de Φ) et la forme quadratique Φ associée sont toutes les deux prises en compte. L'orthogonalité, les isométries et leurs propriétés, le groupe orthogonal sont étudiés dans ce cadre général. L'existence de bases orthonormées relatives à ϕ, les matrices orthogonales en tant que matrices de passage d'une base orthonormée à une autre et en tant que matrice d'une isométrie, le produit mixte d'un n-uplet lorsque l'espace euclidien est orienté sont étudiés dans le cas des espaces vectoriels euclidiens de dimension n. Dans le cas particulier de la dimension 3, figurent au programme le produit vectoriel ainsi que les applications antisymétriques.

La *géométrie affine* et la *géométrie (affine) euclidienne* font l'objet du titre V. On y retrouve des notions déjà abordées en Terminale C (le corps de base est **R**), les définitions n'étant plus limitées aux cas des dimensions 2 ou 3. En revanche, la plupart des questions étudiées font référence à ces deux dimensions. Ainsi, en *géométrie affine*, à laquelle sont consacrés les trois premiers sous-titres, on trouve la définition d'un espace affine, des variétés linéaires affines, du barycentre, des applications affines, des affinités et du groupe affine, auxquelles les instructions ajoutent un commentaire détaillé relatif à la définition et aux propriétés des ensembles convexes ; pour les espaces affines de dimension finie, celle des repères affines cartésiens, ainsi que la notion d'orientation. Quant aux questions étudiées, on distingue celles qui relèvent du plan affine (Équations cartésiennes et représentations paramétriques d'une droite) de celles concernant un espace affine de dimension 3 (Équations cartésiennes et représentations paramétriques d'un plan, équations cartésiennes et représentations paramétriques d'une droite, intersection de droites et de plans). La *géométrie affine euclidienne*, qui fait l'objet du quatrième sous-titre, est surtout consacrée au plan et à l'espace de dimension 3 ; après les définitions d'un espace affine euclidien et d'un repère orthonormé, on ne trouve que des questions relevant explicitement de la géométrie plane (Équations cartésiennes et représentations paramétriques d'un cercle ; définition des coordonnées polaires et représentations polaires d'une droite, d'un cercle passant par le pôle, d'une conique admettant le pôle pour foyer) ou bien explicitement de la géométrie de l'espace de dimension 3 (définition des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques), ou bien des deux (problèmes métriques dans le plan, ou dans l'espace de dimension 3 : distance d'un point à une droite, à un plan ; perpendiculaire commune à deux droites, mesures d'angles). Le dernier sous-titre est consacré aux torseurs, dont l'étude est faite dans un espace affine euclidien de dimension 3 : ils sont définis comme champs équiprojectifs ; ils constituent un espace vectoriel (de dimension 6), sur lequel on peut définir une forme quadratique dont la forme polaire est le comoment utilisé en physique. L'essentiel de leur étude a pour but de décomposer un torseur (si possible de manière unique) en somme de torseurs élémentaires (couple, glisseur).

En analyse, on voit apparaître (titre VI « Éléments de topologie ») les espaces normés comme exemple fondamental d'espace métrique ; l'équivalence des normes en dimension finie est une condition suffisante pour qu'elles définissent la même topologie. On retrouve l'étude des *fonctions vectorielles d'une variable réelle* (dimension finie) : limite, continuité, dérivation, intégrale sur un segment. Le calcul différentiel introduit pour la première fois la notion d'application différentiable pour les fonctions numériques d'une ou plusieurs variables réelles. Les conséquences en matière d'emploi de l'algèbre linéaire se feront surtout sentir en classe de Mathématiques Spéciales, dans lesquelles on traite des fonctions d'un ouvert d'un espace vectoriel normé (ou affine de dimension finie) dans un autre.

La cinématique se retrouve dans le titre XI « Géométrie différentielle et cinématique » où elle fait l'objet des trois derniers sous-titres :

Cinématique du point

Vecteur-vitesse et vecteur-accélération. décompositions suivant différents repères.

Cinématique du solide

Champ des vitesses, et mouvement uniforme tangent à un instant donné.

Vecteur–rotation.

Vitesses et accélérations dans un mouvement composé.

La nouveauté concerne l'introduction de l'étude en géométrie affine, puis en géométrie affine euclidienne des courbes paramétrées.

Enfin, dans le titre XII, on trouve une brève allusion à l'analyse vectorielle (gradient, rotationnel, divergence), « introduite exclusivement en vue de la physique ».

Programme des classes de Mathématiques Spéciales M et M' (arrêté du 4 février 1972)

Le contenu du titre III « Algèbre linéaire et multilinéaire » reprend les notions déjà vues en classe de Mathématiques Supérieures : la seule nouveauté concerne l'étude des endomorphismes d'un espace vectoriel sur **C** portant sur les valeurs propres et vecteurs propres, le polynôme caractéristique, la diagonalisation dans le cas où ce dernier n'a que des racines simples. Pour les classes de M', on trouve en plus l'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel de dimension finie et son bidual, ainsi qu'un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, et un autre théorème permettant de représenter, sous réserve de certaines conditions, un endomorphisme par une matrice formée de blocs diagonaux. Sont cependant en dehors du programme la forme réduite de Jordan, le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal, ainsi que les résolutions d'équations dans lesquelles l'inconnue est une matrice ou un endomorphisme.

Le titre IV voit apparaître les espaces hermitiens en même temps que les espaces vectoriels euclidiens, pour terminer par l'étude des valeurs propres d'une matrice hermitienne, et l'application au cas d'une matrice symétrique réelle. En M', on définit l'endomorphisme adjoint d'un endomorphisme, et on étudie les endomorphismes autoadjoints, notamment leurs valeurs propres ; on établit l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres. En ce qui concerne les espaces vectoriels euclidiens, on étudie dans les deux séries l'isomorphisme, défini par le produit scalaire, entre un espace vectoriel euclidien de dimension finie et son dual, que l'on utilise pour définir le produit vectoriel de $n - 1$ vecteurs (l'espace étant orienté), après avoir défini le produit mixte de n vecteurs.

Le titre V « Géométrie affine et géométrie affine euclidienne » reprend mot pour mot celui de la classe précédente en ce qui concerne les torseurs. Pour ce qui concerne la géométrie affine, on y étudie davantage les variétés linéaires, et en particulier les hyperplans. Pour les espaces affines de dimension finie n, on ne se limite plus aux cas $n = 2$ ou $n = 3$. En géométrie affine euclidienne, la seule nouveauté apparaît dans l'étude d'exemples de surfaces simples. On ne note aucune différence entre les programmes M et M' dans ce titre.

En analyse, on retrouve les espaces vectoriels normés dans le titre VI « Éléments de topologie ». En M', on caractérise les applications linéaires continues d'un espace vectoriel normé dans un autre, on munit leur espace d'une norme, on démontre que si ces espaces sont de dimensions finies, toutes les applications linéaires sont continues.

Dans le titre VII « Fonctions numériques ou vectorielles d'une variable réelle », on note une grosse différence entre les programmes M et M' : dans ce dernier, on pousse l'étude de la dérivation des fonctions vectorielles jusqu'à la formule de Taylor, pour laquelle les instructions donnent des indications pour une démonstration.

Le calcul différentiel (Titre VIII) concerne des fonctions d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$, pour la série M, et même des fonctions d'un ouvert d'un espace affine réel de dimension finie dans un espace affine réel de dimension finie en série M'. La définition d'une application différentiable, de la différentielle en tant qu'application linéaire font l'objet d'abondants commentaires dans les instructions, compte tenu de leur nouveauté.

Le titre XI « Géométrie différentielle et cinématique » distingue les propriétés affines des courbes (tangente, plan osculateur) de leurs propriétés métriques (trièdre de Frenet, courbure, torsion). L'étude des surfaces apparaît très brièvement dans le programme M (plan tangent), et d'une manière plus complète dans celui de M' (trièdre de Darboux-Ribaucour en un point d'une courbe tracée sur une surface ; asymptotiques et lignes de courbure, géodésiques). Les instructions donnent un commentaire très détaillé relatif à la présentation des notions d'arcs paramétrés et de courbes, de nappes paramétrées et de surfaces, comprenant toutes les définitions utiles et les principaux résultats, énoncés en utilisant les notions et notations vues en algèbre linéaire et calcul différentiel. Quant à la cinématique, le programme est le même dans les deux séries : le mouvement à accélération centrale complète l'étude de la cinématique du point vue adopté antérieurement ; le reste du programme est le même qu'en classe de mathématiques supérieures.

Enfin, le titre XII « Compléments de calcul différentiel et intégral » fait intervenir les éléments principaux de l'analyse vectorielle (gradient, rotationnel, divergence) ainsi que l'intégrale d'une forme différentielle de degré 2 ou 3, l'énoncé de la formule de Stokes, les notions de potentiel scalaire et de potentiel vecteur. Il est précisé que ces questions ne pourront faire l'objet d'aucune question écrite ou orale. Les instructions donnent une définition précise de chacun des termes « divergence », « gradient » et « rotationnel » utilisant les notions d'algèbre linéaire ; puis, à l'attention des professeurs, un exposé de quatre pages donne une présentation détaillée comportant les paragraphes suivants : formes p-linéaires alternées et produit extérieur, formes différentielles de degré p, intégrale d'une forme différentielle de degré 1 sur un chemin orienté, intégrale d'une forme différentielle de degré 2 et formule de Stokes .

La mise en place de ces programmes de 1971 a posé des problèmes comme en témoigne, pour le niveau du collège, la circulaire du 19 février 1973. Elle comporte dix pages, et contient un complément au commentaire des programmes de Quatrième et de Troisième, dans lequel apparaît un paragraphe intitulé « Introduction à la géométrie de Quatrième et de Troisième » dont nous citerons les extraits les plus significatifs :
« La présentation de la géométrie de Quatrième a donné lieu à des inquiétudes, voire à des erreurs, sur la nature des développements à prévoir, sur l'ordre à y instaurer, sur le temps à leur consacrer ; l'étude qui va suivre invitera à cette conclusion que le temps imparti à la géométrie est moindre que dans les anciens programmes et plutôt inférieur à celui de l'algèbre. [...]

Sur le plan théorique, *fonder* la géométrie euclidienne exige des axiomes ; faute de les expliciter tous, on ne pouvait éviter, à son insu, des pseudo-raisonnements ; c'était là un danger et l'évolution des sciences l'a montré, notamment celle de la physique, qui use de géométrie non euclidienne (relativité), de géométrie finie (cristallographie).

L'arrêté du 22 juillet 1971 propose une construction qui n'exige qu'un nombre restreint d'axiomes ; cette annexe et le commentaire qui l'éclaire ont eu pour dessein de mettre à la disposition *personnelle* des professeurs un schéma déductif complet, exempt de cercle vicieux.

Quant à la pratique de l'enseignement du premier cycle, le commentaire prévient les professeurs, à plusieurs reprises, qu'un exposé ainsi conduit n'intéresserait que rarement une classe entière : ici comme partout ailleurs et plus encore peut-être, enseigner c'est choisir, et parce que les manuels scolaires font aussi subsister un tel choix, ils appellent eux-mêmes un élagage qu'il convient d'opérer avec discernement.

Il est donc recommandé de ne pas donner les démonstrations de tous les théorèmes concourant à la construction de l'édifice ; ces théorèmes doivent être énoncés ; ou dire qu'on peut les déduire des énoncés antérieurs, mais qu'on ne le fera pas (certains élèves pourront souhaiter le faire, le professeur facilitera leur tâche au moyen d'exercices dont l'énoncé guiderait leur recherche).

Il est légitime d'admettre ainsi même des théorèmes importants, si leur démonstration apporte peu par elle-même, ce qui est parfois le cas ; un théorème important est un théorème qui est une pièce essentielle à la construction (ainsi la transitivité de l'équipollence des bipoints) ou, encore, qui a de nombreuses applications (ainsi le fait que les symétries centrales ou orthogonales sont des isométries). De tels théorèmes doivent être compris par les élèves ; cette compréhension s'acquiert parfois en les démontrant, parfois en les commentant, toujours en les appliquant ; il peut être plus important de savoir utiliser un théorème pour résoudre une classe de problèmes que d'en connaître une démonstration. [...]

Le commentaire initial a donné, à l'usage des professeurs, des définitions de la droite euclidienne et de la droite affine, mais la formalisation complète de ces définitions ne figure pas au programme de Quatrième, non plus que ces deux vocables. »

On voit apparaître dans ce commentaire l'idée de « classe de problèmes », les théorèmes jouant alors le rôle d'éléments de technique pour les résoudre et à un autre niveau (sans doute trop privilégié par les professeurs que le commentaire fustige) celui d'éléments de technologie de la technique en question. Ce qui semble manquer alors, dans ces premières réalisations de ces programmes, ce sont les problèmes, les questions auxquelles « la construction » du cours devrait permettre de trouver les réponses. En revanche, les instructions ont fourni avec une grande précision un matériau permettant d'élaborer technologie et même théorie : il n'est donc guère étonnant que cette forte pression technologico-théorique conjuguée avec une pression très faible en matière de types de problèmes et de techniques ait abouti à des « inquiétudes et même des erreurs ».

9 - Les programmes de 1977-1982.

Ils s'inscrivent dans la ligne du complément aux commentaires contenu dans la circulaire du 19 février 1973, mais définissent des objectifs qui s'éloignent de ceux qui ont présidé à l'élaboration des programmes précédents. La construction de modèles mathématiques de la réalité physique perd de son importance au profit de l'aspect « outil » des objets et organisations mathématiques. Ainsi, la circulaire du 29 avril 1997 qui fixe les objectifs des nouveaux programmes, dans un paragraphe intitulé « Choix de la matière à enseigner » précise :

« Si les deux objectifs fondamentaux que constituent l'acquisition d'un bagage technique utilisable et la participation à la formation intellectuelle générale – et notamment au développement de la pensée logique – peuvent en principe être visés indépendamment l'un de l'autre, leur poursuite conjointe répond cependant à un souci d'efficacité lié à des motifs psychologiques.

En effet, il faut éviter que l'élève de collège ne perçoive l'élaboration d'une théorie déductive comme une activité intellectuelle gratuite, et même sans signification, donc dépourvue d'intérêt à ses yeux. Une construction théorique destinée à l'exercer à une démarche logique doit par conséquent déboucher sur l'obtention d'un outil commode que l'élève aura couramment à utiliser (par exemple l'outil vectoriel). Elle peut aussi établir, par une chaîne d'implications, des liens entre divers concepts conformes à l'intuition sensible de l'élève, et directement exploitables par lui (par exemple les propriétés fondamentales du plan euclidien : distance, orthogonalité ...).

Les axiomes de départ devront, bien entendu, être simples et « naturels », et les raisonnements courts. Or, de nombreuses notions mathématiques d'apparence élémentaire se prêtent malaisément, au niveau des collèges, à une approche axiomatique qui ne soit pas factice, ou ne permettent guère des enchaînements déductifs simples. La plupart de ces notions ne s'avèrent pas indispensables à l'enseignement à ce niveau, et il serait injustifié et téméraire d'en faire un thème d'étude. D'autres n'ont qu'une utilité pratique limitée mais présentent un intérêt théorique éminent qui oblige à les mentionner : on pourra ne les introduire que de façon très succincte, et au moment opportun.

Mais certaines de ces notions, dont il est difficile de donner une définition qui soit à la fois simple et mathématiquement « correcte », appartiennent incontestablement au bagage instrumental et technique dont il convient de doter l'élève au cours de sa scolarité de collège. Il est évident que dans ce cas une appréhension « concrète » de la notion suffit à l'élève, et que c'est la maîtrise des mécanismes qu'il faut rechercher, non une abstraction qui serait prématurée à ce niveau et donc préjudiciable à l'élève. L'exemple de la notion d'angle et du calcul trigonométrique est, à cet égard, digne d'être noté. »

On notera, pour y revenir plus loin, que le calcul vectoriel est cité comme exemple d'outil, et que la plupart des rares exemples cités sont empruntés au domaine de la géométrie.

Les contenus de cette dernière en classe de Quatrième et Troisième sont ainsi décrits :

« La géométrie partira de l'expérience acquise avec le dessin géométrique. Des observations physiques, bien choisies, conduiront à dégager des faits expérimentaux qui seront présentés comme « propositions initiales », à partir desquelles seront déduites, par voie logique, des conséquences, illustrées par des figures soignées ; leur recherche développera l'imagination des élèves et leurs qualités de raisonnement. »

Dans son paragraphe consacré aux « méthodes et types d'activités », les auteurs reviennent sur l'action de l'élève, l'exploitation des connaissances par l'élève, la nécessité de les faire fonctionner pour qu'elles soient suffisamment solides.

« Les objectifs visés par l'enseignement des mathématiques dans les collèges ne seraient que très partiellement atteints si cet enseignement se bornait à faire acquérir un certain savoir. Un élève pourrait certes en tirer un profit intellectuel, en participant activement à la formation des concepts et à l'élaboration des raisonnements qui conduisent aux résultats mathématiques à connaître. Mais ces connaissances risquent d'être mal assurées si on ne les fait pas « fonctionner ». Un vernis cognitif s'écaille vite ; le savoir s'estompe, s'il n'est pas utilisé.

L'enseignement doit donc se donner aussi pour but de faire acquérir des techniques d'utilisation du savoir, de développer ainsi chez les élèves des savoir-faire, des capacités d'action. C'est par l'action, et par la satisfaction qu'elle leur procure, que beaucoup d'élèves prennent goût aux mathématiques, et parviennent de surcroît à une meilleure compréhension des concepts.

L'ambition d'un enseignement des mathématiques ne peut pas se mesurer à l'étendue du contenu des programmes, mais à l'usage qui en est fait. L'éducation mathématique n'a de sens que si l'élève est formé à exploiter, dans les circonstances et les péripéties quotidiennes de la vie, et en quelque sorte spontanément, les connaissances que cette éducation lui a apportées et les qualités qu'elle a développées en lui.

Il est donc essentiel que les élèves de collège soient exercés à résoudre des exercices et des problèmes nombreux et variés. C'est dans cette recherche qu'on éprouvera leur aptitude à mettre en ouvre les connaissances acquises, aptitude dont le développement est l'une des finalités d'un enseignement de culture. »

Nous verrons plus loin que cette même évolution se retrouve dans l'introduction au programme de Seconde.

Les programmes de Collège

Contrairement aux programmes précédents, les instructions occupent un faible volume : seulement six pages pour l'ensemble des classes du collège. Les vecteurs apparaissent en classe de Quatrième.

Le programme de la classe de Quatrième (arrêté du 16 novembre 1978)

Le programme comporte seulement deux titres : I - Calcul numérique et II - Géométrie plane, et sa rédaction est très concise, ce qui nous permet de citer entièrement le contenu du titre II.

« L'étude de la géométrie plane est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation, lesquelles requièrent l'usage des instruments de dessin : règle graduée, compas, équerre ; l'effort de réflexion qu'elles suggèrent conduit au raisonnement déductif.

Le programme est rédigé en termes d'acquisition, non de progression. Il revient au professeur de suivre une ligne cohérente, mais aucun choix d'hypothèses ne lui est imposé. Il a notamment toute latitude pour faire intervenir, dès que cela lui paraît opportun, les notions de distance, de cercle, de parallélisme, d'orthogonalité, qui ont été introduites jusque-là de façon intuitive.

Droites du plan ; demi-droites.

Abscisse d'un point d'une droite dans un repère de cette droite ; notation $\overline{MN}$; relation de Chasles.

Médiatrice : sa construction. Losange ; triangle isocèle.

Symétrie orthogonale par rapport à une droite. Rectangle.

Parallélisme, orthogonalité.

Projection sur une droite selon une direction ; conservation du milieu par projection.

Projection orthogonale ; distance d'un point à une droite.

Parallélogramme. Symétrie centrale.

Coordonnées d'un point du plan dans un repère quelconque.

Translation ; composition des translations. Vecteur ; addition des vecteurs. »

Programme de la classe de Troisième (arrêté du 16 novembre 1978)

Il est précisé en préliminaire que « les notions et propriétés que les élèves doivent connaître sont énumérées (...) ; leur groupement en alinéas ne vise qu'à la commodité de la présentation. En algèbre comme en géométrie, certaines propriétés, au choix du professeur, seront admises : elles permettront d'obtenir les autres par voie déductive. ».

Le titre « Géométrie » est organisé en trois paragraphes : notions et propriétés fondamentales, notions pratiques de trigonométrie, applications.

Dans le premier, on trouve la propriété de Thalès, la multiplication d'un vecteur par un réel, les coordonnées d'un vecteur dans un repère, les équations d'une droite dans un repère ; le rapport de projection orthogonale et la symétrie de ce rapport ; la propriété de Pythagore et sa réciproque ; l'orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé. Quant aux applications, elles concernent :

– l'expression analytique de la distance de deux points dans un repère orthonormé ;

– les symétries laissant globalement invariant : un cercle, la réunion de deux demi-droites de même origine, la réunion de deux droites ;

– des exercices (distances et angles) sur le triangle isocèle, le triangle équilatéral, le losange, le rectangle, le carré, les polygones réguliers ;

– des exercices de géométrie dans l'espace, par exemple : sphère (intersection avec un plan) ; cube (calcul de la diagonale) ; pyramide régulière (calcul d'éléments métriques).

Dans le programme d'algèbre, on trouve les applications linéaires et affines de **R** dans **R** et leurs représentations graphiques, les équations et inéquations du premier degré à deux inconnues, ainsi que les systèmes de telles équations ou inéquations.

Les instructions précisent que, si les programmes de 1971 semblaient subordonner l'étude de la droite à celle des réels, il n'en est plus de même avec le programme actuel, et que l'on pourra parler de distance dès le début de la classe de Quatrième. Concernant l'enseignement de la géométrie, est reproduite une longue citation de l'académie des Sciences :

« Toute la difficulté de l'enseignement de la géométrie dans les classes de Quatrième et de Troisième provient du fait qu'il faut partir de l'intuition acquise en Sixième et Cinquième par l'usage expérimental des instruments de dessin (règle graduée, équerre, compas, rapporteur) et, à partir de cette intuition, amener progressivement l'élève à raisonner et à manipuler consciemment les instruments pour lui faire acquérir peu à peu la notion de plan euclidien. (...) Il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie. En revanche, il devra apprendre à faire de courts raisonnements, à partir de faits géométriques considérés comme évidents et donc admis comme vrais. Dans cet apprentissage de la réflexion et de la méthode déductive, il importe que le maître observe strictement quelques règles. Tout d'abord, les faits que l'on admet à un instant donné et qui vont servir de base au raisonnement doivent être clairement énoncés et ne prêter à aucune confusion dans l'esprit de l'élève. Ensuite le raisonnement doit être rigoureux, il ne doit jamais faire appel à des hypothèses non exlicitement formulées et a fortiori doit se garder des cercles vicieux. Enfin il faut éviter qu'une propriété simple, qui est presque évidente aux yeux de l'enfant, soit déduite par le raisonnement d'une autre propriété moins évidente ou plus compliquée, car alors l'élève ne pourra pas comprendre quelle est la règle du jeu.

S'il convient d'éviter une présentation axiomatique, il est, en revanche indispensable que le maître possède, sur les matières enseignées dans ces deux classes, une vue d'ensemble cohérente (...). Faute d'une telle vue d'ensemble, le maître risquerait d'entraîner les élèves dans des développements inutilement compliqués et souvent stériles. ».

Les instructions se terminent par un rappel de ses orientations essentielles :
« Les nouveaux programmes, et tout spécialement leur partie géométrique mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie ... De ce point de vue, l'analyse de situations et la résolution de problèmes jouent un rôle majeur. En particulier l'enseignement de la géométrie est indissociable de la recherche de constructions géométriques. »

On constate que le changement d'objectifs par rapport aux précédents programmes est très important ; la citation de l'académie des Sciences – sous l'influence de laquelle se trouve encore les programmes actuels – vient à point pour justifier ce changement d'attitude concernant l'enseignement de la géométrie. La construction axiomatique est renvoyée du côté du professeur, comme moyen de contrôle de la légitimité du texte d'enseignement qu'il va produire. Il semble que la présence dans le programme d'un paragraphe relatif aux « applications », ainsi que l'évocation de « l'analyse de situations et la résolution de problèmes » dans les instructions plaident pour un changement dans le travail donné à l'élève, d'une part en ce qui concerne l'utilisation des « outils » théoriques (la rubrique « applications »), mais également pour introduire ces outils. On trouve dans ces textes une première promotion de ce qui deviendra dans les programmes suivants l'enseignement par « activités ».

Cette interprétation se trouve confirmée par l'introduction au programme de Seconde, que nous allons examiner au paragraphe suivant.

Les programmes de lycée

L'introduction au programme commence par une critique implicite des programmes précédents (ou du moins, de leurs réalisations) conjuguée avec un plaidoyer pour « l'activité personnelle de l'élève » ; elle précise une nouvelle manière d'organiser l'étude des mathématiques, liée à l'introduction d'une nouvelle rubrique dans les programmes : les thèmes.

« Les actuels programmes de mathématiques pour le premier cycle ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action. À la base de tout bon apprentissage il y a le contact avec une pratique sensorielle et concrète, la stimulation de l'activité personnelle de l'élève, l'élaboration de moyens d'investigation aussitôt applicables au monde qui l'entoure.
[...]

La classe de mathématiques est, dans son rôle essentiel, un lieu de découverte, d'exploitation de situations plus ou moins aisément maîtrisables, de réflexion sur des problèmes résolus. De ce fait, à chaque séquence du programme correspondent des thèmes d'activités, dont le choix demande à être adapté aux possibilités de la classe et éventuellement relié à son orientation ultérieure ; il ne saurait être question de traiter tous les thèmes mentionnés. Les questions obligatoires sont en nombre restreint et n'occupent que peu d'épaisseur de cours.

L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes. Il importe que toute introduction d'une notion ou d'un théorème soit précédée de l'étude d'une situation assez riche pour en attester l'intérêt et qu'elle soit suivie immédiatement d'applications substantielles : on ne peut imaginer de parler du produit scalaire sans s'en servir abondamment. Des notions comme la linéarité, la convexité ont besoin d'un support d'exemples et de contre-exemples.

Certains des exemples étudiés auront servi à faire sentir la nécessité d'une formulation générale, les autres auront pour but ensuite d'en montrer la puissance. Au moment voulu, une phase d'approfondissement théorique est indispensable.

Ces différentes phases jouent un rôle également important dans la formation mathématique des élèves et doivent donc faire l'objet d'un même soin. ».

Le programme de la classe de Seconde (arrêté du 26 janvier 1981)

Les vecteurs interviennent dans deux titres du programme : le titre IV, géométrie plane, et le titre V, produit scalaire dans le plan.

Les contenus relatifs au titre IV, peu nombreux comme il l'a été précisé dans l'introduction, sont les suivants :
Homothétie ; formules analytiques de la translation, de l'homothétie.
Barycentre de deux points pondérés, d'un système de points (jusqu'à quatre).
Représentations paramétriques et équations d'une droite relativement à un repère du plan ; pratique du passage des unes aux autres.

Les thèmes, donnés à titre indicatifs, sont au nombre de cinq :
1 - Problèmes de constructions.
2 - Exemples de transformations $x' = ax + b$, $y' = ay + c$; interprétation géométrique.

3 - Recherche de symétries et d'homothéties transformant une configuration simple en une autre.

4 - Problèmes d'alignement et de concours.

5 - Convexité ; intersections de parties convexes et notamment de demi-plans ; application à la caractérisation graphique d'ensembles de solutions de systèmes d'inéquations (intérieur d'un polygone, etc.).

En introduction du titre IV figure un préambule, écrit en italique, qui insiste sur le fait que, dans la consolidation et la mise en œuvre des connaissances du premier cycle, il ne faut négliger aucun des « trois aspects de l'étude géométrique » :

Fréquentation directe des figures ;

Familiarité avec le calcul dans un repère ;

Écriture vectorielle ;

l'attention du professeur est attirée sur la sensibilisation à l'importance du choix de méthode dans une résolution de problèmes, ainsi que d'un bon choix de repère.

Une remarque relative à un aspect du théorème de Thalès (dans une projection parallèle d'un axe sur un autre, l'abscisse se transforme par une application affine) termine ce préliminaire (elle sera très peu prise en compte dans les manuels).

Le changement du rôle des figures, par rapport aux anciens programmes, est très important (notamment dans les problèmes de construction). Seuls les aspects analytiques sont présents dans les deux programmes, et il est prévisible que dans les réalisations du programme, cet aspect sera particulièrement bien traité. Quant à « l'écriture vectorielle », on notera que l'introduction du barycentre permet un traitement bien installé dans la culture de l'institution du thème « problèmes d'alignement et de concours ».

Le titre V concerne essentiellement l'introduction du produit scalaire, et l'exploitation de ses propriétés pour la caractérisation des triangles rectangles, la caractérisation analytique du cercle et du disque. Plus précisément, les contenus et la liste des thèmes sont les suivants :

« L'introduction du produit scalaire par les formes bilinéaires symétriques ne figure pas au programme.

Formule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}\ \overline{AH}$ où H est la projection orthogonale de C sur un axe normé portant A et B.

Égalités $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda\, \vec{u} \cdot \vec{v}$.

Cosinus de l'angle de deux demi-droites. Formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\alpha$.

Théorème de Pythagore et sa réciproque.

Expression du produit scalaire de deux vecteurs et de la distance de deux points dans un repère orthonormal.

Caractérisation analytique du disque et du cercle.

Lignes de niveau, O et $\vec{k}$ étant donnés, de l'application $M \mapsto \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$.

Thèmes :

1 – Équation normale d'une droite. Distance d'un point à une droite définie par une équation.

2 – Relations métriques dans le triangle quelconque (en liaison avec le titre VI : angles et rotations).

3 – Lignes de niveau d'applications $M \to \alpha MA^2 + \beta MB^2$.

4 – Puissance d'un point par rapport à un cercle : ligne de niveau, régionnement.

5 – Parabole ; ligne de niveau de $M \to MO - MK$ (K projection orthogonale de M sur une droite donnée). ».

Les commentaires relatifs à ces deux titres sont peu nombreux. Pour le titre IV, ils insistent sur le fait que « l'apparence plus structurée de la partie du programme relative à la géométrie ne doit pas amener les professeurs à subordonner les activités des élèves à des exposés de cours. Il convient de mettre les connaissances du premier cycle à l'épreuve de la résolution de problèmes variés, et de les consolider à ce propos, sans procéder à un inventaire systématique. ». Pour le titre V, ils précisent le niveau d'approfondissement à donner aux lignes de niveau et les types d'exercices à traiter à ce sujet.

On aura remarqué que, comme au collège, le plan dans lequel on fait de la géométrie est d'emblée « affine euclidien », sans qu'on le dise de cette manière. Mais le titre IV traite de notions affines, le titre V de notions métriques, ce qui assure une transition assez douce avec les anciens programmes.

Programme de la classe de Première scientifique S ou E (arrêté du 9 mars 1982)

L'organisation du programme est la même que pour celui de la classe de Seconde. Les vecteurs interviennent dans le titre V (Géométrie plane) et dans le titre VI (Géométrie dans l'espace), que nous reproduisons dans l'annexe 1, page 479, en respectant leur mise en forme.

Les commentaires relatifs au titre V rappelle que l'objectif essentiel est, comme en classe de Seconde, l'étude des configurations classiques du plan et des effets des transformations sur ces figures ; que le calcul vectoriel est un outil puissant, et en particulier le théorème de la médiane, qui peut intervenir dans le plan comme dans l'espace. Pour la géométrie dans l'espace, ils évoquent la nouveauté qu'est précisément le calcul vectoriel, donne des précisions sur la définition du produit scalaire à l'aide de $\overline{OA}\ \overline{OH}$, qui permet une concordance avec la définition posée dans le plan et facilite ainsi la démonstration de certaines propriétés. Pour l'orientation de l'espace, elle est admise ; le produit vectoriel est introduit sous une forme directement utilisable en physique. Enfin, il est précisé que, « bien que le programme contienne de nombreux outils permettant des activités touchant à la géométrie analytique, il n'est pas dans les objectifs de la classe d'étudier systématiquement l'emploi de telles méthodes : l'essentiel est de développer la vision de l'espace. ».

Le volume du programme de géométrie dans l'espace est très important : il fera l'objet d'une réduction drastique lors de la révision suivante du programme.

Les programmes de Terminale C (arrêté du 9 mars 1982)

Les vecteurs interviennent dans trois titres du programme : le titre V « Fonctions vectorielles et cinématique », le titre VII « Algèbre linéaire », et le titre VIII « Géométrie ».

– Les fonctions vectorielles d'une variable réelle prennent leurs valeurs dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ ou encore **C**. Les définitions et les démonstrations sont données à l'aide des coordonnées. Le programme porte sur la seule dérivation, qui est poussée jusqu'à la dérivée d'un produit scalaire ou vectoriel, et de la norme d'une fonction vectorielle. Des exemples simples de construction de courbes planes définies par une représentation paramétrique figurent au programme ; quant à la cinématique du point, elle traite des notions de trajectoire, vecteur vitesse, vecteur accélération, mouvement accéléré, retardé. Les exemples à étudier sont les mouvements rectilignes, circulaires uniformes, et l'oscillateur harmonique.

– Le programme d'algèbre linéaire commence par l'étude de $\mathbf{R}^n$ (notion de combinaison linéaire, de sous-espace vectoriel engendré) et des applications linéaires de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^n$, à l'aide de leurs matrices dans les bases canoniques. Puis, il traite des sytèmes linéaires de n équations à p inconnues en liaison avec la recherche de décompositions de vecteurs, d'antécédents de vecteurs par une application linéaire. Ceci permet de définir dans $\mathbf{R}^n$ les notions de familles génératrices, familles libres et de bases. Les opérations élémentaires sur les lignes et la méthode du pivot de Gauss sont introduites pour déterminer si une famille possède ou non ces propriétés ; elle permet par ailleurs d'établir que toute base de $\mathbf{R}^n$ a n éléments, que toute famille libre en a au plus n, et que c'est une base si et seulement si elle en a n ; qu'une famille génératrice a au moins n éléments et que c'est une base si et seulement si elle en a n ; enfin, le théorème de la base incomplète. Enfin la notion d'espace vectoriel de dimension finie est introduite ; on démontre qu'un endomorphisme injectif (resp. surjectif) d'un tel espace est bijectif ;

on termine avec la notion de sous-espaces supplémentaires, qui permet d'introduire les projections et symétries.

Ce titre entièrement nouveau fera, dès la première année de mise en œuvre du programme, l'objet d'une exclusion presque totale du programme du baccalauréat [9]...

– Le programme de géométrie précise d'emblée que l'on continue de travailler dans le plan et l'espace considérés en Seconde et en Première, que l'on dispose des espaces vectoriels associés, et qu'il n'est donc pas nécessaire de modéliser un espace affine en général.

Il comporte le calcul barycentrique (fonctions vectorielle et scalaire de Leibniz) ; la définition des applications affines de l'ensemble des vecteurs dans lui-même, puis d'une application affine ponctuelle ; la caractérisation des applications affines par la conservation du barycentre et ses conséquences relatives à l'image d'une droite, d'un plan, d'une partie convexe ; la conservation du parallélisme ; la démonstration du fait qu'une isométrie est une application affine, conservant le produit scalaire. Les applications affines à connaître sont les suivantes : translations, homothéties, symétries – orthogonales ou non , affinités.

En géométrie plane, s'ajoute l'étude des mesures d'angles de droites et la condition pour que quatre points soient cocycliques, l'étude des coniques (définition bifocale et par foyer et directrice, équations cartésiennes réduites, tangente en un point) ; l'étude des isométries (déplacements et antidéplacements) et des similitudes directes ; l'étude de leur définition à l'aide des nombres complexes est étendue à d'autres exemples : $z \mapsto 1/z$; $z \mapsto 1/2\ (z + 1/z)$, ..., mais rien n'est exigible au sujet de ces transformations, et en particulier sur l'inversion.

En géométrie dans l'espace, on n'étudie que des exemples d'isométries fixant un point. Le point essentiel est l'étude des rotations, la composition de deux symétries orthogonales par rapport à des plans ; à titre d'exemples, on étudie la composée de deux rotations d'axes coplanaires, et les vissages.

Dans les commentaires relatifs au titre « Géométrie », on attire l'attention du professeur sur plusieurs points :
– le bon usage du calcul analytique doit être développé (l'ayant été insuffisamment en Première) : les points délicats qui sont repérés sont les suivants : choix d'axes bien adaptés aux données, choix du mode de représentation (équation cartésienne, représentation paramétrique) ;

---

[9] L'allègement de programme concernant les épreuves du baccalauréat porte en effet sur « le titre VII, algèbre linéaire, sauf sur les deux points suivants : le paragraphe d) (systèmes linéaires) et, dans le cadre des espaces vectoriels intervenant en géométrie, les applications linéaires, les sous-esapces vectoriels, les sous-espaces supplémentaires, les projections et les symétries. ».

– le recours aux nombres complexes peut être efficace dans les problèmes métriques et angulaires ; les applications $z \mapsto f(z)$ sont utiles pour exhiber des situations où l'alignement n'est pas conservé ;

– pour les transformations, des types de questions sont cités :

  – effet d'une transformation sur une configuration simple et sur les grandeurs qui y sont attachées (distances, angles, aires, volume, ...) ;

  – recherche de transformations faisant passer d'une configuration à une autre ;

  – effet d'une transformation sur des fonctions numériques ou vectorielles (telles que $M \mapsto \overrightarrow{MA} . \overrightarrow{MB}$, $M(x,y) \mapsto ax^2 + by^2$, $M \mapsto \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$) ;

  – exemples de groupes de transformations laissant invariante une configuration donnée (parallélogramme, carré, angle, réseau, ...) ou une grandeur qui lui est attachée.

– pour la géométrie dans l'espace, le but est de compléter la vision de l'espace déjà recherchée en Première : il est donc conseillé de traiter des exercices variés, peu chargés en calcul, et s'inspirant plutôt des quelques résultats simples sur les transformations et leur composition.

On aura noté que ces programmes constituent un changement important par rapport à ceux qui les ont précédé, sans que les notions fondamentales mises à l'étude aient vraiment changées : la différence provient du fait que les structures fondamentales ne sont plus un objet de préoccupation première, et sont remplacées par des types de questions dont l'étude va solliciter des outils fondamentaux (que l'on peut attacher à ces structures) et des techniques sur lesquels l'accent est mis.

Les problèmes consécutifs à la mise en œuvre de ces programmes de Lycée vont être à l'origine de nombreuses régulations, la première étant celle déjà signalée consistant à exclure du programme du baccalauréat une bonne partie de la « nouvelle » algèbre linéaire dans $\mathbf{R}^n$, ainsi que quelques autres questions plus mineures. Des notes de service, en particulier celle du 10 octobre 1984 et celle publiée au B.O. du 12 septembre 1985 concernant le programme de Seconde, relayées par la réécriture du programme de Première en 1985, et de celui de Terminale en 1986, soit seulement quatre ans après leur première mise en œuvre vont apporter des modifications que nous allons étudier dans le paragraphe suivant : compte tenu du rythme rapide d'évolution des textes, nous n'étudierons les programmes de classes préparatoires que dans leur version de 1987, car elle intègre les modifications des programmes de lycée auxquelles nous venons de faire allusion.

10 - Les modifications de programmes des années 1985-1988

Ces années voient apparaître les modifications assez légères des programmes de lycée dont nous venons de parler, alors qu'un changement très important des programmes de Collège se prépare et sera mis en place, à raison d'un niveau par an à partir de l'année scolaire 1986-1987. Dans ce paragraphe, nous ne traitons que des programmes de lycée et des programmes de classes préparatoires. Les programmes de Collège de 1985 seront étudiés dans le paragraphe 10, en même temps que les réécritures des programmes de lycée qu'il ont entraînées.

Les modifications du programme de Seconde (B.O. n° 31 du 12 septembre 1985, essentiellement)

<u>Le titre IV, « géométrie plane »</u>

– Le préambule est complètement changé.
D'abord, on y évoque la consolidation, et la mise en œuvre des connaissances du collège, éventuellement complétées ; une liste assez détaillée en est dressée, pour signaler la nécessité de mises au point, sans pour autant tout reprendre à leur sujet.

L'objectif essentiel est identifié ainsi : les élèves doivent savoir résoudre des problèmes concernant des configurations en utilisant de manière pertinente quelques outils efficaces :
– *les transformations* (translations, symétries, homothétie) ;
– l*e calcul vectoriel et les propriétés de quelques configurations fondamentales* (configuration de Thalès, triangle rectangle, parallélogramme, losange, rectangle inscrit dans un cercle, concours des médianes, des hauteurs et des médiatrices d'un triangle).
Plus loin, les interventions du calcul vectoriel sont décrites avec une plus grande précision : « le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain purement algébrique ; la maîtrise de ses relations avec les configurations joue un rôle essentiel pour la résolution des problèmes de géométrie ».
En particulier, les élèves doivent
connaître :

- les relations entre points et vecteurs, une origine étant fixée ;
- les relations entre les parallélogrammes, l'égalité et l'addition des vecteurs ;
- les relations entre le théorème de Thalès, l'homothétie et la multiplication par un scalaire ;
- le lien entre distance de deux points et norme d'un vecteur ;

savoir caractériser vectoriellement :

- le parallélisme de deux droites ;

• l'alignement de trois points ;

• le milieu d'un segment

– *l'emploi d'un repère adapté à une situation géométrique* : à son sujet, il est précisé, sans doute pour tempérer des utilisations trop exclusives, qu'il ne doit être qu'un outil parmi les autres, qu'il ne doit « ni constituer l'environnement habituel des problèmes de géométrie, ni être banni systématiquement. ».

Dans la liste des points de contenus, est ajouté «le cercle, ses tangentes et ses symétries; le disque, sa convexité ; l'équation d'un cercle dans un repère orthonormé[10]. ».

Les autres points de contenus demeurent, mais la rédaction est légèrement modifiée pour certains : pour l'homothétie, on n'évoque plus sa définition analytique, mais on cite son lien avec la multiplication par un réel, les élèves devant connaître l'effet sur les distances et les aires, l'image d'une droite et d'un cercle ; pour le barycentre, on précise que l'étude systématique de l'associativité n'est pas au programme.

Dans la liste des thèmes, celui concernant la convexité disparaît.

Ces modifications permettent de lire en creux les dysfonctionnements dans la mise en œuvre des programmes précédents : usage trop exclusif des repères (influence des programmes des années 1971) ; calcul vectoriel vu surtout comme un terrain algébrique, formel, mal relié à la géométrie (effets de la séparation, dans les programmes des années 70, entre le vectoriel et l'affine, qui a permis une autonomie du vectoriel qu'il est difficile d'abandonner : certains auteurs de manuels continuent à organiser leur cours autour de la définition d'un espace affine de H. Weyl). De plus, l'introduction du cercle et du disque comme point de contenu dans le titre « Géométrie » brise la séparation affine/euclidien, alors que la rédaction des programmes précédents pouvait donner l'impression que cette séparation était encore légitime.

<u>Le titre V « Géométrie dans l'espace »</u>

La place de la géométrie dans l'espace se voit renforcée : même si le contenu reste le même, son articulation avec la géométrie plane (par le biais de réalisations d'objets de l'espace physique ou de leurs représentations par des figures planes), avec l'algèbre et l'analyse sont valorisées ; on conseille son utilisation durant toute l'année, ce qui rompt avec les usages dominants.

---

[10]La formule donnant la distance de deux points donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé figure au programme de Troisième ; elle sera revue dans le titre VI « Produit scalaire », mais sa disponibilité dès le début de l'année de Seconde permet de traiter l'étude du cercle d'un point de vue analytique sans faire recours au produit scalaire.

Le titre VI « Produit scalaire »

Là encore, le préambule est complètement modifié : l'introduction du produit scalaire à l'aide des formes bilinéaires symétriques est, cette fois-ci exclue. L'objectif est précisé : les élèves doivent

savoir utiliser le produit scalaire :

- pour le calcul de normes de vecteurs, de distances et d'angles ;
- pour la caractérisation de l'orthogonalité ;

prendre conscience

- du rôle de la linéarité des projections orthogonales ;
- de l'efficacité de ce nouvel outil de calcul.

Une allusion est faite à l'utilisation du produit scalaire en mécanique, en tant qu'activité interdisciplinaire.

Du point de vue des contenus, ils changent peu : la caractérisation analytique du cercle a été transférée dans le titre « Géométrie » ; les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$ disparaissent au profit de la caractérisation d'une droite par $\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$; le théorème de Pythagore et sa réciproque ne figurent plus au rang des contenus, mais font l'objet d'une remarque relative au calcul du carré de la norme d'une somme de vecteurs dans le cas où ils sont orthogonaux.

Quant à la liste des thèmes, seuls subsistent la puissance d'un point par rapport à un cercle et les propriétés géométriques simples de la parabole, en relation avec l'étude de la fonction « carré » ; les lignes de niveau à étudier font l'objet de remarques, sans constituer un thème à proprement parler : elles concernent $MA^2 + MB^2$, $MA^2 - MB^2$, $\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$, mais le cas général $\alpha MA^2 + \beta MB^2$ ne figure plus (sa présence en tant que thème était un encouragement, pour certains professeurs, à déployer le cours relatif à « la fonction scalaire de Leibniz », ce qui apparaît à juste titre trop prématuré) ; enfin, l'étude de quelques relations métriques dans le triangle sont évoquées, sans qu'elle fasse l'objet d'un thème.

Cette nouvelle rédaction des programmes veut contribuer à éliminer de manière définitive l'influence que les programmes des années 70 exerçaient encore sur le plan de la légitimité des contenus, et sur celui des techniques utilisées (privélégiant les méthodes analytiques, et l'autonomie algébrique dans la démonstration des règles du calcul vectoriel). D'autre part, elle tire la leçon de l'expérience acquise pendant les trois années de fonctionnement des programmes de 81-82 : certains thèmes d'études, peu présents dans la culture des professeurs (convexité) sont supprimés ; d'autres, trop présents en revanche (fonctions scalaires de Leibniz et leurs lignes de niveau), voient leur portée affaiblie par le nouvel affichage.

Le programme de Première S et E (arrêté du 21 juin 1985, B.O. du 18 juillet 1985)

Il s'agit d'une véritable réécriture du programme, qui inaugure la présentation « en deux colonnes » qui est encore utilisée dans les programmes actuellement en vigueur : à gauche, le programme fixe les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; à droite, un commentaire précise le sens ou les limites à donner à certaines questions du programme ; enfin, les objectifs sont placés « en bandeau ». D'autre part, l'idée de thème, introduite dans les programmes antérieurs, est abandonnée car « son interprétation a donné lieu à de nombreuses ambiguïtés » ; elle est remplacée par une rubrique de travaux pratiques qui précise « *le champ des problèmes que les élèves ont à étudier* ». Il est précisé dans l'introduction au programme que « *les activités correspondantes doivent occuper une part très importante du temps de travail*, aussi bien en classe qu'à la maison. Ces travaux pratiques sont de *deux sortes* ; les uns mettent en œuvre des *techniques classiques et bien délimitées*, dont la maîtrise est exigible des élèves. Les autres, qui portent la mention « *exemples de* » (ce sont les plus nombreux), visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée ; *aucune connaissance spécifique ne peut être exigée à leur propos*, mais les élèves devront au terme de l'année avoir acquis une certaine familiarité avec le type de problème considéré. ».

C'est justement dans une rubrique de travaux pratiques qu'apparaissent des « exemples de résolution de systèmes linéaires à coefficients numériques » ; les commentaires indiquent à leur sujet qu'il convient de se limiter à des systèmes de taille modeste, et que la méthode du pivot de Gauss est à présenter sur des exemples, mais que sa description générale n'est pas au programme.

Quant au programme de géométrie, unique lieu d'intervention véritable des vecteurs, la rédaction en est complètement réorganisée : la séparation entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace disparaît, au profit du couple « outil vectoriel et configurations/ transformations et configurations ». Il est organisé autour de quatre objectifs :

– l'approfondissement de la géométrie plane à travers l'étude des configurations et de l'action des transformations sur celles-ci ;
– la pratique de l'outil vectoriel ;
– la description et l'étude de configurations simples de l'espace ;
– la mise en œuvre de figures à tous les stades de la recherche et de la rédaction.

Il est explicitement précisé que « tout point de vue axiomatique est exclu pour l'ensemble de la géométrie » : il s'agit de « développer une certaine maîtrise du plan et de l'espace physiques ».

Le titre « Outil vectoriel et configurations »

• En bandeau, l'objectif est précisé ; il consiste à fournir aux élèves trois outils pour l'étude de la géométrie du plan et de l'espace :

– l'étude directe des configurations ;

– le calcul vectoriel ;

– l'emploi d'un repère adéquat.

Le calcul vectoriel ne doit pas être considéré comme une fin en soi, le passage aux coordonnées doit tenir une place modeste ; les activités doivent être centrées sur l'étude des configurations.

• Le programme proprement dit comporte quatre parties : « points et vecteurs, repères du plan », « points et vecteurs, repères de l'espace », « orthogonalité, produit scalaire », « angles orientés dans le plan , rotations ».

La première a pour but de consolider les acquis de Seconde ; elle concerne les bases et repères, les vecteurs colinéaires et vecteurs directeurs d'une droite, l'alignement de trois points et le parallélisme de deux droites. Le commentaire demande d'observer que « le choix d'une origine permet d'établir une bijection entre le plan et l'ensemble des vecteurs et de représenter graphiquement les vecteurs du plan », mais aucune indication n'est donnée au sujet des utilisations possibles de cette représentation.

La rubrique « points et vecteurs, repères de l'espace » est consacrée à l'extension du calcul vectoriel à l'espace (qui est admise), et on y retrouve les mêmes notions que dans la rubrique précédente, auxquelles s'ajoutent celles de vecteurs directeurs d'un plan, de vecteurs coplanaires, de parallélisme de deux plans, d'un plan et d'une droite. Le commentaire précise qu'aucune construction théorique du calcul vectoriel dans l'espace n'est au programme, et que toute reconstruction des propriétés d'incidence à partir du calcul vectoriel (allusion aux programmes des années 70) est exclue. Il s'agit, à travers l'ensemble des activités, de compléter les énoncés vus en Seconde sur les propriétés d'incidence et de parallélisme et de marquer leur lien avec le calcul vectoriel. L'étude des translations et homothéties de l'espace n'est pas au programme.

Le titre de la rubrique suivante, « orthogonalité, produit scalaire », témoigne de l'abandon d'une partie importante des précédents programmes : l'étude du produit vectoriel et du produit mixte disparaît complètement. Il s'agit d'étendre le produit scalaire à l'espace, ses propriétés étant admises, puis de traiter vectoriellement de l'orthogonalité des droites et des plans, de la projection orthogonale sur un plan, et de celle d'un angle droit. Les bases et repères orthonormaux, et l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs et de la distance de deux points terminent cette rubrique. Le commentaire précise que les élèves doivent connaître les propriétés élémentaires de la projection orthogonale (y compris la conservation du barycentre) sur un plan, mais que les démonstrations n'en sont pas exigibles.

La dernière rubrique comprend l'orientation du plan, les mesures d'un angle orienté de couples de vecteurs, le cosinus et le sinus d'un tel angle ; les rotations dans le plan orienté, et les formules d'addition et de duplication des fonctions sinus et cosinus.

• La rubrique de « Travaux pratiques » comprend, pour ce qui est « des techniques classiques et bien délimitées, qui sont exigibles des élèves » les trois questions suivantes :

– Sphère ; sections planes, plan tangent.

– Lignes ou surfaces de niveau de $M \mapsto \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM}$.

– Transformation des expressions $MA^2 + MB^2$, $MA^2 - MB^2$, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$, lignes de niveau des applications associées. Le commentaire précise qu'en ce qui concerne ces expressions, le rôle du milieu de [AB] est à relier aux propriétés du parallélogramme, en particulier pour l'interprétation géométrique des expressions $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2$ et $\| \vec{u} - \vec{v} \|^2$, la condition $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ étant à relier aux propriétés du rectangle et à la mise en équation du cercle de diamètre [AB].

La rubrique « Exemples de » comprend elle aussi trois questions :

– exemples de problèmes d'alignement et de concours dans les tétraèdres et les parallélépipèdes. (On notera qu'aucune allusion n'est faite au barycentre, mais il convient de rappeler qu'il a déjà été étudié en Seconde pour ce qui concerne la géométrie plane, et que son extension à l'espace est peu coûteuse).

– Exemples simples de recherche de sections planes (sections de prismes et de pyramides par des plans parallèles au plan de base ; méridiennes et parallèles de surfaces de révolution). Les commentaires précisent que les élèves doivent être entraînés à l'emploi systématique de représentations graphiques : croquis avec ponctuation, projection orthogonale sur un plan bien choisi, dessin en vraie grandeur d'une section plane, ... Mais aucune connaissance n'est exigible sur la géométrie projective et la perspective cavalière.

– Exemples de calculs de distances et d'angles dans des configurations usuelles (triangles, polygones réguliers, tétraèdre régulier, cube, ...) et calcul d'aires de polygones. Les commentaires limitent les types de polygones réguliers à considérer (triangle, carré, hexagone, octogone) et fixent les connaissances exigibles en ce qui concerne les triangles : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$; $S = 1/2\ bc \sin A$; $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; $A + B + C = \pi$, et font remarquer que ces relations permettent de caractériser simplement les triangles isométriques et semblables.

Le titre « Transformations et configurations du plan »

• L'objectif est de mettre en œuvre les transformations mentionnées sur les configurations usuelles, et non pas de développer pour elle-même l'étude des transformations.

• Le programme comporte deux rubriques : « actions sur les configurations élémentaires » et « isométries fixant un point O ».

Dans la première, figure l'effet d'une translation, d'une réflexion, d'une homothétie, d'une rotation sur :

– le parallélisme,

– l'équipollence,

– les barycentres,

– les distances,

– les angles,

– les aires.

Le commentaire précise que les élèves doivent connaître les résultats et être capables de les mettre en œuvre, mais les démonstrations ne sont pas exigibles, « et il serait fastidieux de les faire de manière exhaustive. »

L'étude des isométries fixant un point comporte les composées de rotations de même centre O, de deux réflexions fixant O, et la décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions, pour déboucher sur un inventaire des isométries fixant O.

Les commentaires précisent que le langage des groupes, ainsi que la notion d'application affine et d'application linéaire associée sont hors programme ; il en est de même de l'écriture générale des réflexions et rotations dans un repère orthonormé.

• Les travaux pratiques du type « Exemples de » sont les plus nombreux :

– exemples de recherche de translations, d'homothéties, de réflexions et de rotations transformant une configuration en une autre (segments, cercles ...) ; exemples d'applications à l'étude de problèmes d'alignement, d'orthogonalité. Le commentaire met l'accent sur le fait que les élèves doivent savoir que ces transformations transforment les droites en droites, les cercles en cercles, et conservent le contact.

– exemples de recherche de réflexions et de rotations laissant stable une configuration (telle que parallélogramme, losange, carré, triangle équilatéral, ...)

– exemples de recherche de lieux géométriques dans le plan (conditions de distances et d'angles, points liés à une configuration mobile). À ce sujet, le commentaire exclut le recours systématique aux méthodes analytiques.

Deux travaux pratiques traitent de questions classiques :

– Théorème de l'angle inscrit ; lignes de niveau de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

– Réflexions échangeant deux droites ; bissectrices.

Par rapport aux programmes antérieurs, on constate une diminution du nombre de notions au programme (disparition des groupes de transformations, du produit vectoriel et du produit mixte), et un resserrement sur l'étude des configurations au service de laquelle sont mis le calcul vectoriel et les transformations.

Le programme de Terminale C (arrêté du 9 juillet 1986)

Il est présenté de la même manière que le programme de Première S et E, que nous venons d'étudier. Par rapport au programme de 1983, on constate la disparition du titre « Fonctions vectorielles et cinématique », qui est remplacé par une rubrique intitulée « Courbes planes » dans le titre « Géométrie », ainsi que la disparition du titre « Algèbre linéaire », qui est remplacé par le titre « Systèmes d'équations linéaires »[11] ; pour le titre « Géométrie », les rubriques présentes dans le programme de Première subsistent.

Le titre « Géométrie »
Le sous-titre « Outil vectoriel et configurations (plan et espace) »

• L'objectif est de compléter les outils vus en Première ; la notion générale d'espace vectoriel n'est pas au programme.

• Le programme comporte les notions suivantes :

– Barycentres ; transformation d'une somme $\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ dans le cas où la somme des α_i est non nulle et dans le cas où elle est nulle. Le commentaire ajoute que les élèves doivent connaître l'associativité de la barycentration.

– Caractérisation vectorielle d'un segment ($\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$, $0 \leq t \leq 1$), d'une demi-droite, d'une droite, d'un plan ; traduction dans un repère.

Caractérisation d'un plan par $\vec{k}\,.\overrightarrow{AM} = 0$; équation du plan dans un repère orthonormal (et détermination d'un vecteur normal à un plan donné par une équation).

– Projection ponctuelle, projection vectorielle associée ; linéarité d'une projection vectorielle, conservation des barycentres par une projection ponctuelle.

– Dans l'espace orienté, bases et repères directs, indirects (aucune théorie de l'orientation ne figure au programme, on s'appuie sur les conventions physiques usuelles).

Produit vectoriel, notations $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$; expression analytique dans une base orthonormale directe. Les élèves doivent savoir l'utiliser pour calculer l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, pour déterminer un vecteur normal à un plan et

[11]Ce qui revient à entériner les allègements de programme pour le baccalauréat.

déterminer une équation d'un plan déterminé par un point et deux vecteurs directeurs, ou par trois points.

– Dans le plan orienté, déterminant de deux vecteurs, notation $\det(\vec{u}, \vec{v})$; expression dans une base orthonormale directe. Les élèves doivent connaître les formules :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos\theta$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \sin\theta$, et savoir traduire la colinéarité de deux vecteurs à l'aide de la nullité du déterminant.

• Les travaux pratiques comprennent les questions classiques suivantes :

– Transformations de $\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i MA_i^2$, applications ; cas de deux points : lignes ou surfaces de niveau $M \to \dfrac{MA}{MB}$;

– Ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ modulo π ou modulo 2π ;

– Expression analytique d'une translation, d'une rotation (mais la reconnaissance d'une rotation plane à partir de sa définition analytique ne figure pas au programme) ;

– Changement (de base ou) de repère orthonormal direct dans le plan ;

ainsi que les questions du type « Exemples de » suivantes :

– Exemples d'emploi des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane. Les élèves doivent savoir déterminer l'affixe d'un barycentre, évaluer un angle à l'aide de l'argument d'un quotient et traduire l'orthogonalité ou la colinéarité de vecteurs ;

– Exemples de calculs de distances et d'angles dans des configurations usuelles du plan et de l'espace ;

–Exemples d'emploi d'un repère orthonormal dans l'espace (en particulier pour calculer la distance d'un point à un plan, ou à une droite dans le plan).

Le sous-titre « Courbes planes »

• L'objectif est l'étude de situations géométriques, mécaniques ou physiques, en « se gardant de toute technicité » : l'étude des branches infinies, des points où le vecteur dérivé s'annule, la recherche de points multiples et l'emploi de coordonnées polaires sont hors programme.

• Le programme comporte des notions sur les courbes paramétrées ($t \to \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{\imath} + y(t)\,\vec{\jmath}$, dans un repère orthonormal), le vecteur dérivé et son interprétation cinématique (vecteur vitesse), et le lien avec la tangente.

L'autre rubrique du programme concerne les coniques, définies par foyer et directrice, leur équation cartésienne dans un repère adapté, et la mise en place d'une conique à partir d'une équation réduite.

• Les travaux pratiques comportent des exemples d'étude de lieux géométriques, ainsi que des exemples de représentations paramétriques de coniques, et la détermination de leur tangente en un point.

Le sous-titre « Transformations et configurations »

Le programme porte sur les isométries et similitudes directes du plan :
– pour les isométries, on s'appuie sur les résultats vus en Première (isométries fixant un point). Les notions de déplacements et d'antidéplacements sont introduites, mais l'étude des antidéplacements est hors programme. La transformation vectorielle associée à une isométrie est définie, et étudiée : linéarité, conservation du produit scalaire, effet sur le déterminant, transformation associée à une composée. À son sujet, les commentaires précisent qu'elle constitue un outil efficace pour la résolution de problèmes concernant les transformations ponctuelles, mais qu'en revanche, la reconstitution des propriétés fondamentales des isométries à partir des isométries vectorielles est hors programme.
– la même démarche est adoptée pour les similitudes, où les similitudes vectorielles sont introduites.

En géométrie dans l'espace, seules quelques notions concernant les transformations élémentaires de l'espace (translation, homothétie, symétrie centrale, réflexion, rotation définie par son axe et son angle, demi-tour) figurent au programme : le résultat le plus élaboré concerne les décompositions d'une rotation en produit de deux réflexions.

Le titre « Systèmes d'équations linéaires »

Il concerne leur résolution par la méthode de Gauss dont la description générale (ainsi que la mise en forme de l'algorithme) n'est pas au programme.

Le programme de la classe de Mathématiques Supérieures (annexe 2 de l'arrêté du 17 juillet 1987)

Il prend en compte l'évolution des programmes du second cycle. Par ailleurs, un enseignement de l'informatique est introduit pour la première fois dans ces classes. Il comporte une partie « Analyse », une partie « Algèbre » et une partie « Géométrie ».
– Pour la partie « Algèbre », le titre III « Algèbre linéaire et multilinéaire » est le lieu d'introduction de la notion d'espace vectoriel (sur un corps K qui est un sous-corps de **C**).
• Le premier sous-titre leur est consacré et les notions suivantes sont abordées : espaces vectoriels sur un corps, applications linéaires, composition, endomorphisme, automorphisme, formes linéaires et les structures associées : espace vectoriel $\mathscr{L}$(E,F), espace dual E*, algèbre $\mathscr{L}$(E), groupe GL(E) (l'étude de la dualité n'est pas au programme) ; sous-espaces vectoriels, image et noyau d'une application linéaire ; sous-espace engendré par une partie ; somme d'un nombre fini de sous-espaces, cas où la

somme est directe, sous-espaces supplémentaires, projecteurs ; familles libres, génératrices, bases, coordonnées (ou composantes) d'un vecteur ; sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction, sous-espaces affines parallèles ; applications affines ; équations linéaires $f(x) = a$.

• Le deuxième sous-titre concerne les espaces vectoriels de dimension finie. Nous en citerons les points les plus importants : théorème de la base incomplète, existence des bases, dimension ; dimension d'un sous-espace, existence de supplémentaires, dimension d'une somme directe, relation entre dim(A+B), dim(A∩B) et dimA, dimB ; isomorphisme entre l'image et un supplémentaire du noyau d'une application linéaire, cas d'une forme linéaire, hyperplan ; hyperplans affines et leurs équations ; rang d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs ; valeurs propres et vecteurs propres.

• Le troisième sous-titre est consacré aux matrices (l'espace vectoriel qu'elles constituent ; matrice d'une application linéaire, matrice de passage ; trace ; rang; matrices équivalentes, caractérisation à l'aide du rang ; matrices semblables, cas où il existe une base formée de vecteurs propres ; systèmes d'équations linéaires, rang, condition d'existence d'une solution, systèmes de Cramer.

• Le quatrième concerne les déterminants, introduits à l'aide des formes n-linéaires alternées.

• Dans la rubrique « Travaux pratiques », le seul qui porte sur des algorithmes et méthodes exigibles concerne les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice et leur applications à la résolution des systèmes linéaires par la méthode du pivot partiel, aux calculs de déterminants, à l'inversion de matrices carrées, au calcul du rang d'une matrice.

– Le titre IV « Espaces vectoriels euclidiens » traite du produit scalaire (inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, norme euclidienne ; existence de bases orthonormales, méthode de Schmidt (elle fait l'objet d'un TP) ; sous-espaces vectoriels orthogonaux ; orthogonal d'un sous-espace, projections et symétries orthogonales ; distance d'un point à un sous-espace ; isomorphisme avec le dual, normale à un hyperplan) et des automorphismes orthogonaux en dimension $n \leq 3$ (conservation de la norme, du produit scalaire ; groupe orthogonal O(E), groupe spécial orthogonal SO(E) ; les réflexions engendrent O(E), les demi-tours engendrent SO(E) ; matrices orthogonales, groupe O(n) et SO(n) ; changement de base orthonormale (qui fait l'objet d'un TP) ; cas où l'espace est orienté : pour $n = 2$, produit mixte, noté Det $(\vec{u}, \vec{v})$, matrice d'une rotation et d'une symétrie dans une base orthonormale directe ; pour $n = 3$, produit mixte, noté Det$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, produit vectoriel, applications antisymétriques ; axe et angle d'une rotation (fait l'objet d'un TP).

– Pour la partie « Géométrie », les titres et le contenu de la rubrique de travaux pratiques sont suffisamment éloquents :

1 - Géométrie affine du plan et de l'espace (de dimension 3)

2 - Géométrie euclidienne du plan et de l'espace orientés

3 - Courbes paramétrées.

Travaux pratiques :

– Calcul de la distance d'un point à une droite, d'un point à un plan, de deux droites. Perpendiculaire commune à deux droites. Calculs d'angles.

– Constructions de courbes planes définies par une équation $y = f(x)$, une représentation paramétrique en coordonnées cartésiennes, une équation polaire $\rho = f(\theta)$, f n'étant pas nécessairement de signe constant.

– Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points fixes est constant ou tels que l'angle de droites (ou demi-droites) (MA, MB) soit constant.

La rubrique des TP du type « Exemples de » concerne les groupes d'isométries laissant invariante une partie du plan ou de l'espace ; des études locales de courbes planes en un point d'inflexion ou de rebroussement ; des recherches de courbes planes définies par une condition différentielle, des recherches de lieux géométriques.

On constate que de nombreux points de ce programme figuraient au programme de Terminale C des années 70.

Le programme de la classe de Mathématiques Spéciales M et M' (annexe II de l'arrêté du 16 septembre 1988)

Nous n'en donnerons que les principales lignes, sans rentrer dans les détails.

Pour ce qui concerne le programme M,

– dans la partie « Analyse », le premier titre concerne les espaces vectoriels normés, avec les sous-titres suivants :

1 - Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe

2 - Suites (à valeurs dans un espace normé) et fonctions (d'un espace normé dans un autre)

3 - Espaces vectoriels normés de dimension finie

4 - Espaces préhilbertiens réels ou complexes

5 - Suites d'applications à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

– dans la partie « Algèbre », les titres et sous-titres sont les suivants :

I - Algèbre linéaire et multilinéaire

1 - Dualité des espaces vectoriels de dimension finie

2 - Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

3 - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

II - Espaces vectoriels euclidiens (de dimension finie)

1 - Géométrie des espaces euclidiens

2 - Réduction des endomorphismes symétriques.

– dans la partie « Géométrie » on étudie les courbes paramétrées en dimension 2 ou 3, puis les courbes et surfaces définies par paramétrages ou par équations cartésiennes.

Dans le programme de la section M', on trouve des titres ou sous-titres complémentaires :

Dans le titre « Espaces vectoriels normés » :

- Parties compactes
- Espaces vectoriels normés complets
- Notions sur la connexité

Dans la partie «Algèbre », les titres et sous-titres suivants :

II - Algèbre bilinéaire

1 - Formes quadratiques

2 - Classification des formes quadratiques

III - Espaces vectoriels euclidiens et hermitiens

1 - Espaces euclidiens

2 - Espaces hermitiens

3 - Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens.

Dans la partie « Géométrie », le sous-titre « Inversion locale dans $\mathbf{R}^n$ ».

On constate que ces programmes de classes préparatoires reprennent dans leurs grandes lignes les mêmes contenus que les précédents, avec un niveau de généralité moins grand, et le souci de développer une « vision géométrique des problèmes », ce qui a pour conséquence de mettre en avant la géométrie du plan et de l'espace, d'une part en leur fournissant un modèle mathématique rigoureux, d'autre part en ne négligeant pas les aspects pratiques de l'étude des droites, plans, cercles, sphères, courbes, surfaces, ... , et en utilisant les ordinateurs pour certaines des questions rencontrées. Enfin, en ce qui concerne les transformations géométriques, l'étude des espaces de dimension 2 et 3 permet une mise en perspective de questions plus théoriques : par exemple, un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien apparaît comme étant une somme directe orthogonale d'homothéties, un endomorphisme antisymétrique est somme directe orthogonale de l'endomorphisme nul de son noyau et de similitudes planes directes d'angle droit ...

11 - Les programmes de 1985-1994

L'année 1985 voit paraître de nouveaux programmes de Collège qui diffèrent sensiblement des précédents, aussi bien sur le plan des contenus, que par la présentation de leurs compléments, qui inaugure l'utilisation d'un bandeau pour décrire les grands objectifs ainsi que celle des « deux colonnes » qui sera réutilisée ensuite pour la rédaction des programmes de lycée. Pour la première fois, un tableau synoptique couvrant l'ensemble des classes de Collège met en évidence la progressivité des programmes sur six rubriques transversales. Sur le plan de l'organisation didactique, comme nous l'avons annoncé dans le paragraphe 8, les instructions générales plaident pour un enseignement privilégiant l'activité de l'élève, dont le mot « activités » va rapidement devenir l'emblème.

À partir de la rentrée 1986, à raison d'un niveau par an, les programmes de Collège vont changer ; ce mouvement va se poursuivre au lycée, pour lequel sont mis en place de nouveaux programmes dans le but d'assurer la continuité. Ainsi, un nouveau programme de Seconde est publié en 1990 ; ceux des différentes classes de Première le sont en 1991 et 1992, ceux des classes de Terminale en 1994, ceux des classes de Mathématiques Supérieures en 1995 et enfin en 1996 pour les classes de Mathématiques Spéciales.

Les programmes de Collège de 1985

Ils sont organisés, pour chacune des quatre classes, en trois rubriques, intitulées « Travaux géométriques », « Travaux numériques », « Organisation et gestion de données. Fonctions ». Le programme est très concis, mais fait l'objet de compléments détaillés. Ces compléments, dont le sous-titre est « Explicitation des connaissances, des méthodes et des capacités exigibles des élèves », sont les premiers à établir de manière systématique une correspondance entre « les contenus et les compétences des élèves » : pour chacune des trois rubriques, les objectifs figurent en bandeau sur les deux pages (ou deux colonnes), les « dominantes de contenus ou de travaux » étant différenciés du point de vue typographique ; en page (ou colonne) de gauche, sont fixés « le sens et les limites des contenus de programme », celle de droite indique les « compétences exigibles des élèves ».

Pour ce qui concerne la géométrie, elle comporte à chaque niveau, une rubrique de géométrie dans l'espace centrée sur l'étude d'un type de solide, et pour la géométrie plane, une rubrique relative à une (et parfois deux) transformations géométriques : la symétrie axiale en Sixième, la symétrie centrale en Cinquième, la translation et la rotation en Quatrième, les composées de translations (et de symétries axiales dans les cas où les axes sont parallèles ou perpendiculaires). Pour chacune d'elles, un travail expérimental est mené, dans le but d'obtenir un inventaire abondant de figures et de dégager de façon progressive les propriétés conservées, qui sont ensuite réutilisées pour les constructions et tracés. Ainsi, les transformations apparaissent essentiellement de deux façons : par l'action sur une figure donnée, par le fait qu'elles conservent globalement une figure ; en aucun cas la présentation en tant qu'application du plan dans lui-même n'est souhaitée par le programme.

Les vecteurs font leur apparition en classe de Quatrième, où ils sont reliés aux translations, qui sont introduites préalablement ; en Troisième, les sommes de vecteurs sont introduites à l'aide des composées de translations, ainsi que la notion de coordonnées d'un vecteur dans un repère. Nous allons détailler le contenu et surtout les compléments de ces deux programmes sur ce point précis.

Le programme de la classe de Quatrième (arrêté du 14 novembre 1985)

Les vecteurs y apparaissent dans le titre 5 de la rubrique « Travaux géométriques » : « Dans le plan, transformation de figures par translation ou rotation ; translation et vecteur ; polygones réguliers ». Concernant la translation, les compétences exigibles sont la construction de l'image d'un point, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle ; les commentaires précisent qu'elle sera reliée au parallélogramme. Pour les vecteurs, ces derniers indiquent qu'ils seront « introduits « naïvement » par direction, sens, longueur. À toute translation, on associe son vecteur. Si, dans une translation, A' est l'image de A et B' celle de B, on écrit $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. ». Aucune compétence exigible ne concerne les vecteurs.

Les vecteurs apparaissent ainsi comme un nouveau moyen d'exprimer que des points sont reliés par une translation , ou qu'un quadrilatère est un parallélogramme, faits qui se traduisent tous les deux par une égalité de vecteurs. L'intérêt principal d'une telle écriture résulte de la transitivité d'une telle égalité (qui est ici admise, souvent implicitement, le signe « égal » employé ici héritant de propriétés que l'habitude a fini par naturaliser. La plupart des manuels font figurer la propriété connue sous le nom de « croisement des équipollences », sans qu'elle soit explicitement au programme. Elle est en effet très utile pour faire des égalités de vecteurs un outil efficace pour démontrer que des droites sont parallèles. En revanche, un petit nombre d'entre eux s'autorise à donner une caractérisation vectorielle du milieu (par exemple, traduire que I est le milieu de [AB] par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$), résultat qui est pourtant plus simple à établir que le « croisement des équipollences »[12]. Ce fait a pour conséquence que les égalités de vecteurs constituent un outil très lourd pour démontrer qu'un point est le milieu d'un

[12] Il convient, en effet, de traiter séparément le cas où tous les points en question sont alignés.

segment : une fois l'égalité de vecteur $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ obtenue, il convient de revenir à la définition d'une égalité de vecteurs pour conclure. Il résulte de ce qui précède que les types de problèmes pour lesquels les vecteurs constituent un outil de résolution efficace sont peu nombreux, et ne font en aucun cas l'objet d'une compétence exigible. Tout ceci a contribué à fragiliser l'enseignement des vecteurs en classe de Quatrième, ce qui a amené de nombreux professeurs (ou même équipes d'établissement) à reporter en Troisième la première rencontre avec les vecteurs.

Le programme de la classe de Troisième (arrêté du 14 novembre 1985 ; B.O. du 12 décembre 1985)

Les vecteurs y apparaissent dans les titres 4 et 6 de la rubrique « Travaux géométriques » : « Translation et vecteur. Égalité vectorielle. Dans un plan rapporté à un repère, effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Addition vectorielle ».

• Sur les deux premiers points, pour lesquels les commentaires suggèrent de partir de l'expérience acquise en quatrième, apparaissent deux compétences exigibles :

– savoir relier l'égalité vectorielle au parallélogramme (compétence déjà incontournable en Quatrième) ;

– savoir construire l'image d'un point par une translation connaissant le vecteur de la translation (connaissance déjà exigible en Quatrième).

• À propos de l'addition vectorielle, les commentaires indiquent qu'elle doit être reliée à la composition des translations et, phrase au contenu un peu ambigu, « qu'elle ne fera l'objet que d'un travail d'initiation ». En effet, elle donne lieu à deux compétences exigibles :

– savoir que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

– relier la construction de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ à celle du parallélogramme.

• Sur le dernier point, l'unique compétence exigible comporte deux aspects :

– savoir calculer, lire sur un graphique, les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, connaissant les coordonnées des points A et B.

Plus généralement, le commentaire précise : « aucune compétence sur le calcul vectoriel n'est exigible des élèves. Le produit d'un vecteur par un réel n'est pas au programme. ».

Lors d'une étude réalisée à l'INRP[13] sur l'articulation Troisième-Seconde, au cours de laquelle une dizaine de séquences de cours (de 3 à 5 séances) ont été observées

---

[13]Voir la publication :
COLOMB J. (dir.), 1993, *Les enseignements en Troisème et Seconde, ruptures et continuités*, INRP, Paris.

pour chacun des deux niveaux, il a été constaté que le lien entre la composition des translations et l'addition vectorielle est peu travaillé pour définir cette dernière (ceci revient à inverser les rôles tenus par ces deux objets dans les transpositions didactiques antérieures, inversion que de nombreux professeurs semblent avoir trouvée peu légitime du point de vue du savoir mathématique). Lors des évaluations qui ont été faites, un élève sur deux en moyenne confond « la règle du parallélogramme » avec la « relation de Chasles » en donnant $\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{CB}$ comme résultat pour la somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$: pour un tel élève, construire la somme, c'est « fermer le triangle » dont deux côtés sont déjà tracés.

Le programme de la classe de Seconde (arrêté du 25 avril 1990, B.O. du 17 mai 1990)

Ce programme est encore en vigueur. Il est mis en page de la même manière que les compléments aux programmes de collège, à ceci près que les rôles des colonnes sont intervertis : celle de gauche précise « les connaissances et savoir-faire de base », alors que celle de droite fournit un commentaire, « précise le sens et les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres ». De plus, une rubrique de travaux pratiques en deux colonnes fait son apparition, étendant à la classe de Seconde ce qui existe en Première et Terminale depuis la réécriture de leurs programmes : dans la colonne de gauche, on fixe « le champ des problèmes et des techniques que les élèves ont à étudier »; dans celle de droite, « un commentaire fournit des repères pour le niveau d'approfondissement de cette étude ». La typologie des travaux pratiques introduite en 85-86 en deux catégories est maintenue.

Compte tenu de sa réutilisation dans notre quatrième partie, nous allons détailler l'analyse de la rubrique de ce programme dans laquelle apparaît le calcul vectoriel.

Le titre V « Géométrie »

Il est d'abord précisé que tout point de vue axiomatique est exclu (aussi bien pour la géométrie plane que pour la géométrie dans l'espace), ainsi que toute reprise systématique des notions vues au collège. La pratique des figures « doit tenir une place centrale », et l'exploitation des écrans d'ordinateurs est signalée comme aide efficace pour les élèves.

Le programme comporte deux objectifs essentiels :

– Poursuivre *conjointement* l'étude, déjà engagée au collège, des *configurations usuelles du plan et de l'espace* ;

– Mettre en place et exploiter quelques éléments de *calcul vectoriel dans le plan*, en relation avec l'étude des configurations et des transformations et avec l'enseignement de la physique.

Pour la géométrie plane, l'objectif essentiel est la résolution de *problèmes concernant les configurations* :
– alignement,
– concours,
– parallélisme,
– orthogonalité,
– calcul de distances,
– calcul d'angles,
– calcul d'aires,
à l'aide des outils suivants :
– les acquis du collège sur les *configurations de base et leurs symétries* (on renvoie aux compléments de programmes de collège pour les capacités exigibles) ;
– des outils nouveaux :
  – *le calcul vectoriel*,
  – *l'action des transformations* (sur des exemples *très* simples).
Un deuxième objectif concerne les problèmes de lieux géométriques et de construction : mais seule l'étude de *quelques* exemples *très* simples figure au programme, l'étude systématique de tels problèmes étant en dehors des objectifs du programme.

Le programme de géométrie plane comporte deux sous-titres : A. Calcul vectoriel et B. Transformations et configurations. Nous nous intéresserons seulement au premier .
• En bandeau figure le cadre général de l'étude du calcul vectoriel.
– on conservera le point de vue adopté au collège pour l'introduction des vecteurs (sans y revenir) ainsi que pour étudier les opérations.
– le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain d'activités purement algébriques :
  – d'une part, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteur que pour la résolution de problèmes de géométrie, il est essentiel de *mettre en œuvre les vecteurs sur les configurations et les transformations* ;
  – d'autre part, l'intérêt de la notion de vecteur ne se limite pas à la géométrie : quelques exemples issus de la *mécanique* et de la *physique* permettront de le souligner.
– La notion de repère (quelconque) figure au programme. On a vu que les programmes précédents se sont efforcés d'en canaliser l'emploi, afin que l'emploi des repères ne soit ni envahissant, ni absent ; les programmes précédents de Seconde évoquaient « l'emploi d'un repère adapté à une situation géométrique ». Ici, on distingue certaines questions (tracé de courbes, diagrammes ...) dans lesquelles il peut être commode d'utiliser des

repères orthogonaux non nécessairement orthonormaux, de la résolution de problèmes de géométrie pour laquelle le programme demande de se limiter à des repères orthonormaux, reprenant à leur sujet les remarques faites antérieurement sur l'emploi de repères : « le recours à un tel repère [orthonormal] n'est qu'un outil parmi d'autres, il relève de seules considérations de commodité et d'efficacité ».
– Les vecteurs seront sollicités dans le paragraphe relatifs aux mesures d'angles orientés : ces angles concernent des couples de vecteurs unitaires.

• Du point de vue des contenus, leur présentation est organisée en trois parties :
a) Opérations sur les vecteurs; b) Bases, repères ; c) Orthogonalité, mesure des angles orientés.
Le lecteur en trouvera une reproduction dans l'annexe 2, page 481.

Pour la première fois depuis les programmes des années 70, les professeurs de lycée se voient confrontés à des élèves qui n'ont jamais entendu parler de bipoints équipollents, de classe d'équivalence de tels bipoints. De plus, les vecteurs ont été introduits au collège après que les translations aient été définies (à partir du parallélogramme), ce qui intervertit les rôles jusqu'alors bien installés. Après que les professeurs de collège aient souvent fait de gros efforts pour faire comprendre aux élèves qu'un vecteur n'est pas « attaché » à un couple de points (sans d'ailleurs disposer d'une notation pour étayer leurs propos), il revient au professeur de lycée d'introduire la notation $\vec{u}$ ainsi que la « représentation géométrique » d'un vecteur ainsi noté. Ceci provoque des interprétations différentes des auteurs de manuels, fondées sur la polysémie du mot « représentant » :
– pour certains (choix n°1), un représentant du vecteur $\vec{u}$ est un élément de la classe d'équivalence, c'est-à-dire n'importe quel bipoint (A, B) tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; mais comme l'évocation des bipoints n'est plus de mise, on ne peut s'exprimer ainsi : en général, la formulation retenue est la suivante : « $\overrightarrow{AB}$ est un représentant de $\vec{u}$ », (celui d'origine A, ce qui revient à sous-entendre que $\overrightarrow{AB}$ est « attaché » en A : pour les élèves ayant bien compris au collège ce qu'est un vecteur (libre), ceci est une régression). Le qualificatif « géométrique » disparaît, car il n'a guère de signification : la représentation évoquée ici n'a rien de géométrique, elle peut être utilisée chaque fois qu'une relation d'équivalence est en cause. De plus, les objets $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont difficiles à différencier du point de vue géométrique, à moins de considérer que $\overrightarrow{AB}$ n'est qu'un « segment orienté » ; mais cette notion n'est évoquée nulle part.
– pour d'autres (choix n°2), il s'agit de donner un moyen d'établir une bijection entre vecteurs et objets géométriques, rendue nécessaire par le fait qu'un vecteur est un objet bien compliqué, caractérisé par la donnée de trois informations (une direction, un sens

et une longueur). La représentation géométrique évoquée est alors celle qui utilise la bijection entre l'ensemble des vecteurs du plan et le plan pointé. Un point O étant fixé dans le plan, le vecteur $\vec{u}$ est représenté par le point U, image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$. Cette représentation est alors un élément nouveau (ce qui légitime sa présence sous forme d'un alinéa dans le programme), qui pourra être mise au service de la définition ou de la représentation géométrique d'autres notions nouvelles : multiplication d'un vecteur par un nombre, vecteurs colinéaires et lien avec l'alignement.

– pour d'autres enfin (choix n°3), la représentation géométrique d'un vecteur n'est pas autre chose qu'une de ses représentations graphiques : on dessine une flèche, que l'on nomme $\vec{u}$, sans donner de nom à ses extrémités. Lorsque plusieurs vecteurs sont en cause, plusieurs procédés peuvent cohabiter, parfois dans le même manuel : flèches « flottant » dans le plan, sans origine commune, flèches ayant une origine commune.

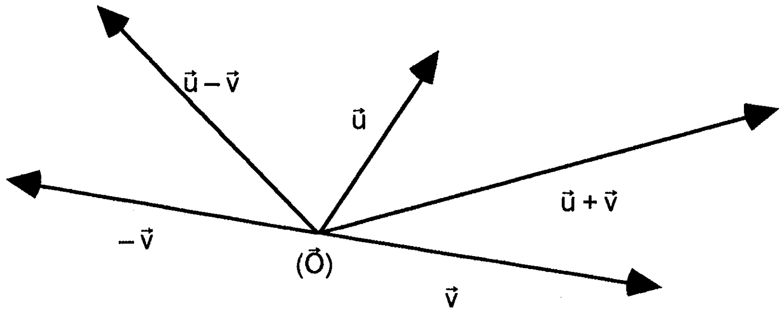
On pourra remarquer que l'accord est général pour représenter les vecteurs de base dans un repère du plan : les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont toujours représentés graphiquement par des flèches ayant l'origine du repère comme origine.

Ces interprétations divergentes, qui sont surprenantes de la part d'auteurs de manuels, peuvent s'expliquer par la vision que les professeurs de lycée se font de l'enseignement des mathématiques en collège et par leur mode d'information sur ce sujet. On sait combien la lecture et l'interprétation d'un texte de programme sont difficiles : cette difficulté s'accroît notablement lorsqu'on est confronté à des programmes qui concernent un cycle autre que celui dans lequel on exerce. On peut se retourner vers les manuels, mais il convient alors de « remonter » à la classe de Quatrième dans laquelle les vecteurs sont introduits. Peu nombreux sont les professeurs de lycée à se livrer à une enquête aussi coûteuse, et des informations approximatives peuvent diffuser dans l'univers des professeurs de lycée, qui sont nombreux à croire qu'au collège seuls les vecteurs comme « segments orientés » ont été vus, et qu'il leur appartient de mettre en scène le « vrai » vecteur, le vecteur « libre » : l'essentiel, dans cette perspective, est de s'affranchir d'une « attache », alors que la représentation d'un vecteur dans le plan pointé repose au contraire sur le choix d'une « origine ».

On aura compris que, selon le choix fait par les auteurs, les contenus des rubriques « Représentation géométrique des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $-\vec{u}$, et $\vec{u} - \vec{v}$ », « représentation géométrique de $\lambda\,\vec{u}$ » seront fort différents, notamment du point de vue des outils sémiotiques :

– dans les choix 1 et 3, la notation $\vec{u}$ n'est souvent vue que comme un moyen plus économique de désigner un vecteur ; les résultats relatifs à la somme sont ceux de la classe de Troisième (relation de Chasles et règle du parallélogramme accompagnés de leurs représentations graphiques) dans lesquels la nouvelle notation n'apporte rien d'autre qu'un nouveau moyen de désigner les deux vecteurs que l'on additionne.

– dans le choix n°2, la notation $\vec{u}$ est utile dans les représentations graphiques si l'on ne veut pas les surcharger par les noms des points-images des vecteurs : elle devient un moyen de nommer les flèches $\overrightarrow{OU}$ sans avoir à utiliser U. Elle permet de ne faire apparaître sur la représentation graphique que des éléments vectoriels, à l'exclusion de tout élément ponctuel, et contribue ainsi à mettre en place l'autonomie du vectoriel par rapport au ponctuel, des schémas tels que les suivants pouvant être réutilisés dans des situations (physique, mécanique, électricité et électromagnétisme des classes de lycée et plus tard espaces vectoriels généraux, puis espaces vectoriels intervenant en analyse fonctionnelle ou en analyse de données) où les points figurant aux extrémités des flèches ne jouent aucun rôle :



La force de cette représentation graphique est telle qu'on la retrouve de manière surprenante dans des manuels ayant fait les choix n°1 ou n°3 (à la différence près que le vecteur $\vec{0}$ n'apparaît pas sur les graphiques).

Nous reviendrons plus loin sur une autre utilisation possible de cette représentation des vecteurs dans le plan pointé, faisant intervenir en tant qu'outils efficaces les deux notations $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$, l'efficacité résultant de leur mise en relation, sous la forme $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, égalité qui n'est autre que la forme soustractive de la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, dans laquelle on utilise les notations mises en place pour la représentation géométrique d'un vecteur dans le plan pointé en O, auxquelles on ajoute la convention consistant à désigner par la même lettre minuscule fléchée le vecteur dont le point-image est désigné par une lettre majuscule (en fait, on fait agir ici la bijection réciproque de celle qui à un vecteur $\vec{u}$ associe le point U tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OU}$).

Dans la quatrième partie, nous évoquererons les possibilités que le choix n°2 offre pour la mise en place de la multiplication externe et de la colinéarité, et la place dans l'organisation mathématique (particulièrement au niveau technologique) de points du programme qui ont du mal à vivre dans l'organisation la plus fréquemment employée dans les manuels :

– la configuration de Thalès (si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{A'B'}$. Réciproque dans le cas où A' = A.

– repères d'une droite du plan ; abscisse d'un point, mesure algébrique.

Nous aurons également l'occasion d'évoquer le lien entre l'ordre utilisé dans la rédaction du programme et celui adopté dans les réalisations de ce programme que constituent les manuels. Si la traditionnelle petite phrase « mais chaque professeur garde toute liberté pour l'organisation de son enseignement » figure bien dans la rubrique « Organisation de l'enseignement » qui précède le programme proprement dit, de nombreux auteurs de manuels adoptent une progression dont l'organisation est très largement influencée par l'ordre dans lequel le programme cite les notions et questions à étudier. En particulier, le titre « b) Bases, repères » donne souvent lieu à une étude conjointe des deux notions, la première étant essentiellement mise au service de la seconde, alors que des décompositions de vecteurs dans une base sont fréquemment sollicitées dès l'étude des problèmes d'alignement, qui sont traitées comme applications de la colinéarité, et ceci bien avant que la notion de base – ou même, plus simplement, de décomposition d'un vecteur à l'aide de deux vecteurs non colinéaires – soit évoquée.

Le programme de Première S (arrêté du 27 mars 1991 - B.O. spécial du 2 mai 1991)

De même que le programme de Seconde que nous venons d'examiner, ce programme est encore en vigueur. Par rapport aux programmes antérieurs à ce niveau, la différence essentielle est consécutive à la modification du programme de Seconde : le barycentre et le produit scalaire attendent la classe de Première pour devenir des objets d'étude ; pour la géométrie dans l'espace, le produit scalaire est hors programme et ne sera abordé qu'en classe de Terminale.

• Les objectifs se situent en droite ligne de ceux de la classe de Seconde :

– la poursuite du *calcul vectoriel* dans le plan et sa mise en place dans l'espace, en relation avec l'étude de la *géométrie* et avec l'enseignement de la *physique* ;

– la poursuite de l'étude des configurations du plan et de l'effet des transformations sur celles-ci ;

– la poursuite de l'étude des configurations simples de l'espace.

• Du point de vue des contenus, nous focaliserons notre étude sur le titre 1 « Calcul vectoriel et configurations ». Le bandeau en précise les objectifs, qui reprennent pour l'essentiel les formulations déjà présentes dans le programme de Seconde (importance de la traduction vectorielle des propriétés des configurations et des transformations ; le calcul vectoriel ne doit pas constituer un terrain purement algébrique ; des exemples en mécanique et en physique montreront que l'intérêt du calcul vectoriel ne se limite pas à la géométrie ; pour la résolution de problèmes de géométrie, on se limite à l'emploi de repères *orthonormaux*, le recours à un tel repère n'étant qu'un outil parmi d'autres, relevant de seules considérations de commodité et d'efficacité).

Nous reproduisons dans l'annexe 3, page 483, le détail du titre 1 du programme, qui comporte des commentaires très précis, difficiles à synthétiser sans prendre le risque de les déformer.

• La liste des travaux pratiques correspondants est peu modifiée par rapport aux programmes antérieurs. S'y ajoute seulement des « exemples d'étude de configurations planes (alignement, concours, orthogonalité, ...) à l'aide de différents outils (configurations de base, calcul vectoriel, outil numérique) », conséquence du déplacement vers la classe de Première de thèmes qui étaient auparavant traités en Seconde.

Le titre 2 « Transformations et configurations dans le plan », dans lequel se retrouve le sous-titre « Angles orientés dans le plan, rotations » qui, dans la version précédente des programmes, figurait dans le titre 1 « Outil vectoriel et configurations », voit ses ambitions réduites : on n'étudie plus des isométries fixant un point, on compose des transformations (deux translations, deux rotations de même centre, deux homothéties de même centre, deux réflexions) et on s'intéresse aux transformations réciproques, sans étudier la décomposition d'une rotation ou d'une translation en produit de réflexions. L'étude des configurations repose sur les propriétés conservées par ces transformations : image d'une droite, d'un segment, d'un cercle, du milieu d'un segment ; conservation du parallélisme, du contact d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles ; effet sur les angles (orientés ou non). Les interventions des vecteurs dans ces questions ne font l'objet d'aucune remarque dans les programmes.

Par rapport aux programmes antérieurs, le seul élément vraiment nouveau, du point de vue des contenus, concerne l'utilisation du produit scalaire pour définir l'image d'un vecteur par une projection orthogonale sur un axe, et l'application du résultat à l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale à l'aide de produits scalaires ($x = \vec{\imath} \cdot \vec{v}$ et $y = \vec{\jmath} \cdot \vec{v}$). Ce résultat, très utile dans certaines applications de l'algèbre linéaire (méthode des moindres carrés, par exemple), aura du mal à vivre dans la plupart des manuels, faute de types de problèmes le sollicitant. L'alinéa de programme en question sera même parfois complètement ignoré de la part de certains auteurs de manuels.

Le programme de la classe de Terminale C (B.O. spécial n°2 du 2 mai 1991)

Comme c'était déjà le cas dans la version précédente du programme, les vecteurs ne sont plus évoqués dans le sous-titre relatif aux équations et systèmes d'équations linéaires. Ce sous-titre est intégré dans le titre II « Algèbre, combinatoire, probabilités »[14], avec un contenu inchangé. L'essentiel des interventions des vecteurs se

[14] alors qu'auparavant il figurait dans le titre I « Algèbre et combinatoire ».

situe dans le titre IV « Géométrie », qui garde les mêmes sous-titres que dans les programmes précédents : « 1 – Calcul vectoriel et configurations (plan et espace) », « 2 – Courbes planes », et « 3 – Transformations et configurations ».

Le sous-titre « 1- Calcul vectoriel et configurations (plan et espace) »

Il ne subit que quelques aménagements. Il voit apparaître le produit scalaire dans l'espace (qui ne figure plus au programme de Première), les projections orthogonales sur une droite, sur un plan ; l'expression du produit scalaire dans une base orthonormale est accompagnée par l'équation d'un plan et d'une sphère dans un repère orthonormal.

Pour les Travaux pratiques correspondant à des techniques « classiques et bien délimitées », on retrouve ceux figurant dans l'ancien programme (réduction et lignes de niveau de $\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i MA_i^2$, cas de deux points, lignes de niveau $M \mapsto \frac{MA}{MB}$; ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ modulo π ou modulo 2π ; changement (de base ou) de repère orthonormal direct dans le plan ; expression analytique d'une translation, d'une rotation plane). Le T.P. relatif aux calculs de distances et d'angles quitte la rubrique « Exemples de », et voit sa rédaction nettement complétée et précisée : « Calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes dans les configurations usuelles du plan (polygones, cercles coniques ...) et de l'espace (prismes, sphères, cylindres, cônes ...).

Dans la liste des T.P. du type « Exemples de » on retrouve l'emploi des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane, l'emploi d'un repère orthonormal dans le plan ou dans l'espace. Deux nouveaux T.P. apparaissent :

– exemples de recherche de lieux géométriques dans le plan (conditions de distances, d'angles, lignes de niveau, points liés à une configuration mobile).

– exemples d'étude de problèmes d'optimisation d'origine géométrique.

Les sous-titres « Courbes planes », et « Transformations et configurations »

Le seul changement à signaler dans le premier sous-titre concerne la liste des T.P., qui se voit enrichie d'un nouvel élément : « Exemples d'étude de situations issues de la géométrie, de la mécanique et de la physique menant à des coniques ».

À propos du deuxième, la seule modification concerne les similitudes directes : le paragraphe qui les concerne change de titre pour devenir « Notions sur les similitudes directes », façon d'indiquer qu'il fait l'objet d'allégements. Ne figurent plus au programme l'étude générale des similitudes (bijections transformant les distances dans un rapport donné), la composition des similitudes directes, la notion de transformation vectorielle associée, l'existence et unicité de la similitude directe transformant A en A', B en B', et la détermination de ses éléments caractéristiques. Ceci a pour conséquence la modification d'un des T.P. : la recherche de similitudes directes transformant une configuration en une autre n'est plus un objectif du programme, qui remplace l'expression « similitude directe » par « homothétie ».

12 – Les programmes de Terminale S de 1994

Comme c'était déjà le cas dans la version précédente du programme, les vecteurs ne sont plus évoqués dans le sous-titre relatif aux équations et systèmes d'équations linéaires. Ce sous-titre est intégré dans le titre III « Algèbre et géométrie »[15], avec un contenu inchangé. L'essentiel des interventions des vecteurs se situe dans le sous-titre « 3 – Calcul vectoriel et géométrie » et, pour ce qui concerne l'enseignement de spécialité[16] les sous-titres « 4 – Courbes planes », et « 5 – Transformations et configurations du plan ». (On notera qu'il n'est plus fait allusion aux transformations de l'espace). La modification de la structure des classes de terminale aboutit à un allégement des horaires (6 heures par semaine, et 8 heures pour les élèves ayant choisi l'enseignement de spécialité au lieu de 9 heures en Terminale C), ce qui conduit à quelques allégements : ainsi, les applications linéaires associées aux projections, et aux isométries ne figurent plus au programme.

Le sous-titre « 3 - Calcul vectoriel et géométrie »

Il ne subit que quelques aménagements. Il voit apparaître le produit scalaire dans l'espace (qui ne figure plus au programme de Première) et son expression dans une base orthonormale ; en revanche, le déterminant de deux vecteurs dans le plan orienté et son expression dans une base orthonormale directe disparaissent. Il en est de même des projections vectorielles, leur linéarité et de la conservation du barycentre par une projection. La modification la plus importante concerne la rubrique de travaux pratiques :

– pour l'enseignement obligatoire, seul un T.P. figurant dans les anciens programmes est conservé (Exemples d'emploi d'un repère orthonormé dans le plan ou dans l'espace). Deux nouveaux T.P. apparaissent.

– Le premier est une reformulation de celui concernant les calculs de distances et d'angles dans les configurations, figurant dans le programme de 1991, auquel on adjoint celui ayant pour thème les problèmes d'optimisation d'origine géométrique ; notons qu'il

---

[15] alors qu'auparavant il figurait dans le titre I « Algèbre, combinatoire et probabilités ».

[16] Le programme précise que « l'enseignement de spécialité a pour objectif d'approfondir et développer certains des paragraphes déjà étudiés dans l'enseignement obligatoire ».

retourne à la rubrique « Exemples de » : « exemples d'étude de problèmes portant sur des objets usuels du plan et de l'espace (calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes, ...) et de problèmes issus de situations géométriques (études de fonctions, optimisation, ...) ».

– Le deuxième concerne des « exemples d'emploi de barycentres, du produit scalaire et du produit vectoriel pour l'étude de configurations du plan et de l'espace. »

C'est dans l'enseignement de spécialité que l'on retrouve quelques T.P. figurant dans l'ancien programme relatifs à la réduction et aux lignes de niveau de $\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i MA_i^2$, et dans le cas de deux points, les lignes de niveau $M \mapsto \frac{MA}{MB}$; à l'ensemble des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ modulo π ou modulo 2π ; exemples de recherche de lieux géométriques dans le plan (conditions de distances, d'angles, lignes de niveau, points liés à une configuration mobile).

Les sous-titres « Courbes planes », et « Transformations et configurations du plan »

Ils font désormais partie de l'enseignement de spécialité.

Le premier ne donne lieu qu'à de légères modifications.

Pour le second, deux faits marquants ont déjà été soulignés :

– la disparition du paragraphe « Notions sur les transformations élémentaires de l'espace » ;

– la disparition de toute allusion aux isométries vectorielles.

À l'ancien programme sont en revanche ajoutés des questions dont certaines figuraient auparavant au programme de Première :

– décomposition d'une translation ou d'une rotation en produit de deux réflexions ;

– conservation du produit scalaire par une isométrie.

Les travaux pratiques relatifs aux transformations du plan restent les mêmes.

13 – Les révisions de programme des années 1995-1998

Elles concernent d'une part les programmes de Collège, dont les programmes font l'objet d'une révision en 1995 pour la classe de Sixième, en 1997 pour les classes de Cinquième et de Quatrième, en 1998 pour celle de Troisième ; d'autre part, le programme de Terminale S qui est revu en 1997, ainsi que les programmes des classes préparatoires revus en 1995 pour la première année, et en 1996 pour la deuxième. Nous n'évoquerons pas les programmes des classes de Sixième et Cinquième, qui ne font aucune allusion aux vecteurs.

Les programmes de Quatrième (arrêté du 10 janvier 1997 - B.O. n°5 du 30 janvier 1997) et de Troisième (arrêté du 15 septembre 1998 - B.O. hors série n° 10 du 15 octobre 1998)

Du point de vue de la mise en page de leur texte, ces programmes font apparaître, en dessous du bandeau relatif aux objectifs, trois colonnes : la première concerne les contenus proprement dits, la deuxième les compétences exigibles, et la dernière (qui est la plus remplie) contient des commentaires, concernant aussi bien les objectifs propres à chaque contenu que les activités à l'intention des élèves ou encore l'articulation avec les classes qui suivent ou qui précèdent.

En classe de Quatrième, le programme prend en compte la fragilité de l'introduction des vecteurs proposée par les programmes antérieurs : les vecteurs seront abordés en 3^{e} et leur étude reliée à celles des translations à l'occasion de la composition de ces dernières. En revanche, l'étude des translations, conduite dans le même esprit que celles des transformations introduites en 6^{e} et 5^{e}, est plus approfondie, la définition et les propriétés pouvant être utilisées « dans la résolution d'exercices très simples de construction », ce qui n'était guère le cas auparavant.

En classe de Troisième, le programme ne se limite pas à une simple intégration de l'introduction des vecteurs (ce qui reviendrait à entériner les pratiques de nombreux professeurs qui attendaient la classe de Troisième pour y procéder). Si les compétences exigibles restent sensiblement les mêmes, la notation $\vec{u}$ est introduite, ainsi que le vecteur nul et l'opposé d'un vecteur ; en liaison avec la composition de deux symétries centrales, la notation $2\overrightarrow{AB}$ est utilisée « pour sa commodité », sans être généralisée au produit par un entier. Compte tenu de la difficulté particulière des questions de langage et de notations dans l'introduction et l'utilisation des vecteurs, notamment au début de leur étude, nous reproduisons dans l'annexe 4, page 485, le texte des programmes relatif aux vecteurs et translations.

On peut noter que le commentaire évoque les couples de points homologues, ce qui n'était pas le cas antérieurement, et que le triplet « direction, sens, longueur » est sollicité pour une « représentation intuitive » des vecteurs et non plus pour leur définition. De plus, la locution « représentant d'un vecteur », avec le sens de couple de points reliés par une flèche est explicitement utilisée aussi bien pour décrire les compétences exigibles que dans les commentaires, alors que son emploi était soigneusement évité dans les programmes de 1985.

Les programmes de Terminale S (arrêté du 15 mai 1997 - B.O. hors série n°4 du 12 juin 1997)

La réécriture de ce programme est légitimée par une modification du programme de l'enseignement de spécialité, ainsi que par la volonté de renforcer la pratique des démonstrations. De légères modifications affectent cependant le programme de l'enseignement obligatoire.

La première concerne le sous-titre « Équations, systèmes d'équations linéaires » : les opérations élémentaires sur les lignes (méthode de Gauss) disparaissent, et ne seront introduites que dans les programmes de première année de classes préparatoires.

Dans le sous-titre « Calcul vectoriel et géométrie »,
• l'objectif relatif à « la pratique des objets du plan et de l'espace » est complété par l'évocation de l'introduction de « quelques notions nouvelles permettant essentiellement la résolution analytique de quelques problèmes dans l'espace ».
• Quant au contenu proprement dit, il est réorganisé au tour de trois titres (Barycentres, calcul vectoriel – produit scalaire dans l'espace et produit vectoriel – représentations paramétriques et équations cartésiennes) sans être vraiment modifié.
• La modification la plus importante concerne les travaux pratiques, qui sont tous nouveaux.

– l'un d'eux concerne des « exemples d'étude de courbes paramétrées du plan » (ces dernières ne font plus l'objet d'un sous-titre de l'enseignement de spécialité). On introduit à cette occasion l'ellipse, les différentes coniques pourront faire l'objet d'activités, mais aucune connaissance n'est exigible à leur sujet, ce qui rompt avec une longue tradition.

– les deux autres, qui sont également du type « Exemples de », concernent l'étude de configurations du plan et de l'espace à l'aide des outils des programmes de terminale et des classes antérieures, ainsi que des calculs « parmi ceux de distances, d'angles, d'aires, de volumes, ... , utilisant l'outil vectoriel ou un repère ». Le commentaire précise les outils utilisables :

– les propriétés des configurations,
– le calcul vectoriel,
– le calcul barycentrique,
– les transformations,
– le calcul sur les affixes ou les coordonnées après choix d'un repère,

et suggère d'étudier une même propriété avec plusieurs méthodes.

• L'enseignement de spécialité comporte quatre titres :
– Isométries fixant un point O
– Similitudes directes fixant un point O
– Déplacements et antidéplacements
(les résultats relatifs aux compositions se font soit à l'aide du théorème de décomposition d'une translation et d'une rotation en produit de symétries axiales, soit en recourant aux nombres complexes, l'interprétation géométrique de $z \mapsto az + b$ et de $z \mapsto a\overline{z} + b$ dans le cas où $|a| = 1$, figurant au programme).
– Homothéties et translations.
Les travaux pratiques concernent des exemples simples d'emploi de transformations planes pour :
– l'étude de configurations,
– la recherche de lieux géométriques,
– la résolution de problèmes de construction ;
– des exemples d'étude d'isométries laissant invariante une configuration du plan.

On constate dans ces programmes, encore plus que dans ceux qui les ont immédiatement précédés, une utilisation importante des nombres complexes en géométrie plane (aussi bien en tant qu'affixes de points qu'en tant qu'affixes de vecteurs), et plus généralement des méthodes analytiques, aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Les programmes de classes préparatoires (B.O. spécial n° 1 du 20 juillet 1995 et n° 3 du 18 juillet 1996)

Les programmes de première année (section MPSI)

En **analyse**,
• le langage des espaces vectoriels et des algèbres est utilisé pour l'étude des suites et des fonctions.
• En calcul différentiel et intégral, on s'intéresse aux fonctions à valeurs complexes (ou à valeurs dans $\mathbf{R}^2$), avant d'étudier les courbes planes paramétrées : dans ce but, on part du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) pour introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage. L'étude locale des arcs orientés concerne la position par rapport à la tangente en un point (birégulier ou non), et les branches infinies (et en particulier, la position par rapport aux asymptotes).
• Pour les fonctions de deux variables réelles, on introduit la dérivée selon un vecteur, les dérivées partielles, de développement limité à l'ordre un, de gradient, pour les

appliquer aux extremums locaux et aux coordonnées polaires, mais les notions de fonctions différentiables et de différentielle sont hors programme.

• En géométrie différentielle, on étudie les différents modes de définition des courbes planes (représentations cartésienne, paramétrique, polaire, équation implicite), puis on étudie quelques propriétés métriques fondamentales (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure).

L'essentiel des interventions des vecteurs apparaissent cependant dans le titre « Algèbre et géométrie » dont nous citerons le bandeau qui en synthétise les aspects essentiels :

« Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous-espaces vectoriels supplémentaires, d'algèbre et de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension, et de rang, mise en place du calcul matriciel, étude des espaces vectoriels euclidiens ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne.

La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur. Le programme combine, de façon indissociable, la mise en place des concepts de l'algèbre linéaire avec l'étude des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations, étude des automorphismes orthogonaux et des isométries ...).

[...]

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques ([...] opérations élémentaires sur les matrices en algèbre linéaire) et de calcul formel .... ».

Nous ne détaillerons que le contenu des titres et sous-titres suivants : géométrie affine réelle, espaces vectoriels euclidiens et géométrie euclidienne.

Le sous-titre « Géométrie affine » est le troisième du titre II « Algèbre linéaire et géométrie affine », au même rang que les sous-titres suivants : espaces vectoriels de dimension finie, calcul matriciel, déterminants.

• Son objectif essentiel est « d'exploiter les outils de l'algèbre linéaire pour approfondir l'étude des propriétés affines du plan et de l'espace, déjà abordée dans les classes antérieures. En revanche, l'étude des espaces affines généraux est hors programme ;

le programme se place dans le cadre des sous-espaces affines des espaces vectoriels et des applications affines d'un espace vectoriel dans un autre. Afin de relier ce point de vue à celui adopté dans les classes antérieures, il convient de donner brièvement la définition d'un espace affine V de direction un espace vectoriel E, et de signaler que le choix d'une origine permet d'identifier espace affine et espace vectoriel. Dans tout le programme, on effectue cette identification. Dans ce chapitre, le corps de base est **R** et les espaces vectoriels sont de dimension finie. Pour la pratique, le programme se limite à l'étude du plan et de l'espace, illustrée de nombreuses figures. »

• Le contenu fait apparaître les paragraphes suivants :

a) Translations, sous-espaces affines

Translations d'un espace vectoriel E ; notation A + x où A est un point de E et x un vecteur de E (les éléments de E sont appelés indifféremment vecteurs ou points).

Sous-espaces affines A + F où F est un sous-espace vectoriel de E. Direction.

Sous-espaces affines parallèles. Intersection de sous-espaces affines.

b) Applications affines, transformations affines

Définition d'une application affine d'un espace vectoriel dans un autre, application linéaire associée ; translations, homothéties, projections.

Image d'un sous-espace affine.

A étant un point donné, écriture d'une application affine f de E dans lui-même sous la forme $f = t \circ u$ où t est une translation et où u fixe A ; les applications affine fixant A peuvent s'identifier aux endomorphismes de E.

Définition d'un iso (ou auto) morphisme affine. Groupe affine GA(E) ; translations, homothéties de rapport non nul, affinités, symétries. Morphisme de GA(E) dans GL(E). Sous-groupe des translations, des homothéties-translations.

c) Repères cartésiens

Repère cartésien d'un sous-espace affine W, repère cartésien canonique de $\mathbf{R}^n$; coordonnées d'un point, expression d'une application affine.

Changement d'origine, de repère.

Équations cartésiennes de droites du plan, d'un plan dans l'espace. Définition d'une droite de l'espace par deux équations.

Définition d'un paramétrage d'un sous-espace affine W de dimension p (isomorphisme affine de $\mathbf{R}^p$ sur W).

Paramétrage d'une droite, d'une demi-droite, d'un plan, d'un demi-plan.

d) Barycentres

Définition des barycentres, associativité. Stabilité d'un sous-espace affine par barycentration (la caractérisation à l'aide des barycentres est hors programme).

Définition d'un segment, paramétrage d'un segment.

Définition d'une partie convexe.

Image d'un barycentre par une application affine (la caractérisation à l'aide des barycentres n'est pas au programme).
Les notions de coordonnées barycentriques, de repère affine et d'enveloppe convexe sont hors programme.

Le titre III, « Espaces vectoriels euclidiens et géométrie euclidienne », comporte deux sous-titres : « I. Produit scalaire, espaces vectoriels euclidiens » et « 2; Géométrie euclidienne du plan et de l'espace ».
Dans le titre I, cinq paragraphes apparaissent :
a) Produit scalaire

- Produit scalaire sur un **R**-espace vectoriel ; inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire.
- Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Familles orthogonales, orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.
- Relations entre produit scalaire et norme, et leurs interprétations géométriques (triangle et parallélogramme).

b) Espaces euclidiens

- Définition. Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale. Base orthonormale associée à une base par la méthode de Schmidt.
  Expression dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.
- L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en est un supplémentaire, noté $F^{\perp}$ ou F°. Toute forme linéaire sur un espace vectoriel euclidien s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$, où a est un vecteur.
- Projecteurs orthogonaux. Leur caractérisation par les relations $p^2 = p$ et $(p(x)|y) = (x|p(y))$. Définition de la distance d'un point x à un sous-espace F ; expression de cette distance à l'aide de la projection orthogonale de x sur F ; expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace F muni d'une base orthonormale, de la distance d'un point à un tel sous-espace.
- Dans un espace vectoriel euclidien orienté E, l'orientation d'une droite D induit une orientation dans l'hyperplan $D^{\perp}$. Application aux cas où E est de dimension 2 ou 3.

c) Automorphismes orthogonaux

- Définition (automorphisme conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme, par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

• Groupes orthogonal ; symétries orthogonales, réflexions. Existence et unicité de la réflexion échangeant deux vecteurs distincts de même norme.

• Définition des matrices orthogonales et du groupe $O(n)$. Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes (${}^tMM = I_n$ ou $M^tM = I_n$.).
Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par sa matrice dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale.

• Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal, d'une réflexion. Définition du groupe spécial orthogonal SO(E) (rotations), du groupe $SO(n)$. Caractérisation d'une rotation par l'image d'une base orthonormale directe.

• Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n, déterminant de n vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\mathrm{Det}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ou $[x_1, x_2, ..., x_n]$. Interprétation géométrique de $|\mathrm{Det}(a, b)|$ et de $|\mathrm{Det}(a, b, c)|$ en termes d'aire et de volume.

Dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, produit vectoriel ; notations $u \wedge v$ ou $u \times v$, expression dans une base orthonormale directe.

d) Automorphismes orthogonaux du plan

• Dans un plan euclidien orienté, tout automorphisme orthogonal est soit une réflexion, soit le produit de deux réflexions. SO(E) est commutatif.
Décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

• Dans un plan euclidien orienté, mesure θ (définie modulo 2π) de l'angle orienté de deux vecteurs non nuls a et b. Relations $(a|b) = \|a\| \, \|b\| \cos\theta$, $\mathrm{Det}(a,b) = \|a\| \, \|b\| \sin\theta$.

Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation, mesure de son angle ; matrice de rotation $R(\theta)$ associée à un nombre réel θ. Morphisme de $\mathbf{R}$ sur $SO(2)$.

Si u est la rotation d'angle de mesure θ, alors pour tout vecteur unitaire a, $\cos\theta = (a|u(a))$, $\sin\theta = \mathrm{Det}(a, u(a))$.

e) Automorphismes orthogonaux de l'espace.

• Dans un espace euclidien de dimension 3, tout automorphisme orthogonal est le produit d'au plus trois réflexions. Décomposition d'une rotation en produit de deux réflexions.

• Dans un espace euclidien de dimension 3, mesure θ (où $0 \leq \theta \leq \pi$) de l'angle de deux vecteurs a et b non nuls. Relations $(a|b) = \|a\| \, \|b\| \cos\theta$, $\| a \wedge b \| = \|a\| \, \|b\| \sin\theta$.

• Axe et mesure de l'angle d'une rotation. u désignant une rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire a et d'angle de mesure θ, l'image d'un vecteur x orthogonal à l'axe est donnée par : $u(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)\, a \wedge x$.

Détermination de l'axe et de la mesure de l'angle d'une rotation, ainsi que l'image d'un vecteur quelconque et sa matrice dans une base orthonormale directe.

Dans le titre « Géométrie euclidienne du plan et de l'espace », on retrouve également cinq paragraphes, dont le contenu reprend celui enseigné encore récemment en classe de Terminale C et même Terminale S.

a) Distances, angles

• Repères orthonormaux.

• Sous-espaces affines orthogonaux du plan et de l'espace ; projections orthogonales. Calcul de projections orthogonales dans un repère orthonormal.

• Distance d'un point à une droite du plan, à une droite ou à un plan de l'espace. Calcul dans un repère orthonormal.

• Dans le plan euclidien orienté, mesure de l'angle orienté de deux demi-droites. dans l'espace euclidien de dimension 3, mesure de l'angle de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan. Calcul de ces mesures dans un repère orthonormal.

• Étude des lignes de niveau de $M \mapsto \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM}$, où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire. Équation normale d'une droite dans le plan, d'un plan dans l'espace.

b) Isométries du plan et de l'espace

• Définition (transformation affine conservant les distances). Définition d'un déplacement. Translations, rotations, réflexions. Étude du produit de deux réflexions (plan et espace). Les isométries, les déplacements constituent des sous-groupes du groupe affine.

• Existence et unicité de la réflexion échangeant deux points A et B distincts (du plan ou de l'espace). Calcul de l'image d'un point M par cette réflexion.

• Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.

• Tout déplacement de l'espace est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.

c) Similitudes directes du plan

• Définition (transformation affine multipliant les distances dans un rapport donné); rapport de similitude. Définition d'une similitude directe. Homothéties de rapport non nul, translations, rotations. Les similitudes, les similitudes directes constituent des sous-groupes du groupe affine du plan.

• Écriture complexe d'une similitude directe. centre et mesure de l'angle d'une similitude directe distincte d'une translation.

• Existence et unicité de la similitude directe transformant A en A' et B en B', les segments AB et A'B' étant donnés, et de longueur non nulle. Détermination du rapport, de la mesure de l'angle et du centre de cette similitude.

d) Cercles et sphères

Dans le plan, intersection d'un cercle et d'une droite.

Dans l'espace, intersection d'une sphère et d'un plan.

Équations cartésiennes d'un cercle, d'une sphère. Caractérisation d'un cercle, d'une sphère par l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, où AB est un diamètre.

e) Coniques

• Dans le plan, lignes de niveau de $\frac{MF}{MH}$; définition par excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole. Effet d'une similitude sur une conique. Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole.

Équations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.

• Définition d'une conique par une équation cartésienne, dans un repère orthonormal, de la forme $\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\chi x + 2\delta y + \varepsilon = 0$. Hyperboles définies par une relation $xy = \lambda$.

Équation réduite.

Image d'un cercle par une affinité orthogonale. Projection orthogonale d'un cercle sur un plan.

Les travaux pratiques relatifs à ce titre III sont les suivants, les trois premiers faisant appel aux logiciels de calcul symbolique et formel :

– Exemples de construction et d'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux, de changement de base orthonormale ;

– En dimension 2 et 3, exemples d'emploi du produit scalaire, du produit vectoriel et du produit mixte pour l'étude de configurations du plan et de l'espace (calcul de projections orthogonales, de distances, de mesures d'angles, d'aires, de volumes ...) ;

– En dimension 2 et 3, exemples de recherche de lignes de niveau, définies notamment par des conditions portant sur des distances et des mesures d'angles, notamment dans le plan, lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, de $\sum \alpha_i MA_i{}^2$, de $\frac{MA}{MB}$ et de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

– Exemples de recherche des isométries laissant invariante une configuration du plan, de recherche des déplacements et des réflexions laissant invariante une configuration de l'espace.

– Exemples de recherche et d'emploi de déplacements et de similitudes directes pour l'étude de configurations planes.

Les programmes de deuxième année (section MPSI)

Nous ne ferons qu'en citer les titres et sous-titres dans lesquels les vecteurs sont fortement sollicités.

En **algèbre et géométrie** :

II – Algèbre linéaire et géométrie affine

1 – Espaces vectoriels, applications linéaires

a) Bases, sommes directes

b) Image et noyau d'une application linéaire

c) Dualité en dimension finie

d) (à compléter)

e) Trace d'un endomorphisme

f) Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

2 – Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

a) Formes bilinéaires symétriques

b) Réduction d'une forme quadratique (les espaces vectoriels sont de dimension finie ; méthode de Gauss de décomposition en carrés, signature).

III – Réduction des endomorphismes

1 – Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

a) Sous-espaces stables

b) Polynômes d'un endomorphisme (théorème de décomposition des noyaux)

2 – Réduction d'un endomorphisme

a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

b) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

c) Polynôme caractéristique (théorème de Cayley-Hamilton)

d) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

IV – Espaces euclidiens, géométrie euclidienne, espaces hermitiens

1 – Espaces préhilbertiens réels

a) Produit scalaire

b) Orthogonalité

2 – Espaces euclidiens

a) Bases orthonormales

b) Projections orthogonales

(expression de la projection orthogonale $p_F(x)$ du vecteur x sur le sous-espace F, lorsque F est muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$:

$p_F(x) = \sum_{j=1}^{j=n} (e_j | x) e_j$; relation $\|x\|^2 = \| p_F(x) \|^2 + d(x, F)^2$;

inégalité de Bessel.

c) Adjoint u^* d'un endomorphisme u

(noyau, image, rang de l'adjoint, sa matrice dans une base orthonormale, sa trace, son déterminant en fonction de ceux de u ;
endomorphisme autoadjoint ou symétrique ; caractérisation des projecteurs orthogonaux par $p^2 = p$ et $p = p^*$;
a et b désignant des vecteurs unitaires orthogonaux distincts, l'unique réflexion $s_{a,b}$ qui les échange est définie par $s_{a,b}(x) = x - 2(e|x)e$, où e est le vecteur unitaire associé à $b - a$.

d) Réduction des endomorphismes autoadjoints
(diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale).

3 - Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

Les travaux pratiques reprennent ceux déjà vus en première année sur la construction et l'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux, le calcul et l'emploi de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, de la distance à un tel sous-espace, en exploitant les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions. S'y ajoutent des exemples de réduction d'endomorphismes et de matrices en base orthonormale. Deux T.P. font l'objet de techniques classiques et bien délimitées :
– Recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormal ; exemples d'une telle recherche pour une quadrique.
– Description des quadriques usuelles définies par une équation cartésienne dans un repère orthonormal : ellipsoïdes, hyperboloïdes (à une nappe et à deux nappes), paraboloïdes (elliptiques et hyperboliques), cônes, cylindres (elliptiques, hyperboliques et paraboliques). Génération d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et d'un paraboloïde hyperbolique par une famille de droites.

En **analyse et géométrie différentielle**, le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels normés (réels ou complexes). La dérivation, l'intégration et l'étude des équations différentielles concernent des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles (dans un espace vectoriel de dimension finie sur **R** ou sur **C**) ; elles débouchent sur l'étude des courbes d'un espace vectoriel normé de dimension finie. L'étude des fonctions de plusieurs variables est l'occasion d'introduire aux côtés de la dérivée selon un vecteur et des dérivées partielles la notion de différentielle en un point ; elle débouche sur des notions relatives aux courbes et surfaces (définies par un paramétrage ou par une équation cartésienne). Enfin, quelques notions concernant les intégrales doubles et curvilignes (comportant une étude élémentaire des formes différentielles de degré 1) figurent au programme, sans qu'aucune difficulté théorique ne soit soulevée.

B – Analyse de l'évolution des programmes en France, de 1900 à nos jours.

1 – Les secteurs d'intervention des vecteurs

Nous allons rendre plus visible l'évolution évoquée dans l'étude qui précède au moyen d'une présentation en tableau. Dans chacune des cases du tableau figurent les secteurs d'intervention des vecteurs pour chacun des programmes successifs et pour chacun des niveaux « Classes préparatoires », « Lycée » et « Collège », accompagnés de l'indication de la (ou des classes) concernée(s). La première occurence d'une notion dans les programmes de chacun des niveaux apparaîtra en caractère italique.

	Programmes de 1902	Programmes de 1905	Programmes de 1925
Classes préparatoires		• Analyse, algèbre, géométrie analytique (*produit scalaire*) (programme du 10/01/1905) • Trigonométrie (programme du 30/12/ 1913) • Mécanique	• Géométrie analytique (Produit scalaire, *produit vectoriel*, trigonométrie sphérique) • Mécanique (Cinématique, dynamique et statique)
Lycée	• Mécanique *(1ère C et D)*	• Cinématique, dynamique et statique (vecteurs pour représenter une vitesse, une accélération, une force) • Géométrie (projection, moment par rapport à un point, un axe ; *somme géométrique d'un système de vecteurs*) *Classe de mathématiques A et B*	• Trigonométrie (Théorie des projections. Somme géométrique de vecteurs. Formule d'addition pour le cosinus, le sinus et la tangente) • Cinématique (*vecteur vitesse, vecteur accélération* dans un mouvement circulaire) • Statique (centre de gravité comme centre des forces parallèles) *Classe de mathématiques*
Collège			

	Programmes de 1938	Programmes de 1941	Programmes de 1945
Classes prépa-ratoires	Pas de modification	• Géométrie (somme, coordonnées, produit scalaire et applications au triangle, *barycentres*, produit vectoriel, *produit mixte*) • Géométrie analytique (équations de droite, de plans, questions de distances et d'angles, de parallélisme et d'orthogonalité, étude du cercle) • Cinématique plane (vecteur vitesse, hodographe et vecteur accélération)	• Vecteurs (*notions affines* : *équipollence*, opérations, repères, conditions de parallélisme, barycentres. *Notions métriques* : les trois produits). • Algèbre linéaire (systèmes linéaires à 2 ou 3 inconnues, *calcul matriciel, espaces vectoriels de dimension n, base, sous-espace*, déterminant d'une matrice carrée, rang d'une matrice). • Géométrie analytique • Géométrie différentielle (*analyse vectorielle*, formule de Taylor) • Cinématique
Lycée	Pas de modification	• Géométrie (*vecteurs de supports parallèles*, mesures algébriques, abscisses, formule de Chasles) *(Classes de 2nde, de 1e)* • Trigonométrie (somme géométrique, formules d'addition) *(Classe de 1e et de philo-sciences)* • Mécanique (classes de terminale) • Géométrie (rapport de vecteurs de supports parallèles, somme et *différence*, projection orthogonale d'un vecteur, *coordonnées*) *(Classe de mathématiques)*	• Algèbre (rapport algébrique de deux vecteurs parallèles, point divisant un segment dans un rapport algébrique donné) (Classe de 2nde) • Trigonométrie (somme géométrique, formules d'addition) • Géométrie (figures de l'espace) : *Vecteurs équipollents*, translations, rapport de deux vecteurs parallèles, *homothétie*. *(Classe de 1e)* • Géométrie Éléments orientés (*Équipollence*, rapport de deux vecteurs parallèles, somme et différence, repérage et projections dans le plan et dans l'espace, *orientation du plan et de l'espace*, *angles de vecteurs, de droites*, *transformations* du plan et de l'espace). • Cinématique *(Classe de mathématiques)*
Collège	• Arithmétique et algèbre (*vecteurs* et droites orientées, *somme géométrique de vecteurs de même direction*, projection, *produit d'un vecteur par un nombre algébrique*) *(Classe de 5e)* • Géométrie (projections) *(Classe de 4e)*	• Algèbre (mesure algébrique d'un vecteur sur un axe) *(Classe de 3e)* • Aucune occurence en Géométrie.	• Algèbre (mesure algébrique d'un vecteur sur une droite graduée, formule de Chasles, repérage d'un point sur un axe) *(Classe de 4e)* • Aucune occurence en Géométrie.

<table>
<tr><th></th><th>Programmes de 1960</th><th>Programmes de 1968-1971</th></tr>
<tr><td>Classes prépa-ratoires</td><td>• Algèbre linéaire
(Espaces vectoriels sur un corps commutatif, calcul matriciel, systèmes d'équations linéaires,déterminants)
• Fonctions de plusieurs variables (analyse vectorielle : gradient, circulation, divergence, rotationnel)
• Géométrie et géométrie analytique
(Vecteurs liés, équipollence, vecteur libre ; notions affines et projectives ; notions métriques ; modes analytiques de représentation des courbes planes ; vecteurs glissants)
• Cinématique
(Classe de mathématiques supérieures)
• Algèbre linéaire (en plus, notions de valeurs et vecteurs propres).
• Espaces euclidiens de dimension finie en A, des espaces hermitiens en A')
• Géométrie et géométrie analytique (espaces affines en A')
• Géométrie différentielle (dichotomie affine/métrique)
• Cinématique (Classe de mathématiques spéciales)</td><td>• Structures fondamentales (espaces vectoriels)
• Algèbre linéaire et multilinéaire
• Espaces vectoriels euclidiens
• Géométrie affine et géométrie (affine) euclidienne.
• Éléments de topologie : espaces normés
• Géométrie différentielle et cinématique
(Classe de mathématiques supérieures)
• Algèbre linéaire et multilinéaire
• Espaces vectoriels euclidiens et hermitiens
• Géométrie affine et géométrie affine euclidienne.
• Fonctions vectorielles d'une variable réelle, fonctions de R^n dans R^p, différentielle.
• Géométrie différentielle et cinématique
• Compléments de calcul différentiel et intégral (analyse vectorielle)
(Classe de mathématiques spéciales)</td></tr>
<tr><td>Lycée</td><td>• Éléments orientés-Vecteurs
(sur une droite ; dans le plan : équipollence, addition, opposé, soustraction, projections ; multiplication d'un vecteur par un nombre ; translation et homothétie définies vectoriellement).
(Classe de Seconde)
• Application des vecteurs à la géométrie
(coordonnées dans une base, condition de parallélisme d'un vecteur à une direction de droite, de plan ; correspondance bijective point-vecteur ; représentation paramétrique d'une droite, d'un plan ; barycentre de deux points ; multiplication scalaire de deux vecteurs)
• Géométrie analytique plane
(en repère affine (c'est-à-dire "oblique" ; en repère orthonormé)
• Éléments de géométrie analytique dans l'espace
(même dichotomie)
• Cinématique
(vecteur vitesse, hodographe, vecteur accélération ; mouvement rectiligne, circulaire uniforme, vibratoire simple).
(Classe de Première C)
• Notions générales
(loi interne, loi externe, structure d'espace vectoriel sur R)
• Géométrie plane
(angle orienté d'un couple de vecteurs ; transformations)
• Géométrie dans l'espace
(transformation de $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ en géométrie affine, et de la somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ en géométrie métrique dans les deux cas $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$; transformations de l'espace)
• Fonctions vectorielles d'une variable réelle (dérivation, dérivées et opérations, y compris le produit scalaire)
• Cinématique
(Classe de Terminale C)</td><td>• Géométrie et espaces vectoriels sur R
(plan vectoriel, coordonnées de vecteurs, interprétation des systèmes linéaires (2 inconnues, 2 équations) ; en section C : applications linéaires et affines d'un plan vectoriel dans lui-même, représentation paramétrique d'une droite en géométrie affine)
• Géométrie métrique plane
(produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire, transformation de $MA^2 \pm MB^2$).
(Classes de 2nde)
• Géométrie vectorielle et géométrie affine
(géométrie vectorielle : sous-espace vectoriel, base, dimension, projection vectorielle, matrice 2x2 d'une application linéaire. Géométrie affine : espace affine de dimension 2 ou 3, translations, droites et plans, parallélisme, intersection, représentations paramétriques et équations cartésiennes)
• Produit scalaire et fonctions circulaires
(forme bilinéaire symétrique définie positive, isométries vectorielles du plan, rotations vectorielles, trigonométrie)
• Géométrie métrique (plan et espace)
(Classe de 1e C)
• Géométrie vectorielle : e.v. et ap. linéaires.
• Géométrie affine : esp. affines et ap. affines.
• Géométrie vectorielle euclidienne : espaces vectoriels euclidiens et transformations orthogonales (isométries vectorielles)
• Géométrie affine euclidienne : espaces affines euclidiens.
• Compléments de géométrie euclidienne plane
• Fonctions vectorielles et cinématique
(classe de terminale C)</td></tr>
<tr><td>Collège</td><td>• Algèbre
(Disparition du mot "vecteur" au profit de "segment orienté")
(Classe de 4e)
• Géométrie plane
(rapports de deux segments orientés portés par une même droite).
• Géométrie dans l'espace
(vecteurs équipollents, opposés, somme de deux vecteurs).
(Classe de 3e)</td><td>• Géométrie plane
(Équipollence de bipoints, vecteurs et translations, addition des vecteurs et composition des translations, multiplication d'un vecteur par un nombre, écriture unique de tout vecteur en combinaison linéaire de deux vecteurs de directions distinctes, coordonnées, exercices de calcul vectoriel : médianes d'un triangle) (Classe de 4e)
• Géométrie plane (plan euclidien : orthogonalité, norme). (Classe de 3e)</td></tr>
</table>

	Programmes de 1977-1982	Modifications de programmes de 1985-1988
Classes prépa-ratoires	(non étudié)	• Algèbre linéaire et multilinéaire (introduction des espaces vectoriels, e.v. de dim. finie, matrices, déterminants) • Espaces vectoriels euclidiens • Géométrie affine du plan et de l'espace • Géométrie euclidienne du plan et de l'espace orientés • Courbes paramétrées *(Classe de mathématiques supérieures)* Algèbre • Algèbre linéaire et multilinéaire • Espaces vectoriels euclidiens (et hermitiens) (réduction des endomorphismes symétriques) Géométrie • Courbes et surfaces définies par un paramétrage ou par équations cartésiennes Analyse • Espaces vectoriels normés de dim. finie ; espaces préhilbertiens réels ou complexes *(Classe de mathématiques spéciales)*
Lycée	• Géométrie plane (Homothétie, formules analytiques ; barycentre de deux à quatre points pondérés ; représentations paramétriques et équations d'une droite dans un repère). • Produit scalaire dans le plan *(Classe de Seconde)* • Géométrie plane (Colinéarité de deux vecteurs, bases, repères ; application linéaire associée à une isométrie admettant un point fixe ; orientation du plan ; applications du produit scalaire) • Géométrie dans l'espace (Vecteurs : extension des opérations ; droite, plan définis par points et vecteurs directeurs ; extension du produit scalaire à l'espace ; projections orthogonales ; bases, repères orthonormaux *orientation de l'espace* ; *produit vectoriel, produit mixte*). *(Classe de Première S ou E)* • *Algèbre linéaire* (Étude de R^n, des applications linéaires de R^n dans R^p ; systèmes linéaires de *n* équations à *p* inconnues ; familles génératrices, familles libres, bases de R^n ; espace vectoriel de dimension *n*) • Géométrie (calcul barycentrique : transformation de $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$ et de la somme $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ dans les deux cas $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$; applications affine de l'ensemble des vecteurs dans lui-même, puis application affine ponctuelle ; leur caractérisation par la conservation du barycentre ; conservation du parallélisme ; isométries comme applications affines conservant le produit scalaire) • Fonctions vectorielles d'une variable réelle (dans $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{C}$, ou $\mathbf{R}^3$) et cinématique (dérivation, dérivées et opérations, y compris des produits scalaire et vectoriel, de la norme d'une fonction) *(Classe de Terminale C)*	• Points et vecteurs, repères du plan (bases, repères, vecteurs colinéaires, alignement et parallélisme ; bijection entre points et vecteurs, une origine étant choisie) • Points et vecteurs, repères de l'espace (extension du calcul vectoriel à l'espace, vecteurs directeurs d'un plan, vecteurs coplanaires, parallélisme de deux plans, d'une droite et d'un plan). • Orthogonalité, produit scalaire dans l'espace (orthogonalité de droites et de plans, projection orthogonale sur un plan, projection d'un angle droit) *(Classe de 1e S ou E)* • Systèmes d'équations linéaires. (méthode de Gauss) • Géométrie – barycentres, transformation d'une somme $\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ caractérisation vectorielle ($\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$) d'un segment, d'une demi-droite, d'une droite ; d'un plan ; équation du plan dans un repère orthonormal ; projection ponctuelle, projection vectorielle associée ; dans l'espace orienté, bases et repères directs, indirects; produit vectoriel, notations $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$; expression analytique dans une base orthonormale directe ; dans le plan orienté, déterminant de deux vecteurs, notation $\det(\vec{u}, \vec{v})$.). – Courbes planes paramétrées. – Transformations vectorielles assosiées aux isométries et similitudes directes planes. *(classe de terminale C)*
Collège	• Géométrie plane (Translation ; composition des translations. Vecteur ; addition des vecteurs) *(Classe de 4e)* • Géométrie (propriété de Thalès, multiplication d'un vecteur par un réel, équation d'une droite, rapport de projection orthogonale, orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé, distance de deux points donnés dans un tel repère). *(Classe de 3e)*	

	Programmes de 1985-1991	Révisions de programmes de 1994-1998
Classes prépa-ratoires	Pas de changements.	• **Algèbre linéaire et géométrie affine** (Espaces vectoriels de dim. finie, calcul matriciel, géométrie affine réelle - translations et sous-espaces affines, applications affines, repères cartésiens, barycentres -, déterminants) • **Espaces vectoriels euclidiens et géométrie euclidienne** (Produit scalaire ; espaces euclidiens ; automorphismes orthogonaux : leur étude dans le plan, dans l'espace) • **Géométrie euclidienne du plan et de l'espace** (distances, angles ; isom. du plan, de l'espace ; simil. directes du plan ; cercles et sphères ; coniques, lignes de niveau de la f. scalaire de Leibniz) • **Analyse** (Fonctions de deux variables réelles ; différents modes de définition des courbes) *(Classe de 1ère année, section MPSI)* • **Algèbre linéaire et géométrie affine** • **Réduction des endomorphismes** • **Espaces euclidiens, géométrie euclidienne, espaces hermitiens** (projections orthogonales, adjoint d'un endomorphisme, caractérisation des projecteurs orthogonaux, ...) • **Analyse et géométrie différentielle** (Espaces vectoriels normés ; introduction de la différentielle pour les fonctions de plusieurs variables) *(Classe de 2e année, section MPSI))*
Lycée	• **Calcul vectoriel** a) Représentation géométrique d'un vecteur $\vec{u}$; addition des vecteurs ; multiplication d'un vecteur par un nombre, représentation géométrique de $\lambda\ \vec{u}$. Vecteurs colinéaires. Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, du centre de gravité d'un triangle ; configuration de Thalès ; homothétie définie vectoriellement. b) Bases, repères ; condition de colinéarité de deux vecteurs ; équation cartésienne d'une droite. c) Orthogonalité ; dans un repère orthonormal, condition d' orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites. *(Classe de 2nde)* • **Calcul vectoriel et configurations** (Barycentre de deux points pondérés ; produit scalaire : quatre expressions, propriétés ; expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$; vecteur normal à une droite ; extension du calcul vectoriel à l'espace : vecteurs colinéaires, coplanaires ; bases, repères ; extension du barycentre ; norme, vecteurs orthogonaux, condition d'orthogonalité, distances dans un repère.) *(Classe de Première S ou E)* • **Systèmes d'équations linéaires** (méthode de Gauss). • **Géométrie** – barycentres; caract. vectorielle d'un segment, ..., d'une droite ; d'un plan ; équation du plan dans un repère orthon. ; projection ponctuelle, proj. vectorielle associée ; dans l'espace orienté, bases et repères directs, indirects; produit scalaire dans l'espace ; produit vectoriel, expression analytique dans une base orthonormale directe ; dans le plan orienté, déterminant de deux vecteurs, notation det($\vec{u}$, $\vec{v}$)– Courbes planes paramétrées. – Transform. vect. assosiées aux isométries planes. - Notions sur les transform. élém. de l'espace. *(classe de terminale C)*	• **Algèbre et géométrie** : systèmes d'équations linéaires. (Méthode de Gauss) • **Calcul vectoriel et géométrie** (barycentres ; caract. vectorielle d'un segment, ..., d'une droite ; produit scalaire dans l'espace ; projection orthogonale sur une droite, un plan ; équation du plan dans un repère orthonormal dans l'espace orienté, bases et repères directs, indirects; produit vectoriel, expression analytique dans une base orthon. directe ; Enseignement de spécialité : notions sur les courbes paramétrées; isométries et similitudes directes, les transformations vectorielles associées ne sont plus au programme. *(Classe de Terminale S – 1994)* Légères modifications en Terminale S, en 1997 : • L'étude des courbes paramétrées fait l'objet d'un T.P. • Disparition de la méthode de Gauss dans les systèmes d'équations linéaires. • Disparition de l'étude de la fonction scalaire de Leibniz. L'enseignement de spécialité porte sur les isométries et similitudes directes fixant un point O, les dépacements et antidéplacements étudiés à l'aide de leur décompostion en produit de symétries axiales, ou avec les nombres complexes.*(classe de terminale S – 1997)*
Collège	• **Géométrie plane** ("Travaux géométriques") (Transformation de figures par translation ; translation et vecteur) *(Classe de 4e)* • **Géométrie plane** (Translation et vecteur. Égalité vectorielle. Dans un plan rapporté à un repère, effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Addition vectorielle, reliée à la composition des translations : relation de Chasles, règle du parallélogramme). *(Classe de 3e)*	• **Vecteurs et translations** (écriture vectorielle, égalité vectorielle et parallélogramme, caractérisation à l'aide des milieux, notation $\vec{u}$; coordonnées d'un vecteur ; composition de deux translations, somme de deux vecteurs - relation de Chasles et construction à l'aide du parallélogramme, coordonnées d'une somme ; vecteur nul ; composition de deux symétries centrales) *(Classe de 3e)*

Ces tableaux font apparaître un parallélisme entre l'évolution du savoir universitaire et celle des savoirs à enseigner. Alors que, sur le thème des vecteurs, les premiers sont encore l'objet de vives discussions dans les années 1890-1900 – ce qui n'est guère étonnant, car les premiers travaux les concernant datent de 1844 – le début du vingtième siècle voit leurs premières interventions dans les programmes d'enseignement. D'abord dans des secteurs pour lesquels les vecteurs ont trouvé des applications déjà très élaborées : la mécanique, et en particulier la statique[1], ainsi que la cinématique et la dynamique. Mais également, très rapidement, comme outil pour la géométrie analytique, ou pour la trigonométrie : ils permettent en effet d'établir d'une manière beaucoup plus simple les formules d'addition : sans eux, les démonstrations exigent l'étude de nombreux cas, ainsi qu'une grande virtuosité.

Afin que les aspects géométriques des vecteurs ne phagocytent pas les aspects purement mécaniques des questions étudiées, les vecteurs font leur apparition dans le programme de géométrie, et ceci dès 1905. Mais ces programmes vont se révéler trop ambitieux, et jusqu'aux années 1940 les vecteurs se trouvent cantonnés aux secteurs que nous venons d'évoquer, la géométrie (autre qu'analytique) étant peu touchée. On notera cependant une brève utilisation des vecteurs dans les classes de Cinquième où ils sont utilisés à des fins didactiques autres qu'eux-mêmes : ils sont convoqués pour enseigner les opérations sur les nombres relatifs (addition et multiplication)[2].

Les programmes de 1941 modifient cette situation, mais uniquement à partir de la classe de mathématiques. Ceux de 1945 signent la véritable introduction des vecteurs pour l'étude de la géométrie au lycée, en même temps qu'ils introduisent dans les classes préparatoires l'algèbre linéaire, des éléments d'analyse vectorielle ainsi que la dichotomie affine/métrique. Ceux de 1960, qui préfigurent les programmes de la période dite « des mathématiques modernes », renforcent la position des vecteurs par l'introduction au lycée du produit scalaire et du barycentre ; de plus, en seconde, le rapport de vecteurs à supports parallèles est remplacé par la multiplication d'un vecteur par un nombre, et la notion d'espace vectoriel sur **R** est introduite en classe de terminale C. La cinématique se trouve subordonnée à l'étude des fonctions vectorielles d'une variable réelle. Les programmes de collège sont également concernés : les vecteurs sont présents aussi bien en géométrie plane (rapport de segments orientés sur une droite) mais aussi, d'une manière plus originale, en géométrie dans l'espace (équipollence, somme, opposé). En classes préparatoires, la dichotomie affine/métrique est toujours présente

---

[1]On pourra se faire une idée précise de ce degré d'élaboration en consultant dans l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, et pour ce qui concerne la mécanique sous la direction scientifique de Paul Appell, deuxième volume, Tome IV, Mécanique générale, (réédition J. Gabay, 1991), le paragraphe IV 4 concernant les « Fondements géométriques de la Statique ».

[2]Voir « La théorie des nombres positifs et négatifs dans l'enseignement du second degré » par A. Chatellet, (Librairie de l'enseignement technique Léon Eyrolles, Paris, 1929) où l'on trouve une analyse didactique intéressante – et qui reste d'actualité – de cette question.

(accompagnée par l'introduction du point de vue projectif) : elle est poussée, en Spéciale A', jusqu'à l'introduction de la définition d'un espace affine telle que Hermann Weyl l'a donnée 44 ans plus tôt. Cette dichotomie justifie l'introduction des espaces vectoriels euclidiens. Les espaces hermitiens sont introduits en A'.

Les programmes de 1968-1971 constituent le point culminant des interventions vectorielles dans les programmes, notamment du point de vue technologico-théorique. Subissant une influence dépassant largement le cadre des mathématiques, ils font une large place aux « structures », qui permettent de réorganiser les savoirs en donnant une large place à l'algèbre. Sans rompre avec les programmes précédents, la dichotomie affine/métrique voit son effet débuter dès le collège : l'affine est étudié en classe de 4ème, le métrique étant réservé pour la 3ème ; les vecteurs, définis comme classes de bipoints équipollents, y ont une place privilégiée dès la classe de 4ème. L'influence de l'ouvrage de Choquet « L'enseignement de la géométrie » sur les rédacteurs des commentaires est manifeste. Au lycée, cette dichotomie trouve ses racines dans une autre, qui concerne précisément les vecteurs, objets dont la signification est renouvelée et étendue et qui se retrouvent à la base de l'édifice théorique : on y distingue la géométrie (ou la structure) vectorielle de la géométrie (ou structure) vectorielle euclidienne, le produit scalaire étant introduit à l'aide d'une forme bilinéaire définie positive dès la classe de Première. Dans les programmes de classes préparatoires, le même mouvement se poursuit, avec l'introduction des espaces affines dès la première année, et celle des espaces vectoriels euclidiens et hermitiens. Compte tenu du nombre et de la nouveauté des objets introduits par ces programmes, il était naturel que les instructions les concernant évoquent ces objets, du point de vue de leurs organisations technico-technologiques possibles. On a évoqué précédemment les dysfonctionnements qui ont été générés par une reprise quasi-intégrale de ces commentaires dans des textes d'enseignement destinés aux élèves, surtout en ce qui concerne le niveau du collège. Il convient également de signaler l'importance très grande des techniques analytiques dans les tâches données aux élèves de lycée. Les sujets de baccalauréat de l'époque en témoignent : les types d'exercices les plus fréquents concernent des applications linéaires ou affines, des isométries vectorielles (ou affines), qu'il convient de définir analytiquement dans une base ou un repère, ou qu'il convient de reconnaître ou d'étudier à partir d'une telle définition analytique (éventuellement donnée à l'aide des nombres complexes) ; sont alors mises en jeu des équations cartésiennes de droites ou de plans (vectoriels ou affines), ainsi que des représentations paramétriques. Les programmes suivants vont tenter de limiter cette influence dominante que la géométrie analytique a alors acquise, sans qu'une vision géométrique des questions étudiées soit toujours cultivée et valorisée.

Les programmes des années 1977/1982 pour les niveaux collège-lycée et des années 85/88 pour les niveaux lycée-classes préparatoires voient alors s'amorcer un mouvement, qui dure encore aujourd'hui, de réduction du nombre d'objets mis à l'étude, de réduction de l'appareil technologico-théorique, dans le but d'assurer une solidité plus grande des connaissances sur des points essentiels, et de s'adresser à un public d'élèves plus nombreux. Ainsi, au collège et au lycée, la géométrie « met l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves »[1], sur le développement d'une « certaine maîtrise du plan et de l'espace physique »[2]. Le plan et l'espace sont d'emblée affines euclidiens, sans que leur nature soit explicitée, comme dans les programmes des années 60 : la dichotomie affine/métrique disparaît, comme vont le faire progressivement les espaces vectoriels. Mais il ne s'agit pas d'un simple retour à la situation antérieure. Pour ces programmes encore, l'influence de l'ouvrage de Choquet « L'enseignement de la géométrie » est grande, mais cette fois-ci, on s'inspire de sa deuxième axiomatique, faisant intervenir plus tôt les aspects métriques. Mis à part le fait que les vecteurs considérés ne sont que ceux « du plan ou de l'espace », leur rôle dans l'organisation des programmes demeure fondamental : un élève sort du collège en ayant vu les vecteurs, leur addition, la multiplication par un réel, l'énoncé vectoriel de Thalès, l'orthogonalité dans le plan ; de la classe de seconde en ayant rencontré l'homothétie, les barycentres, le produit scalaire ; de la première en ayant étendu le calcul vectoriel à l'espace, produit scalaire compris ; de terminale C, en ayant fréquenté les fonctions vectorielle et scalaire de Leibniz, le produit vectoriel et ayant eu son attention attirée sur la distinction entre une application affine et son application linéaire associée, en particulier dans l'étude des isométries et similitudes directes. Cependant, en terminale, l'étude des fonctions vectorielles et la cinématique vont disparaître, au profit de celle des courbes planes paramétrées, de même qu'une brève tentative d'introduction de l'algèbre linéaire qui se réduit à l'étude des systèmes linéaires par la méthode de Gauss. La dichotomie affine/métrique n'est rendue visible qu'en classes préparatoires, par l'introduction des espaces vectoriels et affines, la géométrie affine du plan et de l'espace faisant l'objet d'un titre entier du programme.

Les programmes et modifications depuis 1985 jusqu'à nos jours continuent dans le même sens. L'introduction des vecteurs au collège est subordonnée à l'étude de la translation, celle de leur somme à leur composition : l'accent est en effet mis sur les configurations du plan et sur les transformations (et ceci dès la classe de Sixième). La multiplication externe n'est introduite qu'au lycée, ainsi que l'énoncé vectoriel de Thalès et l'homothétie ; le barycentre et le produit scalaire dans le plan n'apparaissent qu'en classe de Première, en même temps que l'extension du calcul vectoriel à l'espace ; le produit scalaire dans l'espace, l'orientation de l'espace et le produit vectoriel sont les éléments nouveaux en terminale, où l'étude des courbes paramétrées et celles des isométries et similitudes directes n'apparaissent que dans l'enseignement de spécialité, sans aucune allusion aux transformations vectorielles associées, mais avec une utilisation

---

[1] Commentaire des programmes de quatrième et de troisième de 1978.
[2] Extrait des objectifs du titre « Géométrie » du programme de Première S de 1985.

importante des nombres complexes. L'étude des courbes paramétrées fait l'objet d'un T.P., unique occasion de rencontre avec certaines coniques, dont l'étude ne figure plus au programme. L'algèbre linéaire n'apparaît qu'en classes préparatoires – la brève allusion à la méthode de Gauss disparaissant du programme de terminale – accompagnée de l'introduction de la géométrie affine, des espaces vectoriels euclidiens, la géométrie euclidienne du plan et de l'espace faisant encore l'objet d'un titre entier du programme de première année (comprenant l'étude des coniques). Les espaces vectoriels normés sont le cadre de référence pour l'étude de nombreuses questions d'analyse en deuxième année, en particulier en calcul différentiel.

Mais ce mouvement décroissant dans l'évolution de la composante technologico-théorique, amorcé à partir des années 77, s'accompagne d'un autre souci des rédacteurs du programme, directement lié à la question de l'évaluation des compétences des élèves : celui de mieux éclairer les composantes « types de problèmes », et « techniques » des questions mises à l'étude. Cela se traduit par la brève apparition d'une rubrique intitulée « Thèmes (à titre indicatif) » , qui va laisser la place à la rubrique « Travaux pratiques » .

Dans le paragraphe suivant, à titre de transition vers notre quatrième partie, nous allons étudier la place dans les programmes successifs d'un type de problèmes et d'une technique relative à un autre type de problèmes :
– celui qui nous préoccupe tout au long de notre recherche, et qui est devenu « classique » : les problèmes d'alignement (nous ne nous intéresserons qu'aux techniques de résolution mettant en œuvre des vecteurs) ;
– une technique, dont la présence est beaucoup plus discrète : il s'agit de l'emploi d'une transformation vectorielle (essentiellement une isométrie vectorielle ou une similitude vectorielle) pour l'étude d'une configuration du plan (par exemple, celle dite « des triangles de Napoléon » ou celle de Van Aubel (les centres des carrés construits sur les côtés d'un quadrilatère ABCD forment un quadrilatère EFGH dont les diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires) .

2 – Étude de la place d'un type de problèmes, et d'une technique dans les programmes successifs du collège et du lycée

21 - Le traitement vectoriel des problèmes d'alignement

211 – Étude de sa place dans les programmes

Nous n'étudierons que les programmes postérieurs à 1945, date à partir de laquelle les vecteurs interviennent vraiment en géométrie.

a) *Pour les programmes de 1945 à 1960*, nous utiliserons les manuels de la collection Lebossé - Hémery, de la classe de Seconde à la classe de Mathématiques.

L'affichage dans les programmes de ce type de problèmes est inexistant. Pourtant, ce dernier apparaît dans les exercices proposés en fin des chapitres consacrés aux vecteurs, aussi bien en *classe de Seconde* qu'en *classe de Terminale*.

Bien que le barycentre ne figure ni au programme de Seconde de 1960, ni au programme de terminale de 1945, la banque d'exercices figurant dans les éditions correspondantes de manuels à ces deux niveaux y fait largement appel et, de manière plus surprenante puisqu'il s'agit des classes de Seconde et de Terminale, sont très voisines : ainsi trouve-t-on dans les deux cas des exercices devenus classiques concernant :
– le centre de gravité du triangle et sa localisation sur chacune des médianes ;
– le centre de gravité du tétraèdre ;
– le trapèze complet ;
– l'alignement des points O (centre du cercle circonscrit), G (centre de gravité), H (orthocentre) dans un triangle.

Pour chacun de ces exercices, l'énoncé dirige l'étude, et l'élève n'a pas à employer de techniques qui leur soit propre : les outils principaux à utiliser sont la relation de Chasles, et une des caractérisations vectorielles du milieu (ces dernières ne figurant même pas dans le cours de Seconde ; en revanche, la caractérisation utilisant un point O quelconque, $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, apparaît dans celui de Terminale). Cependant, un exercice peut parfois faire appel implicitement à des résultats établis dans ceux qui précèdent.

On trouve, également dans les ouvrages des deux niveaux, un exercice traitant de relations vectorielles mettant en jeu des points alignés A, B, C sur un axe xx', et un point quelconque M (du plan, ou de l'espace). Il s'agit de démontrer :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overline{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overline{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overline{AB} = \vec{0},$$

l'énoncé fournissant une indication : prendre pour origine sur l'axe la projection du point M. L'autre question de l'exercice concerne une relation entre les carrés de $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, (et l'exercice suivant une relation entre leurs cubes) ce qui montre bien que l'exercice vise davantage un entraînement à la manipulation des opérations (somme, produit par un nombre, relation de Chasles) sur les vecteurs et sur les mesures algébriques qu'une étude des points alignés à l'aide des vecteurs. D'ailleurs cet exercice ne fournit qu'une condition nécessaire pour que trois points soient alignés.

Dans le manuel de terminale, la présence d'un cours sur le barycentre génère des exercices plus spécialisés (interprétation des coordonnées barycentriques d'un point du plan en termes d'aires algébriques de triangles ; lieux de points) ; l'un d'entre eux concerne la somme $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$ dans le cas où la somme des coefficients est nulle. Mais le cas où cette somme vectorielle est elle aussi nulle n'est pas étudié.

Le manuel de *première*, compte tenu du programme, n'aborde les questions d'alignement que dans le cadre de la géométrie analytique, cette dernière étant traitée à l'aide des vecteurs.

b) Les changements de *programmes de la fin des années 1960* font intervenir le barycentre dès la *classe de Première C*, ainsi que les représentations paramétriques vectorielles d'une droite et d'un plan. Une étude des banques d'exercices dans les manuels de Première et de Terminale de la collection Lespinard et Pernet[5] permet de dégager les résultats suivants :

– le barycentre demeure la source principale d'exercices ;

– les représentations paramétriques de droites qui figurent dans le cours sont les suivantes :

– droite définie par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{V}$: $\overrightarrow{AM} = \rho \overrightarrow{V}$;

– droite définie par deux points A et B : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\alpha\ \overrightarrow{OA} + \beta\ \overrightarrow{OB}}{\alpha + \beta}$, α et β désignant des paramètres réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$; ou $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \lambda\ \overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$, λ désignant un paramètre réel différent de -1. Ce dernier choix est dicté par le souci de mettre cette représentation paramétrique en rapport avec $\dfrac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$ ou $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, qui vaut alors $-\lambda$, et qui a été étudié auparavant (point divisant un segment dans un rapport algébrique donné). L'utilisation des représentations paramétriques dans les exercices est attachée aux types de problèmes suivants :

– description de droites translatées ou homothétiques d'une droite donnée ;

– questions de parallélisme d'une droite et d'un plan ;

– questions de lieux géométriques.

Aucun exercice n'utilise une représentation paramétrique pour démontrer l'alignement de trois points. Ces représentations paramétriques vectorielles de droites seront reprises en géométrie analytique pour obtenir des représentations paramétriques cartésiennes, qui ne seront pas utilisées dans les exercices de fin de chapitre.

En *classe de Terminale C*, le barycentre devient l'unique thème d'étude : les problèmes d'alignement étudiés sont les mêmes que ceux évoqués précédemment, l'étude étant facilitée par l'introduction du théorème connu actuellement sous le nom de « associativité de la barycentration » ou « théorème du barycentre partiel » . (La gamme d'exercices est enrichie par la présence dans le programme de la transformation de la somme $\alpha\ MA^2 + \beta\ MB^2 + \gamma\ MC^2$ dans les deux cas $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$, thème qui va connaître un succès quasi-constant au fur et à mesure des changements de programmes).

c) Dans les *programmes des années 1968-1971*, les premières démonstrations à l'aide des vecteurs d'alignement et de concours se retrouvent en *classe de Quatrième*, où ils

[5]LESPINARD V., PERNET R., (1966), Géométrie , classe de Première C, et (1967) Géométrie, classe de Terminale C, André Desvigne, Lyon.

font l'objet d'un affichage dans le texte du programme où figurent des exercices de calcul vectoriel, les instructions précisant à ce sujet « Le fait que les trois médianes d'un triangle sont concourantes est un très bon exercice de calcul vectoriel ; des exercices de ce genre sont opportuns, mais la notion de barycentre de trois points d'un plan n'est pas au programme. ». Ce commentaire sous-entend que les techniques à mettre en œuvre sollicite des calculs vectoriels faisant intervenir une somme telle que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, dans le but d'obtenir une caractérisation vectorielle d'un point G, dont on démontre ensuite qu'il appartient à chacune des médianes. Autrement dit, on fait pour $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, les mêmes calculs et manipulations que l'on fera plus tard pour $\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC}$, dans l'étude du barycentre de trois points. On connaît cependant d'autres techniques pour démontrer vectoriellement que les médianes d'un triangle sont concourantes. La rédaction des programmes et des instructions privilégient cette approche sous l'influence du barycentre, et les manuels les respectent, rendant cette approche « naturelle » en commençant par caractériser le milieu d'un segment AB à l'aide de la somme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$, M désignant un point quelconque du plan. (À ce sujet, l'approche est essentiellement algébrique – utilisation de la relation de Chasles et de l'unicité du point P tel que le vecteur $\overrightarrow{OP}$ soit égal à un vecteur donné, et ne fait aucune allusion aux propriétés (pourtant connues) des diagonales d'un parallélogramme. On notera que cet « excellent exercice de calcul vectoriel » est entièrement sous le contrôle et la responsabilité du professeur ; les exercices proposés dans les manuels reprennent cette démarche[6] à propos de sommes telles que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$, ..., et même $2\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$.

En *classe de Seconde*, les éléments technologiques figurant au programme sont essentiellement :

– la définition d'un plan et d'une droite affine en liaison avec leurs homologues vectoriels vus antérieurement ;

– les représentations paramétriques de droites ;

– le traitement analytique des droites affines (représentation paramétrique cartésienne, équation cartésienne) ;

– les applications affines suivantes : homothéties, translations, projections, symétries (définition, caractérisation vectorielle pour les deux premières, image d'une droite). Concernant les représentations paramétriques vectorielles, plusieurs types sont privilégiés, selon les auteurs de manuels : par exemple,

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}$ pour la collection Queysanne Revuz (Nathan);

$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\,\vec{u}$ dans le cours et $\overrightarrow{OM} = (1 - \lambda)\,\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}$ dans un exercice, pour la collection Aleph_1, (Hachette).

[6]Les exemples sont tirés du manuel de la collection Queysanne Revuz, édition Nathan, 1972.

Certains auteurs introduisent le barycentre de deux points dans les cours, d'autres en traitent des exemples dans des applications ou exercices résolus.

Les banques d'exercices montrent, selon les auteurs, une utilisation plus ou moins abondante de sommes de la forme $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$[1] (l'énoncé prenant en charge le guidage pour leur réduction). Les représentations paramétriques vectorielles ne sont guère utilisées ; on note cependant quelques exemples de recherche de lieux géométriques à partir de telles représentations. En revanche, les représentations paramétriques cartésiennes sont davantage utilisées pour des recherches d'intersection de droites, notamment pour la détermination de définitions analytiques de projections et de symétries.

Les problèmes d'alignement sont peu présents, et les moyens de traitement davantage tournés vers les transformations (les composées d'homothéties, le théorème de Ménélaüs se retrouvent dans les rubriques d'exercices, mais ne sont pas réutilisés). C'est dans la même position de « résultat d'exercice qui ne sera réinvesti nulle part » que l'on trouve, dans quelques manuels[2], une condition suffisante d'alignement, utilisant le plan pointé en O :

Si O, A, B et C sont tels que $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, α, β, γ étant des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, alors A, B et C sont alignés[3].

Les mêmes caractéristiques en matière de types de problèmes et de techniques se retrouvent dans les programmes de la *classe de Première C*[4], étendus à la géométrie à trois dimensions. Les problèmes d'alignement apparaissent très peu, et les techniques sollicitées ne font pas intervenir le calcul vectoriel.

En *classe de Terminale C*, le barycentre de *n* points pondérés fait officiellement son entrée dans l'édifice technologico-théorique : il est en général introduit à l'aide de la « fonction vectorielle de Leibniz »[5], fonction qui, dans le cas de trois points pondérés, à un point quelconque M associe la somme $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$. On établit que si la somme des coefficients est nulle cette fonction est constante et que, dans le cas contraire, elle est bijective : le barycentre est alors l'antécédent du vecteur nul. Apparaît ainsi en Terminale le ressort technologique des multiples exercices abordés dans les classes antérieures, ayant pour support de telles fonctions. Dans le cas où la somme des coefficients est nulle, le sous-cas où le vecteur « constant » est lui-même nul apparaît lors de l'étude de la fonction scalaire de Leibniz, qui est alors constante. Mais l'interprétation

---

[1]Quasi-exclusive dans le manuel de la collection Gamma (J.M. Decreton et B. Poret), très importante pour le manuel de la collection Aleph1, le manuel de la collection Queysanne–Revuz (édition 1977) ne proposant sur ce thème qu'un seul exercice, dont le but est de définir, de manière générale le barycentre de trois points pondérés, et de l'appliquer au centre de garvité d'un triangle.

[2]Notamment dans celui de la « série rouge » de la collection Queysanne Revuz, édition 1977.

[3]La condition « α, β, γ non tous nuls » n'est pas explicitée.

[4]L'étude de la banque d'exercices est conduite sur les manuels des mêmes collections.

[5]Dénomination qui paraît curieuse compte tenu des travaux de Leibniz en géométrie (voir partie historique), qui s'explique plutôt par ses travaux en physique sur ce qui demeure connu sous le nom de « fonction scalaire de Leibniz », et par la création à des fins didactiques, d'une fonction qualifiée de « vectorielle » en rapport avec cette dernière, dont elle hérite du nom.

(en terme d'alignement) des points A, B, C tels que $\alpha\ \overrightarrow{MA} + \beta\ \overrightarrow{MB} + \gamma\ \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$ n'est pas un objet de préoccupation. Là encore, les problèmes d'alignement n'ont pas une place importante. Quant aux problèmes de concours, ils apparaissent comme application du barycentre, en particulier du théorème du barycentre partiel.

d) *Les programmes de 1977/1982* s'accompagnent de deux modifications importantes concernant la répartition entre les différents niveaux des objets à enseigner :
– l'introduction de la multiplication d'un vecteur par un nombre est retardée d'un an, et se fait en classe de Troisième (cette situation durera jusqu'en 1990) ;
– celle du barycentre est avancée en classe de Seconde.
D'autre part, avec la rubrique des « thèmes » qui apparaît dans les programmes de lycée, les types de problèmes bénéficient d'un affichage officiel dans le texte même des programmes. Parmi ceux de la classe de Seconde, figure des « propriétés d'alignement et de concours » .

En *classe de Troisième*, compte tenu du fait que la géométrie analytique tient une large part (condition de colinéarité de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées dans un repère quelconque, d'orthogonalité de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé, équation d'une droite dans un repère cartésien quelconque, distance de deux points donnés par leurs coordonnées dans un repère orthonormé), le traitement vectoriel de l'alignement de trois points A, B, C se limite à des égalités du type $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AB}$ et ne fait guère l'objet d'exercices ; par exemple, dans le manuel publié par l'IREM de Strasbourg[12], la rubrique d'exercices comporte 20 énoncés, et un seul exercice concerne ce type de problème : trois points A, B et C étant donnés, on définit M et N par $\overrightarrow{AM} = 3\ \overrightarrow{AB} - 2\ \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - 2/3\ \overrightarrow{AC}$ et on demande de démontrer que A, M et N sont alignés avec l'indication de « comparer les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ ». Mis à part les exercices d'entraînement à la manipulation de combinaison linéaires, d'égalités vectorielles (8 exercices au total), les autres exercices concernent :
– la caractérisation vectorielle du milieu (dans le plan pointé en un point quelconque, appelé M), avec des applications au parallélogramme et au quadrilatère ;
– une introduction vectorielle guidée au centre de gravité d'un triangle (à l'aide de $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$) ;
– une démonstration vectorielle du fait que les hauteurs d'un triangle sont concourantes ;
– l'étude de la droite et du cercle d'Euler
– l'étude de fonctions qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit de la forme $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$;
– des représentations paramétriques vectorielles de droites.
– une intervention des vecteurs en physique (forces).

[12] Édition Istra, Paris, 1980.

Les exercices relatifs au milieu, centre de gravité, orthocentre, droite et cercle d'Euler ne sont pas indépendants, les résultats des premiers étant réinvestis dans les suivants.

Cet exemple montre bien qu'il est difficile aux auteurs d'alimenter la rubrique d'exercices d'un tel chapitre sans faire intervenir au moins la caractérisation vectorielle du milieu dans le plan pointé, ainsi que celle du centre de gravité d'un triangle. Autrement dit, l'étude des problèmes d'alignement et de concours fait intervenir des éléments technologiques, fournis par l'énoncé, qui relèvent d'un cours sur le barycentre qui ne figure pas au programme (et qui n'est pas abordé dans la partie « cours »). L'autonomie de l'élève dans ce type d'exercices est relativement faible, et l'identification des techniques utilisées difficile.

En *classe de Seconde*[13], les représentations paramétriques cartésiennes de droites viennent renforcer la gamme des outils de géométrie analytique : les représentations paramétriques vectorielles ($\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ ou $k\ \overrightarrow{AB}$) sont introduites par certains auteurs de manuels – notamment en vue de l'étude de l'image d'une droite par une transformation géométrique, mais ne sont pas utilisées dans les exercices. En ce qui concerne les traitements vectoriels des problèmes d'alignement et de concours, certains sont traités dans la partie « cours » des manuels en faisant essentiellement appel au barycentre, qui cette fois-ci est l'un des points forts du programme (points remarquables dans le triangle – centre de gravité, centre du cercle inscrit –, dans un quadrilatère). Il est cependant difficile d'exiger des élèves une grande autonomie dans l'usage du barycentre pour résoudre de tels problèmes : c'est pourquoi on retrouve peu d'exercices ayant ce type de problèmes comme support, leurs énoncés constituant alors une étude lacunaire de la question. La rareté de tels exercices laisse une place importante (et parfois presque totale) aux questions relatives aux fonctions vectorielles de Leibniz. Dans certains manuels, on voit apparaître au titre de thème d'étude, les théorèmes de Ménélaüs et de Céva, accompagnés d'applications aux problèmes de concours classiques dans le triangle, mais leur emploi n'est pas exigible en tant que technique pour démontrer des alignements ou concours.

Le manuel de la collection Dimathème (éditions Didier) consacre un exercice à la somme $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$, dans laquelle la somme des coefficients est nulle ; il s'agit de savoir si ce vecteur indépendant de M peut-être nul ... mais on ne s'intéresse qu'au cas où A, B et C ne sont pas alignés.

En *classe de Première*, mais surtout de *Terminale*, on retrouve le thème du barycentre comme élément fort du programme, complété par l'étude de la fonction scalaire de Leibniz. Aucune nouveauté ne concerne le traitement vectoriel des problèmes d'alignement et de concours.

---

[13]Notre étude est fondée sur les manuels suivants : AUDIRAC, BONVALET, RICHERME, Mathématiques 2nde, éditions Magnard, 1985; BELLECAVE, DUCOS, MÉNARDO, PÉA, Thèmes mathématiques, Nathan, 1981 ; DECRETON, PORET, Mathématiques, classe de seconde, éditions Gamma, 1982.

e) Les *modifications de programmes de 1985-1988* n'affectent ni les classes de Troisième, ni les classes de Seconde. En *classe de Première S*, la bijection entre points et vecteurs, une origine étant fixée, figure au programme. Dans de nombreux manuels, elle est signalée comme étant une « propriété importante ». Dans les programmes des années 70, cette propriété faisait partie de la définition du plan ou de l'espace affine. Dans les programmes qui nous occupent, ce n'est plus le cas ; elle bénéficie d'une forte évidence intuitive, et elle n'est utilisée en pratique dans aucune technique, ce qui rend difficilement compréhensible le fait de la qualifier d'importante. Nous verrons dans la partie didactique comment donner de la vigueur à cette bijection « plan pointé - vecteurs », en lui donnant une dimension technique (et pas seulement représentative, dans la mesure où cette bijection est souvent utilisée pour représenter géométriquement un vecteur à l'aide d'un point, ou une flèche dont l'origine est toujours la même) dans la résolution de certains problèmes, tels que ceux d'alignement ; mais il est possible d'en donner ici un aperçu.

Considérons les caractérisations suivantes du milieu I d'un segment AB, et du barycentre G de trois points :

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\ \overrightarrow{MG}$,

égalités dans lesquelles la variable muette M peut être quantifiée aussi bien existentiellement qu'universellement, et au lieu d'utiliser la lettre M, remplaçons-la par la lettre O, pour signifier qu'on pointe le plan (ou l'espace) en fixant arbitrairement une origine. On obtient les égalités :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$

$\alpha\ \overrightarrow{OA} + \beta\ \overrightarrow{OB} + \gamma\ \overrightarrow{OC} = (\alpha + \beta + \gamma)\ \overrightarrow{OG}$,

La connaissance d'un point M est équivalente à la connaissance du vecteur $\overrightarrow{OM}$, que nous noterons plus simplement $\vec{m}$ ou même m. Alors les égalités précédentes s'écrivent :

$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{i}$ ou $a + b = 2\,i$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{g}$, ou $\alpha\ a + \beta\ b + \gamma\ c = (\alpha + \beta + \gamma)\ g$.

Cette caractérisation est indépendante du choix du point O.

Se pose alors le problème suivant : étant donnés trois points A, B, C, trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (ou a, b, c) pour que A, B et C soient alignés, cette condition étant indépendante du choix du point O.

Autrement dit, il s'agit de faire pour l'alignement la même chose que celle qui est traditionnellement faite pour le milieu, le barycentre, et donc de donner aux problèmes d'alignement une place plus grande au niveau technologico-théorique, afin de pouvoir en diriger et en contrôler les techniques de résolution vectorielles.

Une autre modification mérite d'être signalée : alors que dans les programmes de 1977/1982, les représentations paramétriques (cartésiennes) de droites figurent au programme de Seconde, elles vont disparaître de ceux de 1985-1994, les représentations paramétriques vectorielles ($\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$) d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite faisant l'objet d'un alinéa dans les programmes de .... Terminale S[14]. Les conséquences de cette marginalisation des représentations paramétriques vectorielles n'est pas sans conséquence en matière de technique de résolution de problèmes de concours. En effet, la méthode consistant à déterminer le point d'intersection de deux des droites puis à démontrer qu'il appartient à la troisième a le mérite d'être simple et intelligible. Comme nous le verrons dans notre quatrième partie, les représentations paramétriques vectorielles d'une droite définie par deux points A et B (en particulier celle obtenue en traduisant une relation du type $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ en termes de « vecteurs du plan pointé » que nous venons d'évoquer, ce qui donne $\vec{m} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$[15]) constituent un outil précieux pour réaliser la première étape, la deuxième étant un problème d'alignement.

f) Les *programmes de 1985-1994* voient apparaître deux modifications de répartition de contenus selon les niveaux :
– l'introduction de la multiplication d'un vecteur par un nombre est encore retardée d'un an, et se fera désormais en classe de Seconde ;
– l'introduction du barycentre est de ce fait retardée d'un an et se retrouve en classe de Première.

Cette situation sera maintenue par les dernières modifications de programmes de 1995/1998, et correspond donc à la situation actuelle. Il faut remonter aux programmes des années 1960 pour retrouver une introduction au niveau de la classe de Seconde de la multiplication d'un vecteur par un nombre, et l'étude précédente (paragraphe *a)*) a montré que les exercices abordaient peu les questions d'alignement sans faire référence au barycentre. Se pose alors la question, notamment pour les auteurs de manuels, d'alimenter la rubrique d'exercices du chapitre d'introduction de cette multiplication d'un vecteur par un nombre. La colonne des commentaires dans le texte des programmes affiche la phrase suivante, qui paraît bien anodine : « Les élèves doivent savoir utiliser la colinéarité pour caractériser le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points, l'appartenance à une droite définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur. » En ce qui concerne les caractérisations vectorielles du milieu d'un segment et du centre de gravité d'un triangle, les mêmes commentaires précisent que « la notion générale de barycentre est hors programme ». Cette situation d'enseignement est nouvelle et, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant (§ 212), les problèmes d'alignement vont se trouver sollicités[16] dans ce contexte pauvre du point de vue technologique, dans le but de montrer l'efficacité (voire la supériorité) des méthodes

---

[14]Sur ce point, la situation correspond aux programmes actuellement en vigueur.
[15]On notera que cette relation, souvent lue comme une intervention de la théorie du barycentre, s'introduit ici tout naturellement, sans faire appel au barycentre.
[16]Ce qui va sans doute au-delà des attentes explicites des rédacteurs des programmes.

vectorielles pour traiter des problèmes de géométrie ponctuelle. Les éléments technologiques sollicités explicitement seront peu nombreux :

– double utilisation de la relation de Chasles sous sa forme additive :

– passer de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ à $\overrightarrow{AC}$, ce qui n'est pas nouveau ;

mais surtout :

– passer de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB}$, (« Casser un vecteur à l'aide de la relation de Chasles » en utilisant un point X judicieusement choisi ;

– utilisation du lien entre alignement de trois points et colinéarité de deux vecteurs « formés » à partir de ces trois points, ces vecteurs étant également judicieusement choisis. Mais, d'autres éléments technologiques vont également être sollicités, tout en restant dans l'ombre du point de vue de l'institutionnalisation. En effet, le but de ces exercices est de faire fonctionner la multiplication externe, et en particulier ses propriétés algébriques. Ceci réclame l'intervention de combinaisons linéaires de vecteurs colinéaires, mais également non colinéaires : nous verrons qu'un des moments essentiels de la technique enseignée pour ces types de problèmes est celui où l'on écrit les deux vecteurs dont on veut montrer la colinéarité sous forme de combinaisons linéaires de deux vecteurs non colinéaires, ces derniers étant les mêmes pour chacun des vecteurs à « décomposer». On voit donc que les vecteurs non colinéaires, l'existence (et d'une manière plus sournoise l'unicité[17]) d'une décomposition d'un vecteur à l'aide de deux vecteurs de ce type, interviennent fortement dans cette technique. Pourtant la notion de base n'est pas encore disponible, car les auteurs de manuels, suivant ainsi l'ordre de rédaction des programmes, réservent cette notion à la géométrie analytique, les notions de base et de repère étant introduites simultanément. Ce choix est d'ailleurs renforcé par la présence, dans le bandeau des objectifs du sous-titre « Calcul vectoriel » d'un paragraphe relatif à la notion de repère (quelconque) du plan[18], dont l'interprétation peut poser problème : en effet, une interprétation étroite peut conduire à renoncer à l'emploi de repères non orthogonaux dans l'étude de tous les problèmes de géométrie, et par souci de cohérence à renoncer dans les problèmes d'alignement relatifs à des configurations, à l'emploi de bases adaptées à ces configurations. La rubrique de travaux pratiques, unique pour l'ensemble du titre « Géométrie », ne permet pas non plus d'éclairer cette question : celui qui concerne notre question évoque le « calcul vectoriel » comme l'un des outils possibles d'étude de configurations planes, sans rentrer davantage dans les détails.

---

[17]Cette unicité est en effet implicitement mise en œuvre quand, au moment de la correction, le professeur dit à un élève qu'il s'est trompé car il ne trouve pas les bons coefficients, argument qui repose sur l'unicité qui nous occupe.

[18]Voici le paragraphe en question :

"Le programme comporte la notion de **repère** (quelconque) du plan. Pour certaines questions (tracé de courbes, diagrammes, ...), il peut être commode d'utiliser des repères orthogonaux, non nécessairement orthonormaux. Pour la résolution de problèmes de géométrie, on se limitera à l'emploi de repères orthonormaux ; le recours à un tel repère n'est qu'un outil parmi d'autres, il relève de seules considérations de commodité et d'efficacité".

Nous verrons dans le paragraphe suivant le caractère artificiel des exercices d'une part, les efforts d'encadrement didactique d'autre part, que de telles organisations rendent nécessaires, ce qui contribue à leur fragilisation.

Une autre cause indirecte de cette fragilisation est la non reprise de l'étude de ce thème avec ces mêmes techniques dans les classes ultérieures. En effet, le barycentre est introduit en classe de Première, permettant l'exploitation des banques d'exercices devenus classiques déjà évoqués précédemment. Quant aux configurations ayant servi de support aux problèmes d'alignement (et de parallélisme) en classe de Seconde, elles ne sont pas nécessairement adaptées à un traitement barycentrique naturel ou simple : elles ne sont donc pas reprises. L'étude de ce type de problèmes se voit ainsi confinée à un moment bien précis de la réalisation du programme de Seconde : les difficultés qui lui sont associées dans la direction de l'étude et dans l'évaluation risquent fort de conduire à sa marginalisation.

Il est prévisible que l'étude de telles questions ne pourra être maintenue dans les programmes ultérieurs que si l'organisation mathématique est d'une part enrichie du point de vue technologico-théorique, et d'autre part, est mise au service de l'étude de problèmes qui n'apparaissent pas comme des créations didactiques artificielles, pour lesquelles il est difficile d'identifier des types de problèmes, ainsi que des techniques qui leur sont associées.

212 – Étude de la place et du rôle des problèmes d'alignement dans les manuels de Seconde relatifs au programme actuel (B.O. n° 20 du 17 mai 1990)

Les programmes de Seconde sont inchangés depuis 1990 (avec une première application à la rentrée 90/91), et cependant la plupart des éditeurs en sont à la troisième édition du manuel. Le nombre de manuels est ainsi très important. Nous étudierons séparément les trois « générations » de manuels, dans le but de cerner les évolutions.

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, les problèmes d'alignement apparaissent dans le chapitre d'introduction de la multiplication d'un vecteur par un nombre, premier élément nouveau concernant le calcul vectoriel à ce niveau. Ils apparaissent comme application de la colinéarité de deux vecteurs, notion qui, lorsqu'elle concerne deux vecteurs non nuls, fait intervenir la multiplication d'un vecteur par un nombre : l'un quelconque des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, colinéaires et non nuls, est le produit de l'autre par un nombre bien précis : $\vec{v}$ est le produit de $\vec{u}$ par un nombre et un seul k; $\vec{u}$ est le produit de $\vec{v}$ par un nombre et un seul k' (k et k' étant inverses l'un de l'autre). $\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignant deux vecteurs non colinéaires, le fait que tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit de manière unique sous forme de la somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ n'est en général pas abordé dans ce premier chapitre, et réservé au chapitre de « Géométrie analytique », dans lequel la notion de base n'est qu'un court intermédiaire vers la notion de repère : d'ailleurs, en classe de Troisième, les élèves ont rencontré la notion de « coordonnées d'un vecteur dans un repère » , qu'ils ont appris à lire sur un graphique et à calculer pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées des points A et B dans le même repère. Les problèmes d'alignement se retrouvent dans ce chapitre, où l'on introduit la condition de colinéarité de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées dans une base. Nous allons étudier l'évolution de la place et du rôle de ce type de problèmes selon les générations d'édition de manuels.

Manuels (éditeur et année)	**Présence des problèmes d'alignement dans le chapitre d'introduction de la multiplication externe**			**Présence des bases avant la géométrie analytique**	**Utilisation de bases dans des problèmes d'alignement**	**Présence de problèmes d'alignement dans le chapitre de géométrie analytique**	
	en ex. résolus (nombre)	en T.P.	en exercices (nombre)			en repère quelconque	en repère ortho-normé
ABC Bréal 1990	Oui (un)	(pas de T.P.)	3	Non	Non	Oui (1 ex. corrigé ; 1 exercice)	Non
Nathan Trans-math 1990	Oui (un)	Non	9 (+4 ex. commentés en modules)	Non	Non (mais les décompositions sont données ou suggérées)	Oui (1 ex. corrigé, 2 exercices)	Oui 6 (+ 1 ex. commenté en modules)
Magnard 1990	Oui (un)	(pas de T.P.)	0	Non	Non	Non	Oui (1)
Didier Dima-thème 1990	Non	(pas de T.P.)	4	Non	Non	Oui 1 exercice + 1 pb avec repère adapté à la configuration	Non
Hachette Perspec-tives 1990	Non	Non	8	Non	Non (mais les décompositions sont suggérées)	Oui 9 exercices (dont 6 dans des repères adaptés aux configura-tions)	Non
Belin Spirale 1990	Non	Non	9 (+ 1 pb)	Non	Non (mais les décompositions sont suggérées)	Oui 2 exercices	
Bordas Fractale 1990	Oui : deux exercices commentés	Non	6 (+ 3 pbs)	Non	Non	Oui : 2 (dont 1 dans un repère adapté à la configuration)	Non
Hachette Terracher 1990	Oui (un, suivi de description de méthodes)	Non	5 (+ 1 pb)	Non	Non	Oui 4 énoncés (dont 2 problèmes avec repère adapté à la configuration)	Non
Colin 1990	Non	Non	4	Non	Non	Oui 2	Oui 4

Ce tableau montre qu'à une exception près, ce type de problème est abordé dès le chapitre d'introduction de la multiplication externe : il fait l'objet d'un bon nombre d'exercices, et dans une bonne moitié des cas, d'exercices résolus (ou commentés), genre qui est ici préféré au genre « T.P. » , ce dernier étant complètement délaissée pour organiser l'étude de cette question. Ceci montre que la technique mise en œuvre n'est pas suffisamment claire pour faire l'objet d'un T.P. (ce que les programmes n'exigent d'ailleurs pas). L'accord est également total sur la non introduction des bases avant le premier chapitre de géométrie analytique, mais cette unanimité se brise en ce qui concerne leur utilisation dans les problèmes d'alignement : sans introduire formellement cette notion, un tiers des manuels suggère de décomposer des vecteurs dans une (ou parfois plusieurs) bases, alors que les autres laissent toute initiative à l'élève. Quant à la géométrie analytique, on constate là aussi une quasi-unanimité pour aborder ce type de problèmes, même dans un repère quelconque, ce dernier étant parfois – notamment dans les problèmes – adaptés à la configuration étudiée. En revanche, la plupart des auteurs délaissent l'étude de ce type de problèmes dans un repère orthonormé, et interprètent donc assez librement le commentaire figurant dans les objectifs du programme relatif à l'emploi de repères.

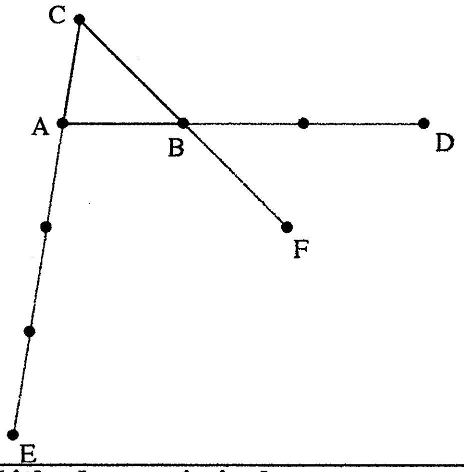
Manuels (éditeur et année)	**Présence des problèmes d'alignement dans le chapitre d'introduction de la multiplication externe**			**Présence des bases avant la géométrie analytique**	**Utilisation de bases dans des problèmes d'alignement**	**Présence de problèmes d'alignement dans le chapitre de géométrie analytique**	
	en ex. résolus (nombre)	en T.P.	en exercices (nombre)			en repère quelconque	en repère orthonormé
Hachette Déclic 1993	Oui (deux)	(pas de T.P.)	6	Oui	Oui (1)	Oui 3 exercices	Oui 1 (+2 pbs)
Hatier Pythag. 1994	Oui (un)	(pas de T.P.)	8	Non	Non	Oui 11 exercices	Non
Hachette Terracher 1994	Oui (un)	Oui (un)	9	Non	Non (les décompositions sont suggérées, dans les premiers exercices)	Oui (1 exercice, 1 problème avec repère adapté à la configuration)	Non
Bordas Fractale 1994	Oui (un)	Oui (deux)	11 (+ 2 pbs)	Non	Non	Oui (4 ex. + 1 pb + 4 pbs avec repère adapté à la configuration)	Oui (2 pbs)
Belin 1994	Oui (un)	Non	2 (+ 1 pb)	Non	Non (les décompositions sont suggérées)	Oui (1 T.P., 1 ex. corrigé avec repères adaptés, 4 exercices, 1 pb)	Non
Hatier Dimath. 1994	Non	Oui (un)	11	Non	Non	Oui 1 exercice (avec repère adapté)	Oui 1

Dans la génération suivante de manuels, on constate qu'à une exception près, tous proposent des exercices résolus relatifs à aux problèmes d'alignement, et que la moitié d'entre eux les font intervenir dans les T.P. : ce type de problèmes s'installe donc de manière plus forte. En ce qui concerne l'emploi de bases, la situation évolue peu, même si un manuel les fait intervenir de manière visible, mais encore très discrète. Il en est de même pour la géométrie analytique : un seul manuel se signale par un nombre vraiment important d'exercices sur ce thème, sans que le repère soit adapté à une configuration ; pour les autres, le tableau d'ensemble reste le même.

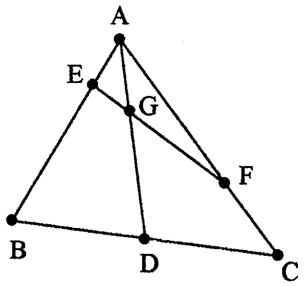
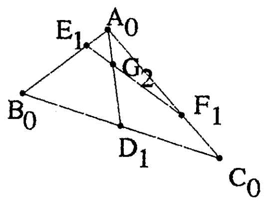
Les manuels ne rendent pas vraiment compte des difficultés d'étude et d'organisation de l'étude sur ce thème, que les revues ou brochures professionnelles vont pourtant nettement souligner. Nous allons l'illustrer à l'aide de deux d'entre elles :
– le numéro 16 (Juillet 1994) de la revue « Repères Irem » , dans lequel Nicole Vogel[19] aborde cette question dans un article intitulé « Quelques repères pour apprendre à démontrer avec la relation de Chasles en géométrie » , dont une partie essentielle concerne les problèmes d'alignement traités vectoriellement en classe de Seconde ;
– la brochure « Faire des mathématiques en Seconde » [20] , coordonnée par Élisabeth Hébert, qui est plus récente (1997), et qui décrit une méthode « qu'il ne s'agit pas d'imposer aux élèves, ..., [et qui] ne doit répondre qu'aux échecs et difficultés rencontrées, [... et] qui peut s'utiliser dans le cadre des vecteurs (parallélisme, alignement, démonstration d'égalités vectorielles) ou en géométrie dans l'espace. »
Nous ne rendrons pas compte ici de la richesse de ces deux publications ; en revanche nous allons nous intéresser aux méthodes que les auteurs proposent dans les deux cas, avec des précautions, pour traiter les problèmes d'alignement. Pour le confort de lecture, nous reproduisons ci-dessous leurs exposés des méthodes en question, appliquées sur les exemples choisis par les auteurs.

[19] IREM de Strasbourg.
[20] FRÉMONT J.L., HÉBERT H., LANDEROUIN N., MACÉ A., PRIGENT S., 1997, *Faire des mathématiques en seconde*, fichier-élève à l'usage des professeurs, CNDP Haute-Normandie.

Méthode proposée par N. Vogel

	<u>Énoncé</u> On donne un triangle ABC et les trois points D, E, F définis par : $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CF} = 2\,\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{AE} = -3\,\overrightarrow{AC}$. Prouver que D, E, F sont alignés.
Méthode en général	**Dans l'exemple**
1) a) Faire une figure. Y placer tous les éléments qui se trouvent dans les hypothèses, mais pas ceux qui se trouvent dans la conclusion.	Ici, on place sur la figure le triangle ABC ainsi que les segments [AD], [CF] et [AE], mais pas la droite (DE).
b) Mettre en couleur les vecteurs cités dans les hypothèses.	On met en couleur les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Traduire le but à l'aide de deux vecteurs que nous appellerons $\vec{u}$ et $\vec{v}$.	On peut choisir par exemple $\vec{u} = \overrightarrow{DE}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DF}$. Le but se traduit alors par : $\overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{DF}$.
3) a) Décomposer le vecteur $\vec{u}$ à l'aide de vecteurs coloriés si possible, sinon en suivant un chemin déjà tracé sur la figure.	On choisit $\vec{u} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$.
b) Remplacer les vecteurs coloriés à l'aide de l'énoncé. Réduire éventuellement l'écriture.	On obtient : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = 3\,\overrightarrow{BA} - 3\,\overrightarrow{AC}$.
4) Refaire le 3) pour le vecteur $\vec{v}$.	$\vec{v} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.
5) a) Si les décompositions des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'expriment en tout en fonction de deux vecteurs non colinéaires, on peut en général conclure.	Ici, il reste trois vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{BC}$.
b) Sinon, choisir deux des vecteurs non colinéaires apparus dans les décompositions. Exprimer en fonction de ceux-là. On peut en général conclure.	On choisit par exemple $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$. Alors $\vec{u} = \overrightarrow{DE} = 3\,\overrightarrow{BA} - 3\,\overrightarrow{AC}$, et $\vec{v} = \overrightarrow{DF} = 2\,\overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = 2\,\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$ $= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{DE} = 3\,\overrightarrow{DF}$ ...

Méthode proposée par l'équipe de l'IREM de Rouen

Exercice de référence (pour enseignant)	
	<u>Énoncé</u> Soit ABC un triangle. a) Construire les points D, E, F et G tels que: D est le milieu de [BC] $\overrightarrow{AE} = 1/4\,\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{CF} = 1/3\,\overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{EG} = 3/11\,\overrightarrow{EF}$. b) Montrer que A, G et D sont alignés.
Méthode en général	**Dans l'exemple**
1ère étape On classifie les points figurant dans l'énoncé. – Les points de la figure de départ sont appelés **points de base** ou de **niveau 0.** – Les points obtenus à partir des points de base sont dits de **niveau 1.** – Les points obtenus à partir des points de niveau 1 sont dits de **niveau 2.**	– Les points A, B et C sont les points de base ou de niveau 0. – Les points D, E et F obtenus à partir des points de base sont de niveau 1. – Le point G, obtenu à partir des points E et F, est de niveau 2.
2ème étape On reporte les niveaux sur la figure et on indique les données sous forme vectorielle. Plutôt que d'utiliser le numéro des niveaux, il peut être pratique, pour les problèmes simples, d'indiquer sur la figure, d'une même couleur, les points et les vecteurs de base à utiliser.	Données : 1° $\overrightarrow{BD} = 1/2\,\overrightarrow{BC}$ 2° $\overrightarrow{AE} = 1/4\,\overrightarrow{AB}$ 3° $\overrightarrow{CF} = 1/3\,\overrightarrow{CA}$ 4° $\overrightarrow{EG} = 3/11\,\overrightarrow{EF}$.
3ème étape On choisit le couple de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ le plus "économique". Pour chaque couple de vecteurs, on calcule la somme des niveaux des points utilisés. D'une manière générale, le choix le plus simple pour la démonstration est celui $(\vec{U},\vec{V})$ dont le total est le plus petit.	Pour démontrer l'alignement des points A, G et D, il suffit de prouver la colinéarité de l'un des couples de vecteurs suivants : $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{GD}$. $\overrightarrow{A_0G_2}$ et $\overrightarrow{A_0D_1}$, $\overrightarrow{A_0G_2}$ et $\overrightarrow{D_1G_2}$, $\overrightarrow{A_0D_1}$ et $\overrightarrow{G_2D_1}$. total : 3 total : 5 total : 4 Nous allons prouver ici que $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.
4ème étape On montre que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires en trouvant k tel que $\vec{V} = k\vec{U}$. • On exprime $\vec{U}$ et $\vec{V}$ à l'aide de vecteurs ne faisant intervenir que des points de base en utilisant la relation de Chasles.	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ (On introduit le point B car le point D est défini par la donnée 1°). $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 1/2\overrightarrow{BC}}$ (On ne décompose pas davantage car les deux vecteurs obtenus ne font intervenir que des points de base).

	$\vec{AG} = \vec{AE} + \vec{EG}$ (On introduit le point E car le point G est défini par la donnée 4° à partir du point E). $\vec{AG} = \vec{AE} + 3/11\ \vec{EF}$ (On est passé du niveau 2 au niveau 1 et la donnée 4° ne servira plus). $\vec{AG} = 1/4\ \vec{AB} + 3/11\ (\vec{EA} + \vec{AF})$ (On introduit le point A car E est défini par la donnée 2° à partir du point A). $\vec{AG} = 1/4\ \vec{AB} + 3/11\ (\vec{EA} + \vec{AC} + \vec{CF})$ (On introduit le point C car F est défini par la donnée 3° à partir du point C). $\vec{AG} = 1/4\ \vec{AB} + 3/11\ (1/4\ \vec{BA} + \vec{AC} + 1/3\ \vec{CA})$ (On est donc au niveau 0). $\boxed{\vec{AG} = 2/11\ \vec{AB} + 2/11\ \vec{AC}}$ (On ne décompose pas davantage car les deux vecteurs obtenus ne font intervenir que des points de base).
• Les vecteurs étant exprimés à l'aide des points de base, il faut ensuite les définir en fonction des deux mêmes vecteurs de base. Par exemple, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ pour un triangle. Évidemment, lorsque la figure initiale est un parallélogramme, on choisit comme vecteurs de base deux vecteurs non colinéaires !	$\vec{AD} = \vec{AB} + 1/2\vec{BC} = \vec{AB} + 1/2(\vec{BA} + \vec{AC})$. $\vec{AD} = 1/2\ \vec{AB} + 1/2\ \vec{AC}$. $\vec{AG} = 2/11\ \vec{AB} + 2/11\ \vec{AC}$. Par conséquent : $\boxed{\vec{AG} = 4/11\ \vec{AD}}$ **Les vecteurs $\vec{AG}$ et $\vec{AD}$ sont donc colinéaires et les points A, G et D sont alignés.**

Ces deux méthodes, toutes les deux élaborées pour aider les élèves, frappent le lecteur par leur complexité, même si le passage à l'écrit alourdit sans doute la description de gestes dont l'exécution apparaîtra de manière beaucoup plus simple, lors de leur exécution devant les élèves.

Même si on note des différences entre les deux méthodes (la plus visible concernant la prise en compte de la difficulté du choix des vecteurs dont il suffit de montrer la colinéarité : la première méthode le considère comme peu problématique[21], alors que la deuxième en fait une étape essentielle), on est surtout frappé par leurs ressemblances :

[21] On remarquera que dans l'exemple traité avec la première méthode, tous les couples de vecteurs que l'on peut considérer se voient attribuer le même nombre de points lorsqu'on calcule la somme des niveaux évoquée dans la deuxième méthode.

– dans les deux cas, une modélisation vectorielle de la configuration, qui n'a rien de nécessaire, est déjà faite à l'aide d'égalités vectorielles. Les vecteurs qui y apparaissent ont un rôle privilégié, alors qu'un ensemble équivalent de relations, faisant intervenir d'autres vecteurs auraient pu être choisi, facilitant alors peut-être les calculs. On note d'ailleurs à ce sujet une légère différence entre les deux méthodes. La première est plus souple, en élargissant le choix des vecteurs coloriés à celui de « chemins déjà tracés » , ce qui permet de considérer directement le vecteur $\overrightarrow{DB}$ alors qu'il ne fait pas partie de ceux qui figurent dans les données, là où la deuxième méthode aurait exigé l'introduction du point A.
– dans les deux cas, le recours à une base attachée à la configuration est retardée au maximum, pour finir par arriver avec, dans les deux cas, l'évocation d'une définition possible d'une base (deux vecteurs non colinéaires).
– dans les deux cas, il sera difficile de convaincre un élève que l'utilisation des vecteurs est un « outil puissant » pour l'étude de problèmes d'alignement. Pour les faire fonctionner selon ces méthodes, il faut faire intervenir des accessoires et des techniques associées à ces accessoires : l'emploi des vecteurs seuls semble manquer de puissance et d'autonomie, il faut le contrôler à l'aide d'indices extérieurs : identification et utilisation de vecteurs ou chemins coloriés reliant des points (privilégiant le registre graphique) dans un cas, abaissement du niveau des points utilisés (privilégiant le registre des écritures symboliques) dans l'autre .

Comment les difficultés relatives à l'étude de ce type de problèmes à l'aide des vecteurs sont-elles prises en compte dans la dernière génération de manuels de Seconde ? Ce qui précède pourrait conduire à envisager une réduction, voire une disparition de cette étude, au moins au début du calcul vectoriel. En fait, il n'en est rien. Le tableau ci-dessous montre que tous les manuels lui accordent une place dans le cadre des exercices résolus, qui s'imposent comme lieu de rencontre avec ce type de problèmes, au détriment des T.P., ce que l'étude précédente permet de mieux comprendre : l'état de la technique n'est pas suffisamment solide pour faire l'objet d'un T.P. On note cependant une intervention de plus en plus forte de l'emploi des bases (suggéré par des indications fournies par les énoncés, ou même introduit de manière officielle) ainsi que la volonté dans l'un des manuels, de retarder la rencontre avec ce type de problèmes, en le faisant apparaître seulement dans un deuxième chapitre concernant l'étude des vecteurs. Le traitement de ce type de problèmes en géométrie analytique reste fort, surtout en utilisant un repère quelconque, ce qui constitue un moyen d'éviter les situations délicates que nous venons d'évoquer précédemment, tout en montrant que l'emploi d'un repère et du calcul concernant des coordonnées (de points et de vecteurs) dans ce repère permet d'étudier une configuration, pourvu que le repère soit bien choisi.

Manuels (éditeur et année)	**Présence des problèmes d'alignement dans le chapitre d'introduction de la multiplication externe**			**Présence des bases avant la géométrie analytique**	**Utilisation de bases dans des problèmes d'alignement**	**Présence de problèmes d'alignement dans le chapitre de géométrie analytique**	
	en ex. résolus (nombre)	en T.P.	en exercices (nombre)			en repère quelconque	en repère orthonormé
Bréal 1997	Oui (un)	Non	11 (+ 1 pb)	Non	Non	Oui (1 T.P., 1 ex. résolu, 6 exercices)	Oui (1 ex. avec repère adapté à la configuration)
Belin 1998	Oui (un)	Non	2 (+ 2 pbs)	Non	Non (les décompositions sont suggérées dans l'exercice résolu)	Oui (4 exercices, 2 pbs avec repère adapté à la configuration)	Oui (3 pbs)
Hatier Sigma 1998	Oui : en fait, l'exercice propose 2 travaux d'élèves, à compléter et restructurer	Pas de T.P.	14 (+ 1 pb)	Oui dans certains exercices	Oui	Oui (1 ex. où le travail est préparé, 14 exercices, dont 2 avec repère adapté à la configuration)	Non
Hachette Terracher 1998	Oui, mais dans un deuxième chapitre sur les vecteurs	Pas de T.P.	6 (+ 2 pbs)	Non	Non (les décompositions sont suggérées dans les premiers exercices, ainsi que dans les problèmes)	Oui 1 ex. et 2 exercices et 1 pb. dans un deuxième chapitre, avec repère adapté à la configuration dans deux d'entre eux	Non

Quelles sont les techniques utilisant les vecteurs qui ont été utilisées pour résoudre (entre autres) des problèmes d'alignement ? C'est ce que nous étudierons dans la dernière grande partie de notre travail, mettant ainsi à profit notre étude épistémologique, en la complétant sur ce point très précis. Après avoir étudié d'autres techniques et organisations mathématiques à partir de ce type de problèmes, nous aborderons l'organisation didactique de leur étude, en l'abordant du point de vue des moments de l'étude.

22 – Étude de la technique « Emploi d'une transformation vectorielle pour l'étude d'une configuration ponctuelle »

Rappelons que la technique que nous allons évoquer concerne l'emploi d'une transformation vectorielle (essentiellement une isométrie vectorielle ou une similitude vectorielle) pour l'étude d'une configuration du plan (par exemple, celle dite « des triangles de Napoléon » ou celle de Van Aubel – les centres des carrés construits sur les côtés d'un quadrilatère ABCD forment un quadrilatère EFGH dont les diagonales ont même longueur et sont perpendiculaires).

L'introduction de cette technique dans les programmes date de 1986, avec une première mise en application dans les classes à la rentrée 1989 ; elle disparaîtra à la rentrée scolaire de 1994.

Les programmes de Terminale C de 1986

Le bandeau des objectifs relatif au paragraphe « Transformations et configurations » précise qu'en géométrie plane « il s'agit d'approfondir et de réorganiser les acquis des classes antérieures grâce à une étude plus systématique de la *composition des transformations* et de leur *action sur les configurations*, d'abord dans le cadre des *isométries* et des *déplacements*, puis dans celui des *similitudes directes*. ».

Les transformations vectorielles ont été préalablement évoquées dans les objectifs généraux du titre « Géométrie » : « À propos de l'étude des projections et des transformations, la linéarité des applications vectorielles associées doit être mise en évidence et exploitée, mais l'étude des applications linéaires, et a fortiori des applications affines, n'est pas au programme : les transformations vectorielles fournissent un outil pour l'étude des configurations et des transformations ponctuelles ; elles ne constituent pas un objet d'étude en soi. ». Les transformations vectorielles associées aux isométries font l'objet d'une partie très détaillée dans le programme, que nous reproduisons ci-dessous.

Transformation vectorielle associée à une isométrie du plan ; cas d'une translation, d'une réflexion, d'une rotation. Linéarité, conservation du produit scalaire, effet sur le déterminant. Caractérisation des déplacements. La transformation vectorielle associée à la composée *gof* est la composée des transformations vectorielles associées à *g* et à *f*. La transformation vectorielle associée à la réciproque de *f* est la réciproque de la transformation vectorielle associée à *f*.	Il s'agit ici de mettre en place un outil efficace pour la résolution de nombreux problèmes concernant les transformations ponctuelles. En revanche, la reconstitution des propriétés fondamentales des isométries ponctuelles à partir de celles des isométries vectorielles est hors programme. La donnée d'un point O permet d'identifier les isométries fixant O et les isométries vectorielles, ce qui permet d'obtenir simplement les propriétés des isométries vectorielles.
Transformation vectorielle associée à une similitude directe ; compatibilité avec la composition. Cas des homothéties et des translations ; composée de deux homothéties ou translations.	Les élèves doivent savoir la nature d'une composée d'homothéties et de translations suivant son rapport et préciser, suivant le cas, son vecteur ou son centre.

Quant à la rubrique de Travaux pratiques correspondants, elle comporte trois types de problèmes, tous classés dans les T.P. du type « Exemples de » :

– Exemples d'emploi de transformations planes pour l'étude de configurations et de lieux géométriques ;

– Exemples d'études des isométries laissant invariante une configuration du plan ;

– Exemples de recherche ou d'emploi d'isométries ou de similitudes directes transformant une configuration donnée en une autre (segments, triangles, rectangles, cercles, ...).

La technique que nous évoquons concerne plus précisément le premier type de T.P. La colonne des commentaires rappelle qu'il ne s'agit pas d'un retour aux programmes des années 70, mais que les transformations vectorielles doivent être un outil pour la résolution de problèmes concernant les transformations ponctuelles, dont le premier type de T.P. fait partie. Aucune technique n'est cependant évoquée, ni dans les commentaires ni dans la description des T.P. La seule remarque concerne des aspects technologiques : démonstration des propriétés des isométries vectorielles en les identifiant aux isométries laissant fixe un point O.

Cette lacune va conditionner très fortement le contenu des manuels, qui vont éluder cette question, comme le montre l'examen de quatre d'entre eux, choisis parmi les plus utilisés dans les classes.

– dans le manuel de la collection Dimathème[22], on définit dans le cours les isométries vectorielles associées à une translation, à une réflexion et à une rotation ; les démonstrations relatives à la compatibilité avec la composition sont renvoyées en

[22]PORTÉ D., AUDIGIER M.N., BONNEFOND G., DAVIAUD D., PORTÉ D., QUITTÉ C., SCHUWER C., Mathématiques Terminale C\E, Géométrie Algèbre, éditions Didier, 1988, Paris.

exercices. Ces derniers sont les seuls dans lesquels sont évoqués les isométries vectorielles : pour les autres, ils font intervenir les isométries ponctuelles, des composées de telles isométries. Certains problèmes, dont l'énoncé est plus ouvert, peuvent se traiter à la fois à l'aide d'isométries ponctuelles ou avec l'aide d'isométries vectorielles, mais l'absence de tout exemple d'utilisation de ces dernières laisse penser que la solution attendue sollicite des transformations ponctuelles. Quant aux similitudes vectorielles, rien n'est dit à leur sujet, pas même dans le cours.

– dans le manuel de la collection Transmath[23], seule la définition d'une isométrie vectorielle est donnée dans le cours ; la démonstration des propriétés d'une telle transformation vectorielle fait l'objet d'un exercice. Pour le reste, la situation est tout à fait comparable à celle du manuel précédent.

– dans le manuel de la collection Hautcœur[24], les isométries vectorielles sont introduites dans le cours conformément au programme (à l'exception de l'isométrie vectorielle relative à la réciproque d'une isométrie), mais aucun T.P. ou exercice ne les sollicite. Il en est de même pour les similitudes vectorielles, pour lesquels le résultat relatif à la compatibilité pour la composition n'est pas traité. Les exercices concernant les configurations sont, comme dans le manuel précédent, traité à l'aide de transformations ponctuelles ou à l'aide des nombres complexes.

– dans le manuel de la collection Hachette[25], le cours est strictement conforme au programme. Mais il n'est fait aucune allusion aux isométries ou similitudes vectorielles dans les T.P. ou dans les exercices.

Nous sommes ainsi en présence d'une situation où les éléments technicologico-théoriques proposés par les programmes (isométries et similitudes vectorielles) font allusion à des techniques qui ne se sont pas répandues dans la communauté des auteurs de manuels.

Pourtant, la brochure « Mélanges géométriques »[26] , publiée dès Janvier 1987, propose comme l'indique la page de présentation, des « articulations de contenus (applications vectorielles associées à certaines applications ponctuelles[27]), des exercices rédigés (mettant en évidence l'intérêt d'utiliser l'application vectorielle associée), ... » . Elle s'adresse aux professeurs auxquels elle offre un contenu neuf, dont la lecture suppose une étude : les techniques utilisées ne sont apparentes qu'à travers des « exercices

---

[23]BARRA R., JOBERT C., MALAVAL J., PENSEC J-J., TRICOIRE A., Mathématiques Terminale CE, tome 2, éditions Nathan, 1989, Paris.

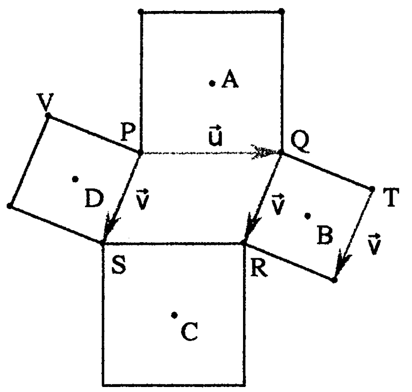
[24]HAUTCŒUR S., BLOND G., Mathématiques Terminale C\E, Algèbre-Géométrie, éditions Belin, 1989, Paris.

[25]GAUTIER C., ROYER P., THIERCÉ C., Mathématiques Terminale C et E, Algèbre et géométrie, éditions Hachette, 1989, Paris.

[26]DOFAL M., 1987, Mélanges géométriques, CRDP, 55, rue N.D. de Recouvrance, 45 012 Orléans Cédex 1.

[27]Sont ainsi abordées les projections, homothéties, translations, isométries et similitudes directes.

rédigés » , ce qui présente l'inconvénient de masquer (au moins dans un premier temps) la phase heuristique de leur mise en œuvre, pour ne laisser apparaître que sa reconstitution en texte démonstratif. Pour ce qui concerne l'étude de configurations, nous allons donner le premier exemple traité dans la brochure, mettant en œuvre le quart de tour vectoriel direct $\tilde{R}$. Il concerne l'exercice suivant : sur les côtés d'un parallélogramme et « à l'extérieur » , on construit des carrés ; leurs centres sont les sommets d'un carré. La solution rédigée est la suivante :



Que vaut $\tilde{R}(\overrightarrow{AD})$?

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} + 1/2\ (\vec{v} - \tilde{R}(\vec{v}))$ (en posant $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$),

d'où $\tilde{R}(\overrightarrow{AD}) = \tilde{R}(\overrightarrow{AP}) + 1/2\ (\tilde{R}(\vec{v}) - \tilde{R}\ \tilde{R}(\vec{v})) =$

$\tilde{R}(\overrightarrow{AP}) + 1/2\ (\tilde{R}(\vec{v}) + \vec{v})$.

$\tilde{R}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AQ} + 1/2(\overrightarrow{QT} + \vec{v}) = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB}$.

D'où $\tilde{R}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}$.

On aurait de même $\tilde{R}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC}$, ce qui est suffisant.

L'auteur traite ensuite la question à l'aide de la rotation de centre A, et remarque que le traitement semble alors moins « mécanique » que celui jouant sur la linéarité de $\tilde{R}$. Nous aurons plus loin l'occasion d'identifier des tâches de modélisation d'éléments de la figure en terme de vecteurs (localisation du centre d'un carré par rapport à l'un de ses côtés à l'aide de vecteurs) tâches qui sont des préalables à ce traitement mécanique, et qui sont actuellement peu valorisées dans l'étude des configurations avec « l'outil vectoriel » .

Les programmes de Terminale C de 1991

Ces programmes apportent peu de modifications concernant le sujet qui nous occupe : on trouve la même phrase relative aux applications vectorielles associées dans les objectifs généraux du titre « Géométrie » ; leur exploitation est également signalée dans les objectifs du paragraphe « Transformations et configurations » comme « moyen d'approfondir et de réorganiser les acquis des classes antérieures dans le cadre des isométries et des déplacements » . La rédaction des contenus et commentaires relatifs aux isométries du plan est inchangée. Le seul changement notable concerne les similitudes directes dont l'étude est allégée : leur composition, ainsi que la notion de transformation vectorielle associée sont hors programmes.

Comme nous allons le voir, en analysant le contenu de quatre d'entre eux, l'hétérogénéité des manuels va augmenter considérablement en ce qui concerne les transformations vectorielles (nous n'aborderons pas ici les projections vectorielles).

– le manuel de la collection « Fractale »[28], dont le cours est strictement conforme aux attentes du programme, ne laisse apparaître qu'un exercice corrigé dans lequel l'emploi d'une isométrie vectorielle est sollicité (il s'agit de déterminer la composée de deux déplacements). En revanche, aucun exercice (corrigé ou non) ne fait intervenir une isométrie vectorielle pour l'étude d'une configuration. La résolution de ce type de problèmes mobilise à chaque fois des isométries ponctuelles, ou des composées de telles isométries ; d'ailleurs, de nombreux exercices proposés sont tirés d'épreuves du baccalauréat.

– le manuel de la collection « Cube »[29] subit une évolution assez timide : un seul exercice corrigé fait intervenir la rotation vectorielle sur la configuration constituée par deux triangles équilatéraux ayant un sommet commun. L'énoncé est découpé en questions, et pour chacune d'elles la solution est accompagnée de commentaires et indications méthodologiques. L'autonomie de l'élève est donc très faible, les difficultés étant prises en charge par l'énoncé. Dans les exercices et problèmes du chapitre, on ne trouve aucune étude de configuration utilisant une isométrie vectorielle ; en revanche, on retrouve le texte de l'exercice corrigé dans le chapitre consacré aux similitudes, où sa résolution est proposée à l'aide de deux méthodes : composition de similitudes directes (hors programme) et utilisation d'une rotation vectorielle (avec le même énoncé que pour l'exercice corrigé).

– le manuel de la collection Terracher[30], on trouve dans la rubrique « Travaux pratiques » un paragraphe entier consacré aux « exemples d'emploi d'une isométrie vectorielle », comportant :

– deux exercices résolus relatifs à des études de configurations, utilisant la rotation vectorielle d'angle $\pi/3$ pour l'un, le quart de tour vectoriel direct pour l'autre ;

– un « point méthode », dont nous citerons un extrait significatif pour la rubrique d'exercices et problèmes : « Ces deux exemples permettent d'apprécier l'*efficacité* du procédé de résolution de certains problèmes par les isométries vectorielles. La contrepartie est évidente : " Quelle isométrie mobiliser ? " , " Sur quels vecteurs la faire agir ? " sont des questions embarrassantes. En conséquence, *dans tous ces problèmes, les réponses à de telles questions sont toujours prodiguées.* ».

– un énoncé de T.P. concernant le même type de problèmes.

Dans la rubrique « Applications directes du cours », un paragraphe entier concerne les isométries vectorielles. On y trouve la prise en charge, sous forme d'exercices, de la démonstration des propriétés des isométries vectorielles (linéarité, effet sur le produit

[28]BONTEMPS G. (dir.), HAYE G., NOUET M., SeRRA E., VENARD J., 1992, Mathématiques, Algèbre-Géométrie, Classes de Terminales C et E, éditions Bordas, Paris.
[29]GUININ D., JOPPIN B., 1992, Mathématiques Classes de Terminales C et E, Algèbre-Géométrie, éditions Bréal, Paris.
[30]ARTIGUES C., BELLECAVE Y., BELLEMIN J.M., FERACHOGLOU R., TERRACHER P. H., 1992, Math Term C et E, Algèbre et géométrie, éditions Hachette, Paris.

scalaire et le déterminant) ainsi qu'un exercice, signalé comme difficile, intitulé « un classique pour une première utilisation », proposant l'étude d'une configuration à l'aide du quart de tour vectoriel direct.

Dans les rubriques « Exercices » et « Problèmes » , on trouve une comparaison de trois méthodes pour l'étude de la configuration dite « de l'appareil à rotation », dont le but est de souligner l'efficacité de l'utilisation des isométries vectorielles. Une rubrique, intitulée « Isométries vectorielles » propose ensuite l'étude de trois configurations (dont celle de Van Aubel) à l'aide de rotations vectorielles ; enfin, un problème a pour thème ce même type de problèmes, la technique utilisée étant encore la même.

En fin de chapitre, dans une rubrique intitulée « Beaucoup de bruit pour rien », les auteurs lancent aux élèves en forme de clin d'œil un avertissement relatif aux isométries vectorielles : « Les programmes leur accordent une place importante ... Elles sont un outil performant dans la résolution de problèmes ... Elles n'apparaissent presque jamais dans les sujets du baccalauréat ... ».

– dans le manuel de la collection « Belin »[31], un chapitre entier est consacré aux transformations vectorielles. Dans le cours, un symbolisme spécial est utilisé pour visualiser l'effet d'une telle transformation sur un vecteur, et pour chaque isométrie étudiée, deux figures sont faites : l'une concerne l'aspect ponctuel, l'autre l'aspect vectoriel (le symbolisme évoqué précédemment y est utilisé).

Dans la rubrique « Travaux pratiques », l'un d'eux a pour but de montrer, « à propos de l'étude d'une configuration géométrique, quels sont les indices qui permettent de déceler la présence d'une rotation vectorielle ». Un autre a explicitement pour but l'étude de configurations : trois exemples sont proposés, à chaque fois les décompositions de vecteurs et les rotations vectorielles sont données par l'énoncé. Le dernier a pour but de comparer plusieurs méthodes pour l'étude d'une configuration : il en ressort que celle utilisant une rotation vectorielle est la plus simple ... pourvu que les décompositions des vecteurs sur lesquels ont la fait agir soient données.

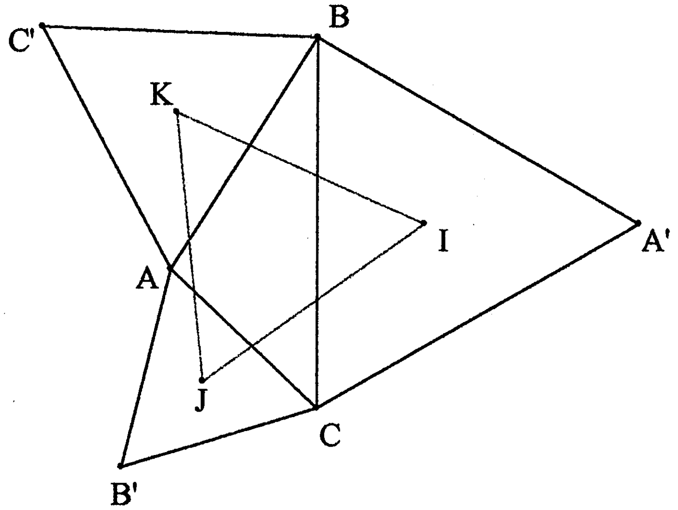
Dans la rubrique « Exercices », dix configurations géométriques sont étudiées, chacune à l'aide de deux et même le plus souvent trois méthodes (utilisation des nombres complexes, utilisation de transformations ponctuelles, utilisation d'une transformation vectorielle).

Plusieurs fois dans ce qui précède, nous avons évoqué les « décompositions de vecteurs et les rotations vectorielles données par l'énoncé » . Afin que le lecteur s'en fasse une idée plus claire, nous allons détailler un exemple : celui connu sous le nom de « configuration des triangles de Napoléon » .

---

[31]DOFAL M. (dir.), BOUVIER J. P., CHADENAS J., DAUDIN P., LEROY A., OLIVIER Y., PRESSIAT A., 1992,Math Terminales CE, éditions Belin, Paris.

ABC est un triangle quelconque ; BCA', AB'C et CAB' sont des triangles équilatéraux tels que les angles ($\overrightarrow{A'C}$, $\overrightarrow{A'B}$), ($\overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{B'C}$) et ($\overrightarrow{C'B}$, $\overrightarrow{C'A}$) aient pour mesure $\frac{\pi}{3}$. I, J et K désignent les centres de gravité respectifs des triangles BCA', AB'C et ABC'. Il s'agit de démontrer que le triangle IJK est lui-même équilatéral.



L'énoncé demande à l'élève d'établir (par exemple) les égalités vectorielles :
$3\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'B'}$ (ou mieux encore $3\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'}$) ;
$3\ \overrightarrow{IK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{A'C'}$ (ou mieux encore $3\ \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC'}$) ;
puis demande de démontrer que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{IK}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

L'examen de ces quatre manuels montre l'hétérogénéité de l'offre en matière d'enseignement sur le thème qui nous occupe. Il est cependant remarquable que, même dans les manuels faisant une large place à cette technique, l'autonomie accordée à l'élève est faible, en raison des deux questions posées dans le « point méthode » du manuel de la collection Terracher : au sujet de la première (Quelle isométrie vectorielle ?), le manuel de la collection « Belin » fournit des éléments de réponse dans un T.P. En revanche, les décompositions des vecteurs sur lesquels on la fait agir, si leur démonstration ne pose guère de problèmes (car ce sont des résultats d'exercices traités par ailleurs, notamment dans l'étude du thème du barycentre), c'est une toute autre affaire que de penser à les mobiliser dans ce contexte nouveau. L'auteur de l'énoncé se voit contraint de le faire s'il ne veut pas courir le risque d'un échec massif des élèves. Il est inutile de souligner que ces remarques sont encore plus valables en situation d'examen, ce qui est l'un des éléments expliquant la rareté de tels exercices dans les épreuves de baccalauréat, le principal étant d'abord l'hétérogénéité de l'enseignement sur ce sujet (les conditions de préparation des candidats ne sont pas du tout égales).

Les programmes de Terminale S depuis 1994

Ces programmes voient la disparition complète des transformations vectorielles. Sans doute convient-il de prendre en compte la réduction des horaires hebdomadaires dans ces classes (8 heures pour les élèves suivant l'enseignement de spécialité, 6 heures pour les autres, contre neuf heures en Terminale C, seule classe où ce sujet figurait au programme) : cette dernière a mécaniquement conduit à un allégement en matière de « contenus ». Mais l'étude qui précède montre combien les transformations vectorielles, qui conduisent à employer une technique difficile et qui ne peuvent guère servir de support à une évaluation à l'examen, étaient des candidates toutes désignées pour ces suppressions.

Quelles sont les techniques utilisant les vecteurs qui ont été mobilisées (ou sont mobilisées) dans d'autres systèmes d'enseignement pour étudier les configurations usuelles de la géométrie euclidienne ? Après avoir répondu à cette question dans la dernière grande partie de notre travail, nous donnerons quelques éléments pour une nouvelle praxéologie mathématique et didactique relative à l'étude de la géométrie euclidienne à l'aide des vecteurs, en partant des organisations ponctuelles pour aller vers les organisations locales.

C – Conclusion de la troisième partie

Nous ne ferons que faire ressortir plus nettement des remarques déjà faites au cours ou à la fin de chacun des deux grands paragraphes A et B précédents.

Si l'on excepte la période dite « des mathématiques modernes », on est frappé par la ressemblance des programmes du point de vue de leur contenu technologico-théorique. En effet, les programmes de lycée sont organisés autour des deux notions suivantes : le barycentre et le produit scalaire.

Comme nous l'avons déjà remarqué, la présence du produit scalaire s'explique par la facilité qu'il procure pour démontrer les résultats relatifs à la trigonométrie d'une part, par les besoins du cours de physique, dans lequel il est très fortement utilisé, d'autre part.

En ce qui concerne le barycentre, il convient de noter que sa découverte par Möbius est antérieure au développement du calcul vectoriel, les travaux de Grassmann à ce sujet étendant les résultats au cas où la somme des coefficients est nulle. Les applications du barycentre à la physique sont également importantes, même si elles font appel à plusieurs approches différentes : centre des moyennes distances, centre des forces parallèles, ... On pourrait être surpris du manque de prise en compte réel du cas où la somme des coefficients est nul après que Grassmann en ait montré l'intérêt : en effet, nous avons vu (voir page 70) qu'il prend soin d'illustrer ce cas à l'aide de deux exemples, l'un pris en statique, l'autre en magnétisme. Le premier, relatif aux corps flottants, donne une interprétation physique intéressante du vecteur « constant » associé à un système de particules dont la somme algébrique des poids (poids physiques et poussées d'Archimède) est nulle, aussi bien dans le cas où ce vecteur est nul que dans le cas contraire. Mais il est difficile de transporter une telle expérience dans le cadre d'une classe : il est à craindre que certains élèves aient du mal à imaginer, à se représenter de quoi l'on parle. Un tel exemple ne pourra donc guère trouver sa place dans un enseignement en mathématiques. La situation est encore pire pour le deuxième exemple, qui fait intervenir le magnétisme. Ainsi, malgré l'amélioration apportée par Grassmann à la théorie du barycentre, par l'extension qu'il en propose pour le cas où la somme des coefficients est nulle, les applications en physique correspondantes ne pourront pas vivre dans un cours de mathématiques. Nous verrons plus loin (quatrième partie) que l'intérêt, pour la géométrie elle-même, des formes de Grassmann de première espèce de masse nulle n'a guère été exploité dans les ouvrages universitaires. Il n'est donc guère étonnant que l'enseignement se soit resserré autour du barycentre, dont les applications en géométrie et en physique peuvent être exploitées toutes les deux dans la classe de mathématiques.

Cette ressemblance entre les programmes avant/après la période dite « des mathématiques modernes » mérite cependant d'être tempérée. En effet, après cette période où le rôle des vecteurs était fondamental, et où le clivage affine/métrique était bien mis en valeur, le professeur se voit contraint de travailler et de faire travailler ses élèves avec des vecteurs pour lesquels les résultats technologico-théoriques sont beaucoup plus faibles, à propos de types de problèmes relatifs aux configurations et aux transformations du plan ou de l'espace d'emblée considérés comme euclidiens (on y dispose des longueurs et de la perpendicularité), problèmes pour lesquels les vecteurs et les transformations vectorielles sont présentés comme des outils puissants.

Les problèmes d'alignement et de concours, qui étaient traditionnellement attachés à la théorie du barycentre, se retrouvent en tant qu'applications du calcul vectoriel, avant que la théorie du barycentre soit traitée : l'équipement technologico-théorique trop faible donne alors naissance à des techniques complexes, souvent personnalisées, pour lesquelles les élèves devront être assistés. Leur enseignement va poser problème en classe de seconde, et lors du début de la géométrie vectorielle de l'espace en Première. L'introduction du barycentre permettra de retrouver des techniques bien particulières et des types de problèmes adaptés à ces techniques, sans qu'un retour aux types de problèmes travaillés avec les techniques plus frustes soit en général entrepris : l'articulation entre ces deux ensembles de techniques relatives à un même type de problèmes reste à travailler.

Pour les problèmes d'étude des configurations à l'aide des transformations vectorielles, la difficulté d'enseignement sera plus grande encore, car les techniques sont mal diffusées, l'offre existant dans les manuels étant très hétérogène ; lorsqu'elles font l'objet d'un enseignement, elles souffrent des mêmes maux que les précédentes.

La mise en œuvre des techniques relatives à ces deux types de problèmes nécessite une étape de modélisation vectorielle de la configuration en question, étape qui ne fait guère l'objet d'un travail d'étude. Très souvent, une modélisation est déjà faite par le professeur dans l'énoncé même du problème, et le choix de cette modélisation est souvent autant dicté par des raisons liées à l'évaluation des élèves que par des raisons mathématiques internes à la situation géométrique.

Il conviendrait donc d'élaborer des triplets ($\mathscr{T}$, τ, θ) dans lesquels apparaissent des techniques de modélisation vectorielle de configurations, et tels que pour chaque $\mathscr{T}$ existe au moins une technique τ rendue intelligible et clairement justifiée. C'est ce que nous nous proposons de faire dans notre quatrième partie, d'abord en dressant un inventaire des organisations mathématiques existantes ou ayant existé en France et ailleurs, ensuite en faisant des propositions pour une évolution de ces organisations, accompagnées de quelques éléments relatifs à une organisation didactique possible.

Quatrième partie

Organisations mathématiques locales et éléments d'organisations didactiques relatives au calcul vectoriello-ponctuel

A – Les organisations mathématiques existantes

Dans cette partie, nous allons examiner les praxéologies mathématiques que l'on peut reconstruire en examinant une sélection des grands traités de calcul vectoriel parus depuis le début du siècle, en France et dans d'autres pays tels que l'Angleterre, l'Allemagne et les États-Unis, ainsi que quelques publications IREM sur ce sujet. Pour chacun d'eux, dans la mesure du possible, nous décrirons cette praxéologie en utilisant le langage actuellement en usage relatif aux questions abordées.

Le choix des traités et brochures répond aux volontés suivantes :
– d'abord, prendre en considération les premiers ouvrages publiés en français relatifs au calcul vectoriel, qui ont joué un rôle important dans la diffusion des types de problèmes relevant du calcul vectoriel ainsi que des techniques vectorielles pour les résoudre ;
– ensuite, ne pas rester prisonnier du cadre français et de ses institutions, en examinant des ouvrages relativement récents, utilisés dans la formation des professeurs ou dans l'enseignement secondaire d'autres pays ;
– enfin, prendre en compte des brochures IREM ou ouvrages universitaires français récents directement en rapport avec la question.

Compte tenu de l'attention que nous leur avons réservée dans les parties précédentes de ce travail (notamment la troisième partie), nous étudierons plus particulièrement, dans ces ouvrages et brochures, l'organisation mathématique relative
– aux problèmes d'alignement et de concours (paragraphe 1 suivant) ;
– à l'étude des configurations de géométrie plane (paragraphe 2).

1 – Organisations mathématiques relatives au traitement vectoriel des problèmes d'alignement et de concours

11 – L'encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées

Cette encyclopédie a été publiée sous les auspices des académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants. Son édition française a été rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, professeur à l'Université de Nançy. Dans le premier volume du Tome 1, consacré à l'Arithmétique, on trouve dans le fascicule 3, un article intitulé « Nombres complexes » rédigé d'après l'article de E. Study (Université de Bonn) par Elie Cartan (Université de Nançy). Ce fascicule a été publié le 2 avril 1908. Après un chapitre concernant les nombres complexes ordinaires, apparaît un chapitre intitulé « Nombres complexes d'ordre supérieur », dans lequel l'Ausdehnunglehre de Grassmann est évoquée : le calcul extensif de Grassmann fait l'objet d'un chapitre entier, dont nous ne donnerons ici que les titres de paragraphes :

– Généralités (sur le rôle des multiplications successives permettant d'engendrer les classes successives à partir d'une classe primitive de nombres, et sur les différentes sortes de multiplication) ;

– Multiplication progressive ;

– Multiplication régressive (et en particulier la notion d'unité complémentaire d'une unité donnée, et de nombre complémentaire d'un nombre donné[1]) ;

– Multiplication intérieure ;

– Applications.

C'est dans ce dernier paragraphe que E. Cartan signale que H. Grassmann a développé une « analyse géométrique très féconde » en « appliquant à la géométrie le calcul extensif à multiplications non algébriques ». Il renvoie à l'aide d'une note en bas de page au mémoire de Grassmann « Geometrische Analyse » couronné en 1846 par l'Académie Jablonowski, en donnant les références de la publication initiale datant de 1847, et à la publication faite par F. Engel à Leipzig en 1894. Ensuite, il détaille le système de nombres d'ordre $n = 4$. Le système admet quatre classes, les trois dernières

---

[1] On appelle *unité complémentaire* d'une unité donnée E d'ordre h, le produit E' des $n - h$ unités primitives qui n'entrent pas dans E, ce produit étant précédé du signe + ou du signe – suivant que EE' est égal à +1 ou – 1. On désigne l'unité complémentaire de l'unité E par le symbole $|E$. On a donc : $|E = (EE')\,E'$. Par exemple, si $n = 5$, $|e_2e_4e_5 = -e_1e_3$.

Le *nombre complémentaire* d'un nombre donné a de degré h, mis sous la forme $m_1E_1 + m_2E_2 + \ldots + m_\nu E_\nu$ où $E_1, E_2, \ldots, E_\nu$ sont les unités de degré h est, par définition,

$$|a = m_1|E_1 + m_2|E_2 + \ldots + m_\nu|E_\nu .$$

On a : $||\,a = (-1)^{h(n-h)}\,a$.

se déduisant de la première par multiplications successives : la quatrième est formée des nombres réels, la première est la classe primitive. Selon la terminologie de Grassmann, les nombres de cette classe primitive sont les points de l'espace affectés de masses et les vecteurs. L'ordre 4 se justifie par le fait qu'il faut quatre points formant un tétraèdre de volume non nul pour exprimer à partir de ses sommets (points affectés de la masse 1) tout point et tout vecteur de l'espace à l'aide de ces quatre points. E. Cartan rappelle la définition de la somme de deux éléments quelconques de la classe primitive, montre qu'une soustraction est alors définie, pour laquelle la différence entre deux points A et B (affectés d'une masse égale à 1) est égale au vecteur $\overrightarrow{AB}$. La seconde classe est alors formée des systèmes de vecteurs : ses nombres simples sont constitués par les vecteurs glissants et les couples ; la troisième classe est formée des triangles et des couples de triangles ; la quatrième classe est formée des nombres réels, ou plutôt des tétraèdres, chaque tétraèdre étant défini par un nombre dont la valeur absolue est égale à son volume, et dont le signe dépend de la disposition du tétraèdre.

Pour chacune des classes, E. Cartan développe les définitions des opérations (et en particulier pour l'addition et la multiplication extérieure). Mais aucune application précise à la géométrie n'est traitée, ce qui n'est guère étonnant dans un tel ouvrage. En particulier, l'intérêt pour la géométrie de la notion d'unité complémentaire d'une unité donnée, de nombre complémentaire d'un nombre donné n'est pas évoqué.

On retrouve une allusion aux travaux de Grassmann dans le Tome IV consacré à la Mécanique générale : le deuxième volume, fascicule 1, publié le 22 mai 1912 contient un article de Lucien Lévy (Paris) d'après l'article allemand de H. E. Timerding (Brunswick), intitulé « Fondements géométriques de la statique ». Il est précédé d'une introduction « conforme au mode d'exposition des Éléments de la Mécanique rationnelle généralement adopté en France » dont certains passages sont dus à Lucien Lévy ou Paul Appell. Dans cette introduction, on note un paragraphe intitulé « Digression sur la notation de Grassmann et sur les quaternions », puis plus loin, une allusion au produit extérieur (les auteurs lui préfèrent le nom de « produit combinatoire »). Mais aucun usage ultérieur n'en est fait.

L'organisation mathématique comporte donc, dans chacune des parties évoquées, essentiellement une composante **théorique**.

12 – L'ouvrage de Burali-Forti et Marcolongo de 1909-1910.

Le contenu des chapitres concernés

Dans cet ouvrage, ces questions sont essentiellement abordées dans les deux premiers chapitres. Voici le sommaire du premier :

Chapitre 1 : Somme, produit par un nombre

Les notations utilisées pour désigner les vecteurs sont au nombre de deux :

la notation B – A, où A et B désignent des points ;

la notation $\boldsymbol{a}$ (lettre "a" écrite en italique gras).

En ce qui concerne la nature des vecteurs, les auteurs précisent clairement qu'un vecteur est « un *élément géométrique abstrait*, caractérisé par les *éléments géométriques concrets* : LONGUEUR, DIRECTION et SENS ».

Dans cette perspective, le paragraphe 4, et notamment l'aspect « représentation graphique », se justifie par le fait qu'on y considère des notions venant de la physique (vitesses, accélérations, forces), et qu'il est utile de représenter graphiquement ces grandeurs vectorielles. (On notera que les auteurs prennent la peine d'y expliquer que si les vitesses et les accélérations sont bien des vecteurs, il n'en est pas de même des forces).

La liaison point-vecteur est assurée par la notation A + $\boldsymbol{a}$, qui par définition désigne l'unique point B tel que B – A = $\boldsymbol{a}$, ce qui assure l'équivalence de B = A + $\boldsymbol{a}$ et de B – A = $\boldsymbol{a}$.

La somme de deux vecteurs est définie à l'aide de cette relation point-vecteur : $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ désignant deux vecteurs, leur somme, notée $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ est le vecteur $[(O + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}] - O$, où O est un point arbitraire. L'indépendance du résultat par rapport au point O est traitée très succinctement en faisant allusion à une translation.

Quant au paragraphe relatif au produit d'un vecteur par un nombre, sa seule particularité consiste à définir le module d'un vecteur, originalité que nous avons déjà abordée dans notre deuxième partie (Cf. page 103).

Le paragraphe 8, relatif aux « expressions linéaires par rapport à des vecteurs » traite en fait des bases (appelées « systèmes de référence »), en distinguant successivement les dimensions 1, 2 et 3. Les notations $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, et $\boldsymbol{k}$ pour désigner les vecteurs de base sont introduites.

Au paragraphe 9, sont introduites les représentations paramétriques d'une droite, d'un plan, et de l'espace sous les formes :

$$P = A + x\,(B - A)\ ;$$
$$P = A + x\,(B - A) + y\,(C - A);$$
$$P = A + x\,(B - A) + y\,(C - A) + z\,(D - A)\ ;$$

mais aucune utilisation n'en est faite. Les auteurs concluent le paragraphe en remarquant que « l'on peut exprimer *tous les points d'une droite, d'un plan ou de l'espace à l'aide de deux, trois ou quatre points fixes*. ».

Le paragraphe 10 donne des conditions portant sur les composantes de vecteurs pour que deux vecteurs soient parallèles ; pour que trois vecteurs soient parallèles à un même plan (à l'aide de la nullité du déterminant dans ce dernier cas, et à l'aide de la proportionnalité des composantes dans le premier).

Ce chapitre se termine par les résultats classiques de géométrie analytique. Après avoir défini un système de référence (une origine O et trois vecteurs $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, et $\boldsymbol{k}$ non parallèles à un même plan et *de module égal à 1*), les auteurs remarquent que « le point P se trouve ainsi exprimé de façon très simple à partir de ses coordonnées et du système de référence $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, et cela d'une façon absolue, chose fort importante, puisque pour définir un point il ne suffit pas de donner ses coordonnées, mais aussi **le** système de référence. ».

Les auteurs traitent alors

– de l'équation cartésienne d'une droite de l'espace déterminée par :
  - – deux points ;
  - – un point et un vecteur parallèle à cette droite ;

– de l'équation cartésienne d'un plan de l'espace déterminé par :
  - – trois points ;
  - – un point et deux vecteurs parallèles au plan.

Ils qualifient ces équations d'équations « explicites » pour les opposer aux équations paramétriques vues antérieurement. Le passage d'un type à l'autre d'équations est traité en détail. Le chapitre se termine par la traduction du parallélisme droite-plan à l'aide d'équations cartésiennes.

Abordons maintenant le chapitre II, dont voici le sommaire.

Chapitre II - Calcul barycentrique

N°		Pages
1	Règles de calculs des formes F1	17
2	Masse et barycentre	19
3	Constructions graphiques	21
4	Quelques applications à la géométrie élémentaire	22
5	Coordonnées	25

Les formes F1 dont il est question sont évidemment les formes de première espèce de Grassmann, c'est-à-dire les expressions formelles du type :

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des nombres réels et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points.

Les auteurs définissent l'égalité de deux formes $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$ et $y_1 B_1 + y_2 B_2 + \dots + y_m B_m$, par la condition : quel que soit le point O,

$x_1(A_1 - O) + x_2(A_2 - O) + \dots + x_n(A_n - O) = y_1(B_1 - O) + y_2(B_2 - O) + \dots + y_m(B_m - O)$.

Ils en déduisent que si deux formes sont égales leurs masses $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ sont égales. Puis, ils démontrent le résultat fondamental concernant une forme F1, $x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$, forme notée **A** :

– Si sa masse m est nulle, alors c'est un vecteur ;

– sinon, c'est le produit de sa masse par un point ; ce point est le barycentre de la forme F1 en question, qui est noté conformément à la notation de Möbius :

$$\text{barycentre de } \mathbf{A} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}.$$

Le paragraphe 3 traite de la construction géométrique classique du barycentre de deux points $x_1 A_1 + x_2 A_2$, point appartenant à la droite A_1A_2, construction qui est obtenue très simplement ; si $\boldsymbol{i}$ désigne un vecteur non parallèle à la droite A_1A_2, alors en posant

$$B_1 = A_1 + x_2 \boldsymbol{i} \quad \text{et } B_2 = A_2 - x_1 \boldsymbol{i} ,$$

$$\text{alors } x_1 B_1 + x_2 B_2 = x_1 A_1 + x_2 A_2 ,$$

d'où il résulte que le barycentre est le point d'intersection des deux droites A_1A_2 et B_1B_2.

Ils traitent ensuite la division harmonique obtenue en considérant A_1, A_2 et les barycentres des formes $x_1 A_1 + x_2 A_2$ et $x_1 A_1 - x_2 A_2$. Puis ils montrent l'intérêt des barycentres en Physique pour trouver le point d'application de la résultante de deux forces parallèles d'intensités x_1 et x_2 appliquées en deux points A_1 et A_2.

Quant à la construction du barycentre ou du vecteur d'une forme F1 quelconque, les auteurs affirment qu'il suffit d'appliquer plusieurs fois la construction qui vient d'être traitée dans le cas de deux points.

Le paragraphe 4 traite en détail des applications à la géométrie élémentaire plane ou de l'espace. Ils tirent parti des notations introduites dans ce chapitre ainsi que dans le premier chapitre.

Ainsi,

– le milieu du segment AB est $\frac{A+B}{2}$

– l'égalité de vecteurs B – A = C – D équivaut à l'égalité $\frac{A+D}{2} = \frac{B+C}{2}$;

– si A, B, C sont trois sommets consécutifs d'un parallélogramme, le sommet opposé à B est A + C – B.

– le symétrique de A par rapport à O est 2O – A.

– le cas du centre de gravité « de l'aire d'un triangle ABC» est traité ainsi :

$$G = \frac{A+B+C}{3} = \frac{A+2\frac{B+C}{2}}{3} = \frac{B+\frac{C+A}{2}}{3} = \text{etc.}$$

égalités qui « montrent bien » que ce centre de gravité se trouve sur chacune des médianes ....

Ces mêmes notations permettent de démontrer très élégamment que, dans un triangle, *la bissectrice divise le côté opposé en parties proportionnelles aux côtés adjacents*, puis d'interpréter les centres des cercles inscrits et circonscrits au triangle ABC comme les barycentres respectifs des formes aA + bB + cC, – aA + bB + cC, aA – bB + cC et aA + bB – cC, dans lesquelles a, b, et c désignent les longueurs des côtés respectivement opposés à A, B et C. Les auteurs démontrent alors tout aussi élégamment que le centre de gravité ou centre de masse du périmètre du triangle ABC est le centre du cercle inscrit du triangle ayant pour sommet les milieux des côtés du triangle ABC, point dont ils démontrent l'alignement avec le centre de gravité G de « l'aire du triangle ABC », et avec le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Les relations analogues concernant les quadrilatères (plans ou gauches) et les centres de gravité des triangles formés avec trois de leurs sommets sont traitées de même.

Le paragraphe 5, intitulé « Coordonnées », traite des coordonnées cartésiennes d'un barycentre, mais introduit également les coordonnées barycentriques d'un point et d'un vecteur de l'espace par rapport à un système de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 non coplanaires.

Pour un point P, il s'agit de l'unique quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) tel que

$$P = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4$$
$$\text{et } x_1+ x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Pour un vecteur $\boldsymbol{u}$, il s'agit de l'unique quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) tel que

$$\boldsymbol{u} = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4$$
$$\text{et } x_1+ x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Ce paragraphe se termine par le lien entre les formes F1 et les coordonnées projectives :

les coefficients d'une forme F1 de la forme $x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4$ sont les coordonnées projectives d'un point si leur masse n'est pas nulle, d'une direction (d'un point à l'infini) si leur masse est nulle.

Analyse didactique de ces deux premiers chapitres

Du point de vue de l'analyse didactique en terme de praxéologie mathématique (ou organisation mathématique), les auteurs se placent, du point de vue du type de problèmes qui nous intéresse (alignement et concours), pour l'essentiel à un **niveau technologico-théorique**.

Ainsi par exemple, dans le chapitre I, les représentations paramétriques vectorielles des droites et des plans sont évoquées, sans donner même un seul exemple de type de problèmes dans lequel leur emploi peut être sollicité. Il en est d'ailleurs de même pour les équations cartésiennes ; seul le passage d'un type d'équation à l'autre est quelque peu développé, ce qui sous entend que ce passage doit être utile en pratique. L'ouvrage s'adresse à des lecteurs qui sont supposés disposer d'une culture suffisamment large en géométrie (y compris analytique) pour pouvoir apprécier quels types de problèmes vont pouvoir être traités à l'aide de ces éléments technologico-théorique, à l'aide de techniques qu'ils connaissent bien et qu'il leur suffira de traduire dans le système ponctuo-vectoriel proposé, cette adaptation n'étant guère jugée difficile par les auteurs.

La seule exception apparente concerne le calcul barycentrique : dans le chapitre qui l'aborde, si les éléments technologico-théoriques restent dominants (l'approche en terme de formes de première espèce de Grassmann impose de ce point de vue des développements très complets), on voit apparaître dans le paragraphe concernant la géométrie élémentaire des types de problèmes d'alignement et de concours très classiques (droites et points remarquables dans un triangle, dans un quadrilatère) : on peut d'ailleurs noter que les problèmes de concours ont une position dominante, les questions d'alignement n'étant évoquées de manière élémentaire que dans la construction graphique du barycentre de deux points. Au sujet de ces problèmes de concours, les auteurs les résolvent en mettant en évidence la simplicité, ainsi que le caractère séduisant des calculs qu'ils « montrent » au lecteur. Mais là encore, un lecteur peu cultivé sur ce thème, c'est-à-dire ne connaissant aucune autre technique de résolution de ces problèmes, aurait beaucoup de mal à trouver pour quelle raison les auteurs s'intéressent à telle ou telle forme F1, et surtout quelles sont les raisons qui les ont conduites à leur faire subir ces transformations algébriques, si judicieusement choisies. Autrement dit, les techniques que cette technologie permet de justifier et de légitimer sont peu présentes, seul le résultat de leur mise en œuvre est livré au lecteur : en d'autres termes, la technologie permet de contrôler l'exactitude des calculs, mais ne permet pas de décrire une technique explicitant comment les auteurs ont été amenés à considérer les expressions qui y figurent.

En restant au niveau technologico-théorique, on peut remarquer une dissymétrie dans le traitement des formes F1 de Grassmann. Alors que celles dont la masse est non nulle sont abordées en détail (définition du barycentre, construction graphique d'un barycentre, applications du barycentre à la géométrie élémentaire), les autres ne sont guère exploitées : elles sont seulement indirectement évoquées pour définir les coordonnées barycentriques d'un vecteur (dans un repère formé de trois points non alignés, ou de quatre points non coplanaires), et de manière directe pour définir à l'aide des formes F1 les coordonnées projectives (et rappeler au passage que c'est à Grassmann qu'on les doit) : aux formes F1 de masse non nulle, on fait ainsi correspondre les points, à celles de masse nulle correspondent les points à l'infini (ou directions). Aucun développement de l'emploi de ces formes dans le contexte de la géométrie projective n'est entrepris.

Comme nous l'avons déjà annoncé dans notre deuxième partie, nous allons voir cette répartition de l'étude de ces questions entre les composantes « Types de questions / Techniques / Technologie / Théorie » pratiquement s'inverser dans le deuxième ouvrage que nous allons considérer au paragraphe suivant. Nous verrons que les formes F1 de masse nulle jouent un rôle important dans cette nouvelle répartition.

13 – L'ouvrage de George J. COFFIN (1914).

Le contenu du chapitre concerné

Nous avons déjà évoqué précédemment le sommaire du premier chapitre (voir notre deuxième partie, page 116), qui est celui dans lequel l'auteur traite, entre autres, du type de problèmes et de techniques qui nous intéressent : le traitement vectoriel des problèmes d'alignement.

Nous allons maintenant commenter la très grande richesse de ce chapitre, dont l'écriture est très concise, conforme en cela aux intentions de l'auteur, qui souhaite conduire le lecteur aux aspects essentiels, sans le distraire avec les aspects secondaires.

Remarquons, au sujet des notations, que celle qui est aujourd'hui classique dans l'enseignement secondaire français (et même incontournable), la notation $\overrightarrow{AB}$ est décrite par l'auteur comme étant « employée autrefois » et « parfois gênante » (à sa place il écrit tout simplement AB, mais on rencontre tout de même de temps en temps l'emploi de la notation $\overrightarrow{AB}$). Cependant, comme nous allons le voir, son originalité ne réside pas que dans les notations. Abordons directement le paragraphe s'occupant du type de problèmes qui nous intéresse : il a pour titre « Équations de la droite et du plan », porte le numéro 8, et figure en page 10 de l'ouvrage.

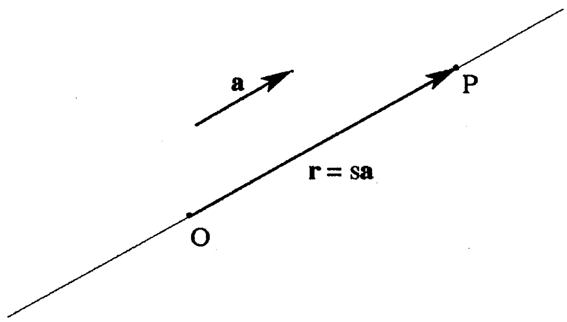
Comme nous allons le voir, il s'agit d'équations paramétriques, et non pas cartésiennes, alors que l'auteur a traité dans les deux paragraphes précédents les composantes de vecteurs. Mais il convient de bien préciser qu'il s'agit ici de représentations paramétriques vectorielles, et non pas des classiques écritures dans un repère telles que

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases}$$

auxquelles des programmes d'enseignement faisaient il y a encore quelques années une bonne place.

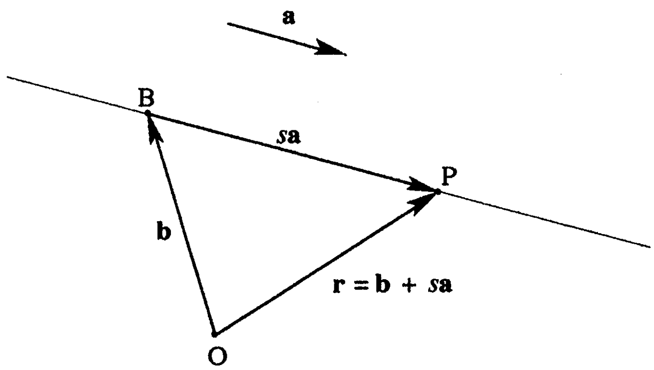
En fait, jusqu'à la fin du chapitre, l'auteur va utiliser un point fixé dans le plan, qu'il désigne par la lettre O, et considérer pour localiser chaque point P du plan ou de l'espace, le « rayon vecteur »[2] du point P issu du point O, qu'il note à l'aide de la lettre **r**, écrite en caractère droit et gras, réservant l'italique non gras pour les scalaires.

Il commence par l'équation (vectorielle paramétrique) d'une droite passant par le point fixé O du plan, dirigée par le vecteur **a** : **r** = *s* **a**, *s* désignant un paramètre réel (une « variable scalaire », dit l'auteur).



Ensuite, il traite le cas d'une droite, toujours dirigée par le vecteur **a**, mais ne passant plus par l' « origine » O, mais par un point B, repéré par son rayon vecteur **b**, situation qui est illustrée par le schéma suivant :

[2]Sans utiliser lui-même ce vocable. L'auteur ne donne pas de nom précis à ce vecteur **r**.



L'auteur fait appel à cette figure pour en tirer l'équation (vectorielle paramétrique) :

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + s\,\mathbf{a}$$

Il passe ensuite au cas d'une droite passant par les points A et B, A et B étant repérés par leurs rayons vecteurs respectifs **a** et **b**.

Considérant cette dernière comme étant la droite passant par A (de rayon vecteur **a**) et de vecteur directeur **b** − **a**, on déduit immédiatement du cas qui précède l'équation (vectorielle paramétrique) de la droite AB :

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \qquad t \text{ désignant une variable scalaire}$$

Il remarque alors que cette équation peut être mise sous une forme facile à retenir :

$$\mathbf{r} = t\,\mathbf{b} + (1 - t\,)\mathbf{a}$$

ou encore, par symétrie :

$$\mathbf{r} = s\,\mathbf{a} + (1 - s\,)\mathbf{b}.$$

Puis il fait une courte allusion à l'équation cartésienne d'une droite déterminée par ses points d'intersection avec les axes, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Il donne alors la description suivante, qui peut être considérée comme une explicitation du point de départ de techniques qu'il va mettre en œuvre sur quelques exemples :

« Tous les problèmes géométriques sur la droite sont alors faciles à résoudre. Si toutes les droites du problèmes sont dans un même plan, on prend deux et seulement deux vecteurs arbitraires non parallèles et l'on exprime tous les autres en fonction de ceux-ci. Pour un problème à trois dimensions, on exprime toutes les droites en fonction de trois et seulement trois vecteurs non coplanaires et arbitrairement choisis. »

Le premier exemple traité (et qui garde cette place dans de nombreux ouvrages ultérieurs de calcul vectoriel anglo-saxons) est celui des diagonales du parallélogramme : la première mise en œuvre de ce qui précède va consister à démontrer avec le calcul vectoriel qu'elles se coupent en leur milieu. Contrairement à ce que l'on trouverait dans la presque totalité des manuels scolaires français actuels,

le parallélogramme n'est pas d'emblée affublé du nom « ABDC », car cette modélisation d'un parallélogramme, pour correcte qu'elle soit, n'est pas la plus adaptée dans la perspective d'un traitement vectoriel. En effet, Coffin, tout en remarquant que l' « origine O » des rayons vecteurs peut être choisi arbitrairement, la choisit judicieusement, en la prenant en l'un des sommets du parallélogramme ; ses trois autres sommets sont alors nommés A, B et C, de telle façon que les diagonales du parallélogramme soient OC et AB.
Par définition de la somme de deux vecteurs, le rayon vecteur **c** de C est **a** + **b**.
L'équation de la diagonale OC est donc :

$$\mathbf{r} = s(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Celle de la diagonale AB est

$$\mathbf{r} = t\ \mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b}.$$

On en déduit que le point d'intersection D de ces diagonales a donc un rayon vecteur tel que

$$s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t\ \mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b}.$$

Cette équation est équivalente au système de deux équations à deux inconnues s et t obtenues en égalant les coefficients de **a** et **b** dans chacun des deux membres :

$$\begin{cases} s = t \\ s = 1 - t \end{cases}$$

La résolution de ce système donne immédiatement $s = t = \frac{1}{2}$.
Donc le point D a un rayon vecteur **d** tel que $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mathbf{c}$. C'est donc le milieu de OC. Coffin s'arrête ici, laissant le lecteur se convaincre que c'est également le milieu de AB (en fait, il traitera plus loin la question plus générale de la division d'un segment dans un rapport donné).

En revanche, il insiste à nouveau sur « le *principe* applicable à tous les problèmes de droites », qui consiste à égaler les coefficients d'un même vecteur dans les deux membres d'une équation, le comparant aux conditions d'égalité de deux expressions imaginaires complexes, permettant de passer de $s + it = s' + i\,t'$ à $s = s'$ et $t = t'$.

Puis il traite un deuxième exemple, montrant l'intérêt que peut avoir le fait de choisir l'origine des rayons vecteurs en un point arbitraire O plutôt qu'en l'un des points de la configuration en question. (L'examen de ce qui se passe dans chacun des cas lui permettra d'identifier les avantages et inconvénients de ces deux façons de choisir le point fixé du plan ou de l'espace servant d'origine aux rayons vecteurs.).
Ce deuxième exemple traite du fait que les médianes d'un triangle sont concourantes et de la position du point de concours sur chacune des médianes.

Coffin prend alors le point « origine O » à l'extérieur du plan du triangle ABC pour faire en sorte que les vecteurs **a**, **b**, **c** ne soient pas coplanaires.
Il écrit alors :
OA' $= \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$; OB' $= \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a})$; OC' $= \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
Notons alors deux choses :
– le résultat vu précédemment concernant l'expression du rayon vecteur du milieu d'un segment en fonction de ceux de ses extrémités est réutilisé.
– la notation d'un vecteur à l'aide de deux points est ici utilisée (alors qu'il aurait pu l'éviter).
Ensuite, il écrit une équation (vectorielle paramétrique) de chacune des médianes, utilisant les lettres x, y, z comme paramètres.
Il résout le système formé par les deux premières, en utilisant le procédé d'égalisation des coefficients des vecteurs **a**, **b**, **c**. Il trouve $x = y = \frac{1}{3}$.
Le point d'intersection D de ces deux médianes est donc tel que OD = $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}$.
Il peut alors utiliser la symétrie du problème, que le choix de O n'a pas détruite, pour conclure que ce point D appartient à la troisième médiane.
Il lui reste à justifier la position de D sur chacune d'elles. Pour cela, il démontre qu'en ajoutant à **a** les deux tiers de AA' on obtient OD. On remarquera qu'ici Coffin utilise encore la notation d'un vecteur à l'aide de deux points, et qu'il n'aurait pas pu s'en passer cette fois-ci (les deux points A et A' sont distincts de O).
Ainsi, il apparaît que Coffin utilise deux ostensifs relatifs aux vecteurs de la géométrie du plan ou de l'espace :
– une notation utilisant deux points (origine et extrémité), pour laquelle il utilise la simple notation AB ;
– une notation utilisant une seule lettre minuscule **a**, qui désigne le rayon vecteur d'un point A à partir d'un point O fixé arbitrairement.
Au sujet du choix de cette origine, il remarque que :
* Si l'on choisit comme origine l'un des points de la figure à étudier, on peut dresser ainsi le bilan « avantages / inconvénients » :
Avantages :
Les calculs sont plus simples et plus rapides.
Inconvénients :
La symétrie disparaît.
* Il vaut mieux choisir le point origine hors des points de la figure à étudier dans les problèmes qui comportent des coefficients algébriques et non numériques, car alors la symétrie des calculs, qui est un avantage n'est pas détruite.

Les deux exemples que Coffin vient de traiter montrent qu'il est facile de trouver le rayon vecteur du point d'intersection de deux droites, à l'aide de leurs équations (vectorielles paramétriques) pourvu qu'on ait la bonne idée d'exprimer tous les vecteurs qui interviennent dans une même base.

Il va maintenant s'intéresser aux problèmes d'alignement.
Il remarque que l'équation (vectorielle paramétrique) de la droite AB

$$\mathbf{r} = s\,\mathbf{a} + (1 - s)\mathbf{b}$$

peut s'écrire sous la forme :

$$s\,\mathbf{a} + (1 - s)\mathbf{b} - \mathbf{r} = 0,$$

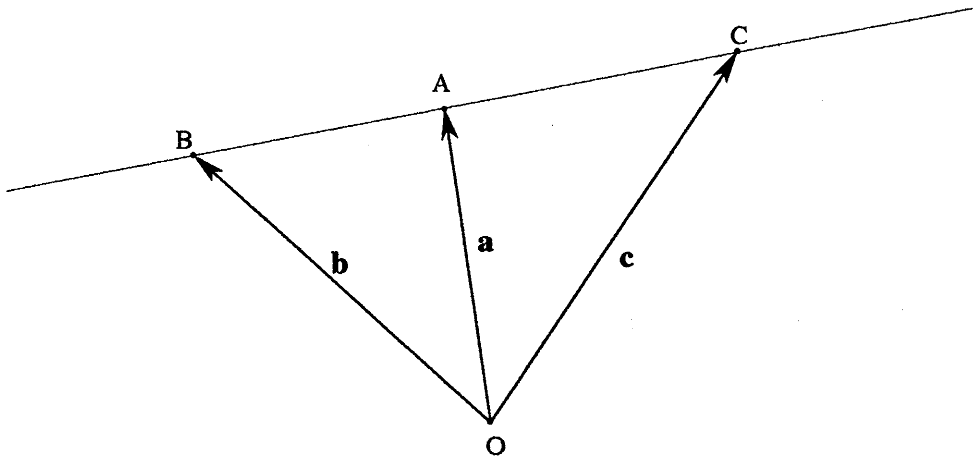
relation vectorielle au premier membre de laquelle figure une relation linéaire « reliant les vecteurs terminés sur la même droite », et dont la somme des coefficients est égale à 0.
De ce constat, il tire le résultat suivant :
si $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = 0$ et $x + y + z = 0$, alors les trois vecteurs **a**, **b** et **c** sont nécessairement terminés sur la même droite et sont appelés *terminocolinéaires*.

À ce sujet, plusieurs remarques s'imposent :
– Il est clair que le résultat qui est énoncé ici n'a pas été démontré. Coffin comme nous l'avons dit précédemment assume ce manque, sans négliger la rigueur. La lecture de la rubrique d'exercices et de problèmes située à la fin du chapitre permet en effet de constater que la démonstration de cette propriété est proposée à titre d'exercice (n° 17), les exercices n° 16 et 18 ayant les mêmes buts, à l'égard de propriétés analogues (caractérisation vectorielle de points égaux, caractérisation vectorielle de points terminocoplanaires).
Précisons cependant qu'une condition portant sur x, y et z est passée sous silence : il convient en effet de leur imposer de ne pas être tous les trois nuls. La démonstration de la propriété montre la nécessité de cette condition.
–Le néologisme « terminocolinéaires » ajoute beaucoup à l'intelligibilté de la technique, en cernant l'une des conditions intervenant dans l'équivalence que l'on est amené à écrire lorsqu'on veut formaliser correctement l'énoncé technologique qui nous occupe :

L'alignement des points A, B, C dont les rayons vecteurs sont **a**, **b**, **c**
est équivalent à la condition suivante :
il existe trois nombres réels x, y et z non tous nuls tels que

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = 0 \text{ et } x + y + z = 0.$$

L'adjectif « terminocolinéaire » permet à lui seul de remplacer la locution « points dont les rayons vecteurs ont leurs extrémités appartenant à la même droite ». De plus, il évoque une image géométrique telle que celle-ci :

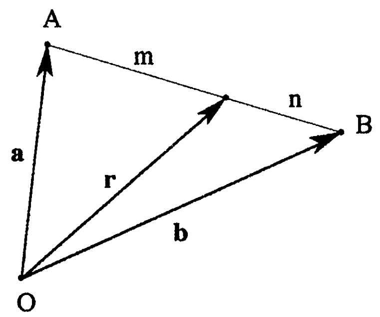


qui constitue une sous-figure jouant un rôle important dans des problèmes mobilisant la méthode évoquée ci-dessus, aussi bien pour traduire les données que pour établir la conclusion.

Ensuite, Coffin traite de l'équation (vectorielle paramétrique) d'un plan déterminé par trois points, puis établit selon la même démarche une condition pour que quatre points soient « terminocoplanaires ».

Il traite également, au passage, la recherche de l'équation cartésienne d'un plan déterminé par ses points d'intersection avec les axes de coordonnées.

Puis il aborde la question du centre de masse, ou centroïde, en commençant par le cas de deux points, à l'aide de la question classique du point divisant un segment dans une proportion donnée. La figure suivante accompagne les brefs calculs vectoriels permettant de déterminer le point recherché :



$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \frac{m}{m+n}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m+n}.$$

Puis il passe ensuite au cas de trois points en « ajoutant » un troisième point affecté d'une masse, avant de passer au cas d'un corps continu, en remplaçant les sommes finies par des intégrales (sans d'autres justifications).

Le chapitre se termine par un paragraphe au titre original, puisqu'il s'intéresse aux « relations indépendantes de l'origine ». Les questions traitant des points alignés, des points coplanaires, des centres de masse l'ont amené à rencontrer de telles relations, que l'on peut écrire sous forme d'une égalité dans laquelle l'un des membres est le vecteur nul, et l'autre est une combinaison linéaire de « rayons vecteurs ».
En effet, pour la question du centre de masse, sa définition peut s'écrire :

$$(m + n)\,\mathbf{r} - n\,\mathbf{a} - m\mathbf{b} = 0.$$

La question de l'indépendance de telles relations par rapport à l'origine O des rayons vecteurs se pose naturellement, et constitue un aspect commun à de nombreuses questions abordées dans le chapitre. C'est la raison pour laquelle l'auteur termine par son étude, qui fournit partiellement la réponse à l'inconvénient signalé par E. Lehmann dans son analyse relative aux différents modes de représentation des vecteurs (voir la première partie, page 12).
La réponse est alors facile à trouver. Une relation de la forme :

$$m_1\,\mathbf{a}_1 + m_2\,\mathbf{a}_2 + \ldots + m_n\,\mathbf{a}_n = 0$$

est indépendante de l'origine O choisie pour les rayons vecteurs

si et seulement si

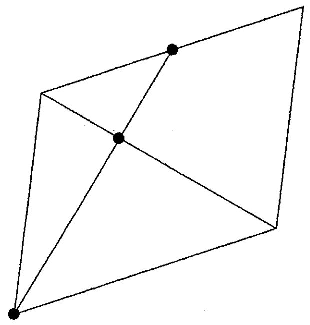
la somme des coefficients $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ est égale à 0.

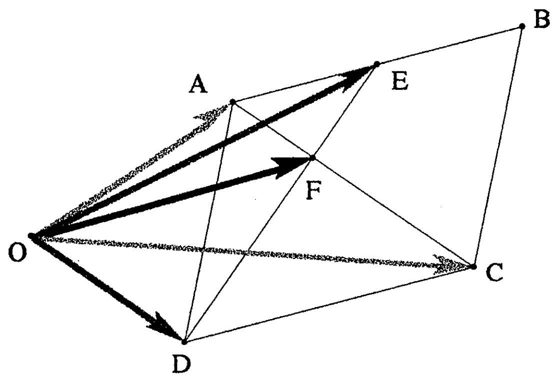
Analyse didactique de ce premier chapitre

Comme nous l'avons déjà remarqué, ce chapitre contient une mise en scène de nombreuses techniques. Certes, elles ne sont pas toutes énoncées clairement. Mais les éléments peu évidents sont soulignés. Reprenons les techniques, qui sont relatives au types de problèmes suivants :
– trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite passant par l'origine dont on connaît un vecteur directeur (Typ 1).
– trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite ne passant pas par l'origine dont on connaît un point et un vecteur directeur (Typ 2).
– trouver une équation (vectorielle, paramétrique) d'une droite ne passant pas par l'origine dont on connaît deux points (Typ 3).
– trouver le point d'intersection de deux droites connaissant une équation vectorielle paramétrique de chacune d'elles (Typ 4).
– démontrer que trois points sont alignés (Typ 5).

• Concernant la technique de détermination du point d'intersection de deux droites (Typ 4), une indication très importante est donnée. Il convient d'exprimer tous les (rayons) vecteurs qui interviennent à l'aide de deux ou trois (rayons) vecteurs constituant une base. Alors, par l'intermédiaire des décompositions des vecteurs dans cette base, le problème se trouve ramené à la résolution d'un système d'équations linéaires à deux inconnues numériques.

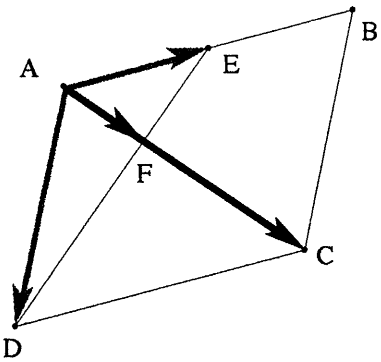
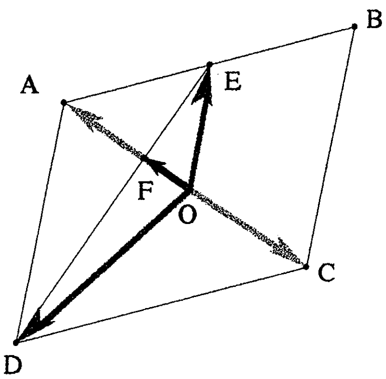
Illustrons la mise en œuvre de cette technique sur un exemple classique mis en scène de diverses manières dans presque tous les manuels de Seconde actuels.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Énoncé (sous la forme donnée dans le “Coffin”, dans sa rubrique « Exercices »)

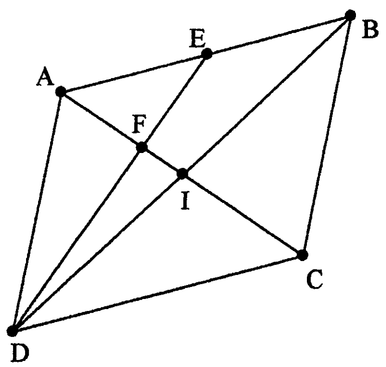
La droite qui joint un sommet d'un parallélogramme au milieu d'un côté opposé coupe la diagonale en son tiers.</td>
</tr>
<tr>
<td>Technique suggérée par Coffin


On prend un point O extérieur au plan de la figure.
On pose $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, ...</td>
<td>On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire que $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$.
D'autre part, $\mathbf{e} = 1/2\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
On veut montrer que F, point d'intersection de (AC) et (DE) est tel que $\overrightarrow{AF} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire que $\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{c} + 2/3\ \mathbf{a}$.

F appartient à (DE) donc il existe t tel que $\mathbf{f} = t\,\mathbf{d} + (1-t)\,\mathbf{e}$ (1)
F appartient à (AC) donc il existe s tel que $\mathbf{f} = s\,\mathbf{a} + (1-s)\,\mathbf{c}$ (2)
Exprimons tous les vecteurs à l'aide de trois vecteurs indépendants, a, b, c par exemple. On obtient
$\mathbf{f} = (1+t)/2\ \mathbf{a} + (1-3t)/2\ \mathbf{b} + t\ \mathbf{c}$. (3)
De l'unicité de l'écriture de f comme combinaison linéaire de a, b, c, on déduit de (2) et (3) le système suivant :
$\begin{cases} s = (1+t)/2 \\ 1 - s = t \\ (1-3t)/2 = 0 \end{cases}$
L'unique solution $t = 1/3$, $s = 2/3$ permet de conclure: $\mathbf{f} = 2/3\ \mathbf{a} + 1/3\ \mathbf{c}$.</td>
</tr>
</table>

Technique permettant d'éviter le passage par l'espace :  On choisit comme point origine le sommet du parallélogramme commun à la diagonale et au côté dont on considère le milieu. On pose comme précédemment : $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, ...	Le fait que OBCD soit un parallélogramme se traduit par $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. D'autre part, $\mathbf{e} = \mathbf{b}/2$. On veut montrer que F, point d'intersection de (AC) et (DE) est tel que $\overrightarrow{AF} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire que $\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{c}$. F appartient à (DE) donc il existe t tel que $\mathbf{f} = t\,\mathbf{d} + (1-t)\,\mathbf{e}$ (1) F appartient à (AC) donc il existe s tel que $\mathbf{f} = s\,\mathbf{c}$ (2) Exprimons tous les vecteurs à l'aide des deux vecteurs indépendants, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$ par exemple. On obtient $\mathbf{f} = t\,\mathbf{d} + (1-t)/2\,\mathbf{b}$ (3) et $\mathbf{f} = s\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{d}$ (4) De l'unicité de l'écriture de $\mathbf{f}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{b}$ et $\mathbf{d}$, on déduit de (3) et (4) le système suivant : $\begin{cases} s = t \\ (1-t)/2 = s \end{cases}$ L'unique solution $t = 1/3$, $s = 2/3$ permet de conclure: $\mathbf{f} = 2/3\ \mathbf{c}$.
Une variante de la technique précédente :  On prend comme origine O le milieu des diagonales du parallélogramme. On pose comme précédemment : $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, ...	Le fait que OBCD soit un parallélogramme se traduit par $\mathbf{c} = -\,\mathbf{a}$ et $\mathbf{d} = -\,\mathbf{b}$. D'autre part, $\mathbf{e} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$. On veut montrer que F, point d'intersection de (AC) et (DE) est tel que $\overrightarrow{AF} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire que $\mathbf{f} = 2/3\ \mathbf{a} + 1/3\ \mathbf{c}$, c'est-à-dire $\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{a}$. F appartient à (DE) donc il existe t tel que $\mathbf{f} = t\,\mathbf{d} + (1-t)\mathbf{e}$ (1) F appartient à (OA) donc il existe s tel que $\mathbf{f} = s\,\mathbf{a}$ (2) Exprimons tous les vecteurs à l'aide des deux vecteurs indépendants, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ par exemple. On obtient : $\mathbf{f} = -\,t\,\mathbf{b} + (1-t)\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$. (3) $\mathbf{f} = s\,\mathbf{a}$ (4) De l'unicité de l'écriture de $\mathbf{f}$ comme combinaison linéaire de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, on déduit de (3) et (4) le système suivant : $\begin{cases} (1-t)/2 = s. \\ (1-3t)/2 = 0 \end{cases}$ L'unique solution $t = 1/3$, $s = 1/3$ permet de conclure: $\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{a}$.

Une remarque s'impose ici concernant la portée de cette technique. L'exercice précédent est intéressant car il peut être résolu à l'aide de résultats concernant les configurations, vus au Collège :



Dans le triangle ABD, le point F, intersection de [AI] et [BD] apparaît comme étant le point de concours de deux médianes du triangle ABD. Donc AF = 2/3 AI ; or AI = 1/2 AC, donc AF = 1/3 AC.

Mais que se passe-t-il si E, au lieu d'être au milieu de [AB], est au tiers de [AB] en partant de A ou plus généralement si $\vec{AE} = k\,\vec{AB}$? Peut-on prévoir la position du point F sur la droite (AC) ?

La technique utilisée précédemment permet de répondre de la même manière à la question, alors que l'utilisation d'outils vectoriels tels que le théorème de Thalès ou l'homothétie exige quelques initiatives. En utilisant la deuxième des trois méthodes évoquées ci-dessus, on est conduit au système suivant d'inconnues s et t, dans lequel apparaît de manière naturelle le paramètre k :

$$\begin{cases} s = k(1-t) \\ s = t \end{cases}$$

dont la résolution est simple, et met bien en évidence l'utilité de la condition $k \neq -1$, condition qui élimine le cas où la droite (DE) est parallèle à la droite (AC). On obtient $s = t = \dfrac{1}{1+k}$. Ainsi, si E est au tiers de [AB], F est au quart de [AC] ; si $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{1}{4}$, alors $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{1}{5}$, ...

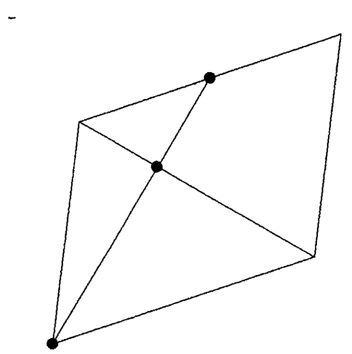
• Considérons maintenant les techniques relatives au type de problèmes Typ 5, relatif à l'alignement de trois points.

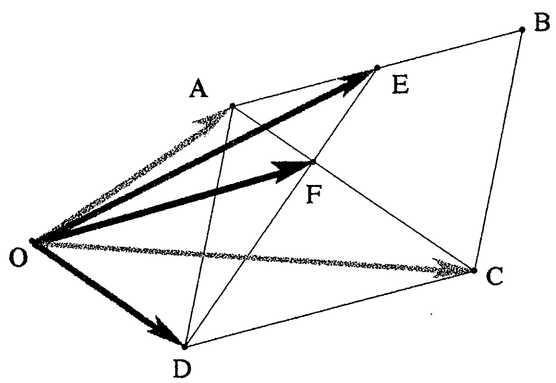
La technique consiste à démontrer que ces points sont les extrémités de trois (rayons) vecteurs terminocolinéaires. On dispose d'un critère pour cela.

La technique n'est pas spécifiquement abordée dans le cadre du chapitre. Mais nous allons voir que l'indication précédente (décomposer tous les (rayons) vecteurs dans une base) est également judicieuse dans la mise en œuvre de cette technique.

Il convient alors de savoir trouver des coefficients, non tous nuls, dont la somme est nulle, qui respectivement appliqués à chacune des décompositions dans une base **u**, **v** des trois vecteurs **a**, **b**, **c** dans cette base, donnent naissance à une combinaison linéaire qui soit nulle.

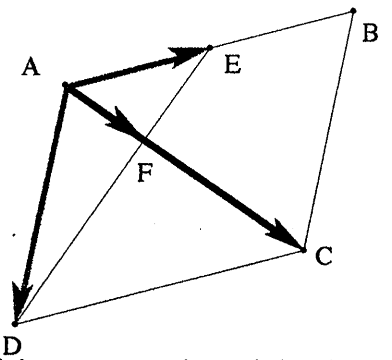
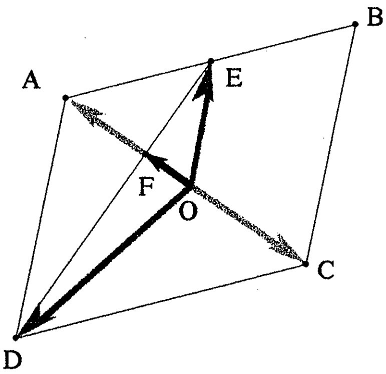
Nous allons illuster ces techniques en utilisant encore la même configuration que précédemment : il est d'ailleurs remarquable que cette dernière serve encore de support pour les exercices corrigés de certains manuels[3], et dans le cas contraire se retrouve dans les exercices sous des formes variables, que nous discuterons plus loin.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Énoncé (sous la forme inspirée de celle utilisée par Coffin, dans sa rubrique « Exercices »)

Un sommet d'un parallélogramme, le milieu d'un côté opposé et le point partageant la diagonale en son tiers sont alignés.</td>
</tr>
<tr>
<td>Technique suggérée par Coffin


On prend un point O distinct des points de la figure comme origine.
On pose $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, ...</td>
<td>On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire que
$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$.
D'autre part, $\mathbf{e} = 1/2\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ et enfin, $\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{c} + 2/3\ \mathbf{a}$.
On veut montrer que D, E et F,sont alignés.
On sait que
$\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$
$\mathbf{e} = 1/2\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
$\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{c} + 2/3\ \mathbf{a}$,
Il s'agit de trouver trois nombres α, β, γ non tous nuls, de somme nulle tels que $\alpha\mathbf{d} + \beta\mathbf{e} + \gamma\mathbf{f} = \mathbf{0}$. Réécrivons les égalités précédentes de manière à mieux mettre en évidence les coefficients respectifs de a, b et c :
$$\begin{array}{l|l} \times 1 & \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} \\ \times 2 & \mathbf{e} = 1/2\,\mathbf{a} + 1/2\,\mathbf{b} \\ \times (-3) & \mathbf{f} = 2/3\,\mathbf{a} + 1/3\,\mathbf{c} \end{array}$$
On choisit les coefficients de manière à faire disparaître les termes en c et en b, puis on examine ceux en a :
$1\,\mathbf{d} + 2\,\mathbf{e} - 3\,\mathbf{f} = \mathbf{0}$.
Puisque $1 + 2 - 3 = 0$, on en déduit que d, e et f sont terminocolinéaires, c'est-à-dire que D, E et F sont alignés.</td>
</tr>
</table>

[3] Par exemple, les manuels de Seconde de la collection Terracher, et ceci quelle que soit l'édition, depuis 1990.

Variante de la technique :  On choisit comme point origine le sommet du parallélogramme commun à la diagonale et au côté dont on considère le milieu. On pose comme précédemment : $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, ...	Le fait que OBCD soit un parallélogramme se traduit par $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}$. D'autre part, $\mathbf{e} = \mathbf{b}/2$ et $\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{c}$. Exprimons tous les vecteurs à l'aide des deux vecteurs indépendants, **b** et **d** par exemple. On obtient : $\times 1 \mid \mathbf{d} = \mathbf{d}$ $\times 2 \mid \mathbf{e} = 1/2\,\mathbf{b}$ $\times (-3) \mid \mathbf{f} = 1/3\,(\mathbf{b} + \mathbf{d})$ On conclut comme dans la rédaction précédente. Autre méthode, plus rapide, mais plus experte : On déduit des deux dernières égalités $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}$ et $\mathbf{f} = 2/3\ \mathbf{e} + 1/3\mathbf{d}$; cette dernière égalité montre que F est sur la droite (DE), au tiers de [ED] à partir de E.
Une autre variante de la technique :  On prend comme origine O le milieu des diagonales du parallélogramme. On pose comme précédemment : $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, ...	Le fait que OBCD soit un parallélogramme se traduit par $\mathbf{c} = -\,\mathbf{a}$ et $\mathbf{d} = -\,\mathbf{b}$. D'autre part, $\mathbf{e} = 1/2\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ et $\mathbf{f} = 1/3\ \mathbf{a}$. Exprimons tous les vecteurs à l'aide des deux vecteurs indépendants, **a** et **b** par exemple. On obtient : $\mathbf{d} = -\mathbf{b}$ $\mathbf{e} = 1/2\,\mathbf{a} + 1/2\,\mathbf{b}$ $\mathbf{f} = 1/3\,\mathbf{a}$ Le même choix de coefficients permet de conclure.

Quant à la technologie de cette technique, nous avons vu que Coffin ne l'aborde que dans la rubrique « Exercices ». Dans le cours de l'exposé qu'il a fait pour introduire l'énoncé technologique en question, il a d'ailleurs montré que la condition portant sur les vecteurs est nécessaire. Il ne reste plus qu'à démontrer qu'elle est suffisante, partie décisive de l'énoncé, car c'est elle qui permet de prouver des alignements. L'élève (ou l'étudiant) verra alors l'utilité de la condition « les coefficients ne sont pas tous nuls », condition que Coffin passe entièrement sous silence, considérant qu'elle est sous-entendue.

L'ouvrage de Coffin a surtout pour but de montrer l'intérêt du calcul vectoriel pour la Physique (Électricité, dynamique, mécanique, hydrodynamique). Il est d'autant plus remarquable qu'il ait pris la peine, dans son premier chapitre, de détailler ses utilisations possibles en géométrie. Contrairement à Marcolongo et Burali-Forti, il donne une place importante aux formes F1 de Grassmann de masse nulle, ou plutôt il en donne les applications à la géométrie, ce qui lui permet d'énoncer une condition nécessaire et suffisante d'alignement de trois points, portant sur leurs « rayons vecteurs » issus d'un point fixé. En revanche, il exploite assez peu les formes F1 de Grassmann de somme non nulle (la théorie du barycentre) du point de vue de leurs applications en géométrie, ces questions étant cependant présentes dans les exercices à la fin du chapitre. Son apport met bien en valeur l'utilisation de l'outil vectoriel pour modéliser des configurations géométriques ; les rédactions d'exercices qui précèdent le montrent bien : il s'agit de traduire le système étudié (la configuration géométrique) à l'aide d'un ensemble de relations (égalités vectorielles) qui en constitue un modèle (au sens de la modélisation selon Yves Chevallard). La question relative à la configuration qu'il s'agit d'étudier doit elle aussi pouvoir se traduire dans le modèle, sans recourir à des objets qui lui sont extérieurs. Le travail du modèle, ainsi orienté, permet de répondre à la question. Un retour au système permet alors de formuler la solution en des termes propres à la configuration étudiée. Les outils de travail du modèle sont ici différents des éléments du système à étudier, ce qui permet de mieux voir la dualité « système à étudier/ modèle de ce système », et c'est une différence essentielle avec les méthodes proposées dans les revues professionnelles que nous avons examinées dans notre troisième partie. Nous reviendrons plus loin sur la mise en place des techniques de base, nécessaires à de tels travaux dans des modèles. Mais il saute d'emblée aux yeux qu'elles sont différentes de celles évoquées dans ces articles : ainsi par exemple, à l'emploi de la relation de Chasles pour « introduire des points » et pour « suivre des chemins coloriés », se substitue l'unique relation

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a},$$

que l'on peut évidemment regarder comme la forme soustractive de cette fameuse relation. En fait, elle en diffère en bien des aspects[4] : on « introduit » toujours le même point (le point que Coffin appelle l'origine) et non pas un point dont le rôle est lu graphiquement ou signalé dans l'énoncé ; d'autre part, cette relation a, en pratique, un rôle fondamental : elle sert de sas entre les points et les vecteurs, et constitue un outil puissant de vectorialisation de la configuration.

[4]On devrait la rendre à Grassmann, qui en est le véritable créateur.

14 – L'ouvrage de Lucien CHATELLUN (1952)

Selon André Delachet, dans son ouvrage intitulé « Le calcul vectoriel »[5], après les deux derniers ouvrages que nous venons d'étudier précédemment, il faut attendre 1923[6] pour trouver un ouvrage d'inspiration vraiment française, le « Calcul vectoriel » de MM. A. Châtelet et J. Kampé de Férié, ouvrage dont nous n'avons pas pu retrouver un exemplaire. Un an plus tard, paraissait les « Leçons de géométrie vectorielle, préliminaires à l'étude de la théorie d'Einstein » de Georges Bouligand, dont le titre même laisse penser que le type de problèmes qui nous intéresse n'est pas abordé. Dans leur « Initiation aux méthodes vectorielles », G. Bouligand et G. Rabaté s'adressent aux élèves de Mathématiques Spéciales et aux candidats à la licence. Même s'il est clair que, dans leur ouvrage, le type de problèmes qui nous intéresse n'est pas un enjeu très important, il est en revanche intéressant de remarquer qu'il comporte un exposé de la théorie du barycentre et de ses applications aux problèmes de concours dans le triangle et dans le tétraèdre d'une part, aux représentations paramétriques d'un plan défini par trois points d'autre part ; en revanche, l'étude du cas où la somme des masses est nulle n'est même pas envisagée. Le même déséquilibre se retrouve dans l'ouvrage de Raoul Bricard[7], publié en 1929 : la théorie du barycentre est illustrée par un exemple simple (centre de gravité du triangle) ; l'étude du cas où la somme des masses est nulle est bien présente (on démontre qu'alors on obtient un vecteur indépendant du point O choisi) mais aucun emploi de ce résultat n'est fait du point de vue des questions de géométrie.

L'ouvrage de Lucien Chatellun, Inspecteur de l'Académie de Paris, intitulé lui aussi « Calcul vectoriel », paru en 1952 aux éditions Gauthier-Villars va mettre fin à cette longue série. Dans son introduction, il note comme ses prédécesseurs que « la doctrine vectorielle a pris, peu à peu en France, depuis un quart de siècle, bien après d'autres pays, une importance non négligeable. » Il situe son livre « à côté des Ouvrages magistraux et des livres élémentaires ou purement techniques », précisant qu'il a voulu faire « un traité qui, embrassant tous les aspects du Calcul vectoriel et les notions qui s'y rattachent, associe à un exposé formel de cet algorithme, rigoureux et

[5]DELACHET A., 1979, Le Calcul vectoriel, 6ème édition, Collection Que sais-je ?, PUF, Paris.

[6]1924 selon G. Bouligand et G. Rabaté, qui évoquent cet ouvrage dans la préface de leur ouvrage « Initiation aux méthodes vectorielles et aux applications géométriques et dynamiques de l'analyse », paru en 1926 à la Librairie Vuibert, Paris.

[7]Dans la préface, R. Bricard tient à souligner que le calcul vectoriel n'est pas une simple "tachygraphie". Prenant l'exemple de l'expression analytique Xdx + Ydy + Zdz du travail d'une force et de son expression vectorielle $\vec{F}.d\vec{M}$, il remarque : "Non seulement c'est plus court, mais encore et surtout il y a là un produit scalaire dont la signification saute aux yeux. D'une manière générale, les expressions qui résultent d'un calcul vectoriel sont susceptibles d'une interprétation simple et immédiate, pour la raison que les vecteurs y restent intacts. Le calcul vectoriel se rapproche par là de la méthode géométrique, tout en conservant la puissance du calcul algébrique.". Mais son ouvrage contient peu d'exemples illustrant ses propos dans le domaine de la géométrie élémentaire.

complet, des applications concrètes, nombreuses et aussi variées que possible, prises dans différentes branches des Mathématiques ». Le tome 1 est consacré à l'Algèbre vectorielle et à l'Algèbre des opérateurs linéaires, le tome 2 à l'Analyse. Les trois premiers chapitres du tome 1 « sont consacrés aux généralités, à l'étude détaillée des formes linéaires de Grassmann – en particulier des formes nulles contenant trois ou quatre points –, à l'application de ces théories à la translation, à l'homothétie, aux droites concourantes et aux points alignés dans le triangle, aux propriétés du quadrilatère complet, au rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites. ».

L'étude particulière des formes nulles contenant deux, trois ou quatre points distincts se trouve dans le chapitre II, et débute par l'énoncé et la démonstration de plusieurs théorèmes.

• A et B désignant deux points distincts, la relation $\alpha A + \beta B = 0$[8] (ce qui suppose $\alpha + \beta = 0$) entraîne $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

• A, B, C étant des points distincts, la relation $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$ (ce qui suppose $\alpha + \beta + \gamma = 0$) entraîne : soit l'alignement des points A, B, C ; soit $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.
Réciproquement, si trois points distincts sont alignés, on peut trouver un système de scalaires α, β, γ non nuls tels que l'on ait : $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0$.

• A, B, C, D étant des points distincts, la relation $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = 0$ (ce qui suppose $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$) entraîne : soit la coplanéité des points A, B, C, D ; soit $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$.
On dispose d'une réciproque analogue à celle énoncée précédemment.

L'auteur en déduit ensuite l'existence des coordonnées barycentriques d'un point M du plan ABC : ces quatre points étant coplanaires, il existe un système de scalaires non tous nuls α, β, γ, μ tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C + \mu M = 0$, ce qui s'écrit, compte tenu du fait que $\alpha + \beta + \gamma + \mu = 0$, sous la forme $(\alpha + \beta + \gamma)M = \alpha A + \beta B + \gamma C$.
Une remarque intéressante est faite à ce sujet : que devient le point M lorsque la somme $\alpha + \beta + \gamma$ tend vers 0 ? Posant $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma$, l'égalité $M = C + 1/\varepsilon\,(\alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB})$ montre que M s'éloigne à l'infini dans la direction du vecteur $\alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$; ainsi lorsque α et β varient, on obtient toutes les directions du plan ABC : $\alpha + \beta + \gamma = 0$ détermine l'ensemble des points à l'infini du plan ABC.

Le chapitre III est consacré aux applications géométriques : on y trouve bien entendu les applications classiques du barycentre (centre de gravité – appelé centre des moyennes distances de plusieurs points – du triangle, du tétraèdre), mais aussi, de manière plus surprenante, l'homothétie (définie par $M' = (1 - k)O + kM$), les translations et les composées d'homothéties et de translations. Les formes nulles de

[8]Cette relation signifie que, quel que soit le point O, $\alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} = \vec{0}$.

Grassmann sont utilisées pour démontrer les théorèmes de Ménélaüs et de Céva, à l'aide desquels sont démontrées les propriétés classiques d'alignement et de concours dans le triangle, dans les triangles homologiques, celles annoncées dans la préface, ainsi que quelques vieux problèmes d'agrégation (1913, 1936).

Analyse didactique de ces chapitres

Cet ouvrage intervient essentiellement au niveau technologico-théorique : l'étude des formes nulles de Grassmann est bien présente, mais elle sert surtout à démontrer, d'ailleurs un peu lourdement, les théorèmes classiques de Ménélaüs et de Céva, qui sont ensuite utilisés, tout aussi classiquement dans les applications.

Les seules exceptions se situent dans les corrections de problèmes d'agrégation : deux d'entre elles (sur trois) font intervenir les théorèmes permettant de démontrer des alignements à l'aide de formes nulles de Grassmann à trois ou quatre points. Ces exemples ne sont pas élémentaires, et ne suffisent pas à élaborer une technique : ils la suppose déjà disponible. Il en résulte que le lecteur peu expérimenté devra élaborer lui-même les techniques en question : mais aucune rubrique d'exercices ne figure dans l'ouvrage (qui comporte déjà 605 pages). En fait, l'ouvrage ne lui est pas destiné.

Cette réapparition des formes nulles de Grassmann les met dans des positions peu confortables dans l'organisation mathématique :
– celle de lemme précédant la démonstration de résultats déjà classiques ;
– celle de théorème n'ayant comme application que des questions de spécialiste.
Il n'est guère étonnant que ces interventions aient suscité peu d'enthousiasme auprès des utilisateurs potentiels, qui se limitent à une communauté très réduite.

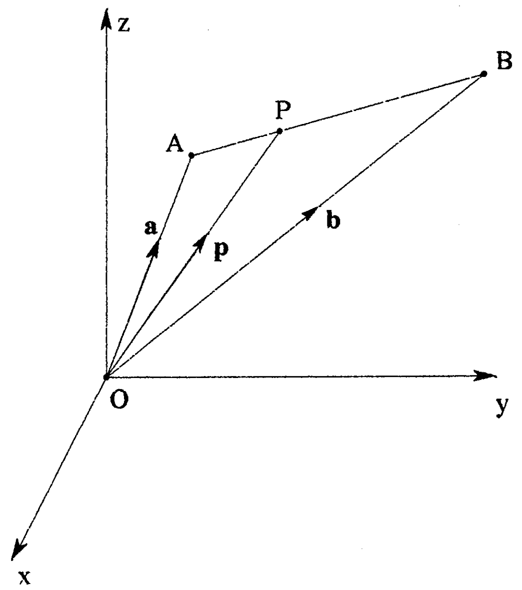
15 – Quelques ouvrages anglo-saxons ; un premier exemple : « Didactique » de T.J. Fletcher (Traduction française en 1966)

L'édition originale de ce livre a paru sous le titre « Some Lessons in Mathematics, a Handbook on the Teaching of "Modern" Mathematics ». Il a été écrit par des membres de l'association des professeurs de mathématiques, et édité par T.J. Fletcher, aux éditions Cambridge University Press à Londres. L'adaptation fançaise, sous le titre « L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui » a été faite par des universitaires lyonnais et par un professeur de l'enseignement technique[9].

Un chapitre entier est consacré aux vecteurs. Ils sont introduits au moyen de déplacements dans un plan repéré (les exercices utilisant du papier quadrillé) : ainsi, un

[9]DUBAIL F., DUCLOS D., GLAYMANN M., HAGEGE M., MOURGUES C., MOURGUES M.

vecteur n'est pas autre chose qu'un couple de nombres. La somme de deux vecteurs est définie à l'aide de la composée de deux déplacements, et des sommes de couples de nombres. Après avoir rapidement introduit le produit d'un vecteur par un nombre, l'auteur introduit le « vecteur associé à un point » dans un plan muni d'un système d'axes d'origine O : le vecteur **OP** est le *vecteur associé au point P*, il est noté **p**. Cette notion et cette notation sont utilisées pour déterminer le vecteur associé au point divisant un segment AB dans un rapport donné : un exemple est d'abord traité, puis la démonstration est faite dans le cas général, pour aboutir au résultat : si P divise AB dans le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, alors $\mathbf{p} = \frac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{a}}{\lambda + \mu}$. Elle est accompagnée du schéma suivant, une remarque ayant signalé que le résultat est applicable dans un espace à trois dimensions.



On remarquera que les flèches utilisées pour désigner les vecteurs ne sont pas placées au point auquel le vecteur est associé.

Ces vecteurs sont ensuite utilisés pour démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes, à l'aide d'écritures telles que :

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} \ ; \ \mathbf{d} = \frac{2\mathbf{f} + 1\mathbf{c}}{3} \ ; \ \mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3} \ .$$

Des exercices demandent alors de démontrer les résultats classiques dans le tétraèdre et dans un quadrilatère quelconque de l'espace.

Un paragraphe entier est consacré à l'utilisation des vecteurs en géométrie. L'auteur change de mode de désignation des vecteurs selon les problèmes traités, sans justifier ses choix :

– la notation **AB** est privilégiée pour étudier le parallélogramme de Varignon associé à un quadrilatère, ainsi que pour reconstituer un quadrilatère dont on connaît le parallélogramme de Varignon ; le problème analogue, obtenu en remplaçant le quadrilatère par un pentagone, est également traité en ces termes.
– la notation **a**, témoignant de l'emploi de *vecteurs associés à des points*, une origine étant choisie, est utilisée pour démontrer la relation classique **OG** = 3 **OH** dans un triangle (l'origine O étant choisie au centre du cercle circonscrit), ainsi que pour démontrer le théorème de Céva (l'origine est évidemment choisie au point de concours des « céviennes »).

Commentaires didactiques sur l'ouvrage de Fletcher

Apparemment, on serait tenter de voir dans les nombreuses exercices et problèmes qui constituent l'essentiel du livre une volonté de mettre en scène des techniques, la partie concernant leur justification (aspect technologique) occupant une place réduite. En fait, le caractère très classique des problèmes traités permet à l'auteur de minimiser les aspects techniques : c'est donc davantage à une application d'une technologie nouvelle à des problèmes anciens que l'on a affaire. Ces problèmes sont choisis de manière à être traitables à l'aide de l'unique résultat technologique mis en place : « si P divise AB dans le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, alors $\mathbf{p} = \frac{\lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{a}}{\lambda + \mu}$ ». Quand ce dernier ne suffit pas – c'est le cas pour démontrer commodément le théorème de Céva – l'auteur apporte l'élément qui manque (ici, l'existence de trois nombres l, m, n tels que $l\,\mathbf{a} + m\,\mathbf{b} + n\,\mathbf{c} = \mathbf{0}$, initiative assez peu naturelle.).

L'utilisation des vecteurs, et en particulier le choix de leur mode de désignation, pour modéliser une situation géométrique classique est considérée comme transparente, non problématique : or l'élégance des démonstrations, leur économie, ne sont rendues possibles que par des choix de « point origine » très judicieusement choisis, par des descriptions vectorielles d'un quadrilatère qui ne le sont pas moins (par exemple, le fait que ABCD est un quadrilatère est traduit par **AB** + **BC** + **CD** + **DA** = **0**). Cette attitude de l'auteur est compatible avec le fait qu'il s'adresse à des professeurs, mais elle dissimule aussi bien les types de problèmes que les vecteurs permettent de traiter (que les quelques échantillons donnés ne permettent pas de cerner) que les techniques de base pour les aborder.

Il est cependant remarquable que les deux notations utilisées pour désigner les vecteurs (**AB** et **a**) soient les mêmes que dans l'ouvrage de Coffin, alors que la notation $\vec{u}$ très utilisée en France pour désigner un vecteur « libre », « non localisé » n'y apparaît pas.

16 – Une publication de l'IREM d'Aix-Marseille : « Les problèmes d'alignement et de concours en géométrie plane » (1983)

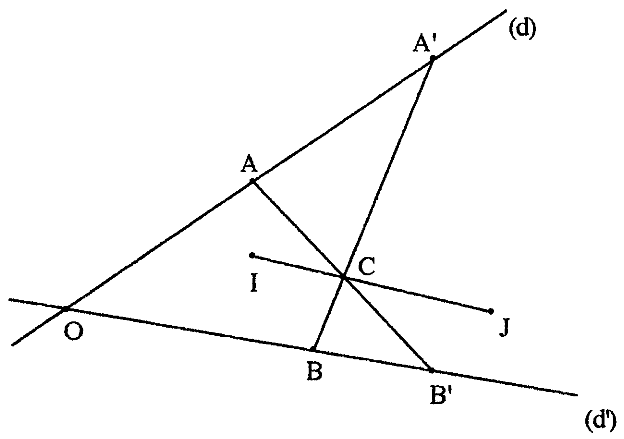
Nous faisons ici allusion à une brochure publiée par l'IREM d'Aix-Marseille[10], spécifiquement consacrée au type de problèmes qui nous intéresse (en fait, son thème est plus large : il s'agit d'étudier les problèmes d'incidence dans le plan affine – éventuellement euclidien –, c'est-à-dire les problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours). Parmi les cinq voies d'accès à la résolution de tels problèmes envisagées dans la brochure :

– interventions du calcul vectoriel,
– interventions des barycentres et du calcul barycentrique,
– interventions des parallélogrammes,
– interventions simples de transformations,
– interventions de produits de transformations,

nous envisagerons seulement les deux premières.
Pour chacune d'elles, les auteurs précisent d'abord les « principes », c'est-à-dire les aspects technologiques, puis ensuite les « méthodes et techniques ».

• Au sujet des *interventions du calcul vectoriel*, au rang des « principes » on voit apparaître les résultats suivants, qui ne surprendront personne :
– caractérisation de l'alignement de trois points distincts P, Q et R par la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$.
– caractérisation du parallélisme des droites (AB) et (A'B') par la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.
– les calculs sur les vecteurs se trouvent souvent facilités par l'emploi d'une base judicieusement choisie, liée à la configuration étudiée. On sait que trois points non alignés permettent de définir une telle base ; on sait d'autre part que la décomposition d'un vecteur dans une base est unique.
En revanche, le dernier « principe » énoncé peut surprendre : contrairement à ceux qui précèdent et qui renvoient au savoir usuellement institutionnalisé, il évoque une « configuration fondamentale » mettant en jeu simultanément alignements, non–parallélisme et concours, chacun d'eux pouvant, d'après les principes précédents se traduire vectoriellement. En fait, ce dernier « principe » cache un modèle de situations problématiques dont une étude (dirigée par les auteurs dans la partie « Méthodes et techniques ») va permettre de régler de multiples questions. Voici la « configuration fondamentale » :

[10]Elle a été élaborée par AMALLBERTI R., ARNAL J.P., BENIAMINO J.C., MARION J., OVAERT J.L., PROUDHON D., et VERNET J.M.



Elle est constituée de deux droites (d) et (d') se coupant en un point O, de deux points A et A' de (d) distincts de O, de deux points B et B' de (d') distincts de O, et de deux points I et J, l'un au moins n'étant sur aucune des droites (d), (d'), (AB') et (A'B).

Dans la partie « Méthodes et techniques », il est rappelé que ces dernières « nécessitent évidemment la maîtrise du calcul vectoriel », évidence qui semble avoir été oubliée dans certaines réalisations des programmes actuels (où le calcul vectoriel, dès sa phase d'élaboration, est sollicité pour de telles questions).

La première méthode évoquée concerne l'établissement de la colinéarité de deux vecteurs : les auteurs signalent qu'elle peut se faire soit directement, soit par utilisation d'une base ; que selon les niveaux on pourra étudier la nullité du déterminant ou du produit vectoriel des deux vecteurs ; qu'au niveau le plus élémentaire on cherchera s'il existe un réel r tel que $\vec{u} - r\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{v} - r\vec{u} = \vec{0}$.

Ensuite, ils évoquent la « configuration fondamentale », dont ils proposent une étude dirigée selon la méthode « du double alignement » : on se place dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et on pose :

$$\overrightarrow{OA'} = a\,\overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OB'} = b\,\overrightarrow{OB}\ ;$$

après avoir fait trouver à quelle condition les droites (AB') et (A'B) sont sécantes, ils demandent de déterminer les coordonnées de leur point d'intersection C. Pour cela, une indication est donnée, suggérant d'introduire les paramètres x et y tels que :

$$\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB'} \text{ et } \overrightarrow{A'C} = y\,\overrightarrow{A'B},$$

dans le but d'obtenir deux écritures du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, qui permettent de conclure.

Ils précisent alors (la brochure date de 1983) que la méthode qui vient d'être décrite doit être bien maîtrisée au niveau de la première S, et que compte tenu de son importance, il convient de proposer dès la classe de Seconde des exemples de résolution de ce problème, et d'investissement de cette méthode pour résoudre d'autres problèmes.

Un énoncé possible de direction de cette étude dans une classe de Seconde est proposé ensuite, et le résultat

$$\overrightarrow{OC} = \frac{a(1-b)}{1-ab}\overrightarrow{OA} + \frac{b(1-a)}{1-ab}\overrightarrow{OB},$$

est ensuite réutilisé dans la résolution de problèmes classiques (tels que : les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés ; les théorèmes de Ménélaüs et de Pappus).

• Au sujet des *interventions du barycentre et du calcul barycentrique*, au rang des outils technologiques figurent :
– les résultats relatifs à la fonction « vectorielle de Leibniz » f, avec ses conséquences pour les droites passant par un point M dirigées par le vecteur $f(M)$, qui sont parallèles ou concourantes,
– l'associativité de la barycentration,
– la conservation du barycentre par projection.
Quant aux techniques associées, elles concernent :
– l'utilisation de l'associativité de la barycentration pour la détermination d'isobarycentres dans le triangle, le quadrilatère ou le tétraèdre ;
– l'utilisation, dans le cadre du calcul barycentrique relativement à un triangle de référence, de projections judicieusement choisies pour, par exemple, démontrer de manière élémentaire le théorème de Céva.

Commentaire didactique relatif à cette brochure

On peut remarquer que les vecteurs sont désignés à l'aide de la seule notation $\overrightarrow{AB}$, ce qui a pour conséquence le traitement des questions d'alignement de trois points à l'aide d'outils portant sur deux couples de points pris parmi ces trois points, ce qui engendre une certaine dissymétrie dans l'approche de la question.

La méthode du double alignement souligne que dans de nombreux problèmes d'alignement, tous les points ne sont pas repérés par rapport à un même point (par son vecteur-position par rapport à ce point) : le premier travail à faire est donc de déterminer les vecteurs-positions manquants, ce qui conduit au sous-problème suivant : déterminer le vecteur-position du point d'intersection de deux droites définies par des points dont on connaît les vecteurs-positions. En général, la résolution de ce sous-problème nécessite l'emploi d'une base, et la confrontation de deux écritures du vecteur-position recherché dans cette base (Voir le « Coffin »).

L'intrication, dans la « configuration fondamentale », de nombreux types de problèmes n'aide pas à identifier les techniques utilisées, et en particulier à cerner leur but véritable ainsi que leur portée. Ainsi, il ne ressort pas assez nettement que la méthode dite « du double alignement » a pour but de déterminer vectoriellement *le point d'intersection* de deux droites, chacune de ces dernières étant définie par deux points dont on connaît (ou dont on peut facilement déterminer) un repérage vectoriel. Ce sous-problème est masqué par l'affichage des types de problèmes étudiés : alignement, parallélisme, concours. Or il intervient en général dans deux d'entre eux, ce qui légitime l'attention qu'il mérite.

Cette brochure souligne que l'étude de ces types de problèmes nécessite une bonne maîtrise du calcul vectoriel, et elle montre l'intérêt de disposer de bases liées à la configuration et judicieusement choisies. En outre, dans la direction qu'elle propose pour l'étude de la « méthode du double alignement », on s'aperçoit qu'elle utilise des représentations paramétriques vectorielles de droites, même si cette notion n'est pas explicitement mise à jour. L'écriture des relations $\overrightarrow{AC} = x\,\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{A'C} = y\,\overrightarrow{A'B}$ est en effet prise en charge par l'énoncé, l'élève étant seulement invité à les utiliser. Que va-t-il se passer lorsqu'on lui laissera la responsabilité de mobiliser lui-même de telles relations paramétriques ? Ce geste n'est pas anodin, et la notion de représentation paramétrique vectorielle permet d'en assurer une meilleure visibilité.

17 – Quelques ouvrages anglo-saxons ; un deuxième exemple : l'ouvrage de Dan PEDOE « Geometry, a comprehensive course » (1970 , réédité en 1988)

Dans la préface, l'auteur précise que cet ouvrage est tiré d'un cours donné à des étudiants des divers niveaux ainsi qu'à des professeurs revenus à l'Université[11] pendant un an pour apprendre davantage de géométrie. Ce livre a d'abord été publié en 1970 par Cambridge University Press à Londres sous le titre « A course of Geometry for Colleges and Universities », puis au Canada par General Publishing Company, par Constable and Company au Royaume Uni, et enfin en 1988 par Dover Publications, à New York. C'est cette dernière édition que nous étudierons.

Le chapitre qui nous concerne est le premier, ainsi présenté par l'auteur dans la préface[12] : « Le chapitre I, qu'il n'est pas nécessaire d'étudier en premier, montre quelles sortes de théorèmes de géométrie euclidienne et affine réelle peuvent être démontrés en utilisant les vecteurs. L'étudiant dont le seul contact avec les vecteurs s'est fait à travers de rares paragraphes dans un livre d'analyse sera peut-être surpris à la vue des théorèmes qui peuvent être ramenés à l'algèbre des vecteurs. Plus loin dans le chapitre, l'algèbre extérieure de Grassmann est introduite et un peu développée, ce qui permet de démontrer la puissance des méthodes alors disponibles. ».

[11] Il s'agit de l'Université du Minnesota.

[12] Traduction assurée par nos soins.

Nous nous intéresserons à la partie de ce chapitre qui traite de la géométrie affine, réservant l'étude de la deuxième partie pour notre paragraphe 2 ci-dessous.
Les paragraphes concernés ont les titres suivants :

11 – Vecteurs dans le plan euclidien (et affine)
12 – Addition des vecteurs liés
13 – Espaces vectoriels
14 – Dépendance linéaire

21 – Notations

31 – Points sur une droite
32 – Premières applications
33 – Le centre de gravité d'un triangle

41 – Théorème de Ménélaüs
42 – Coordonnées barycentriques
43 – Théorème de Céva
44 – Exemples

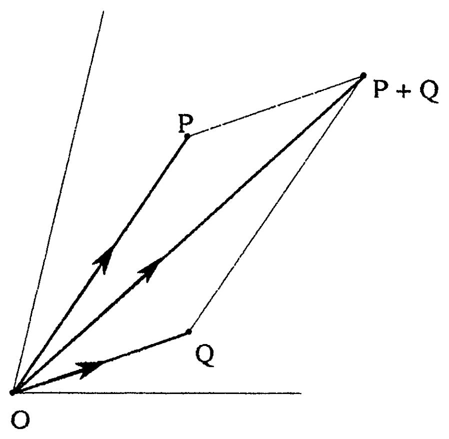
51 – Le cas « affine » du théorème de Desargues
52 – Le théorème de Desargues

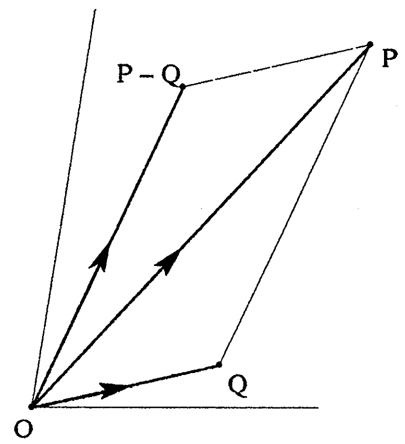
61 – Figures réciproques

Le titre 12 sonne d'une manière particulière aux oreilles d'une personne ayant étudié les mathématiques en France : nous allons voir que l'expression « vecteurs liés » ne recouvre pas les mêmes notions et pratiques que celles qui y sont attachées dans notre pays.
Tout d'abord, afin de placer la notion familière de « segment orienté » sur une base mathématique solide, l'auteur ne répugne pas à utiliser un système d'axes (oblique) et à identifier les points avec leurs couples de coordonnées. Il définit alors le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ comme le couple de nombres réels obtenu en faisant la différence des coordonnées de Q et de celles de P. L'égalité des vecteurs est définie à l'aide de l'égalité des couples de nombres réels : c'est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence contient un unique élément dont la première place est occupée par le couple (0, 0) : on le choisit comme *représentant de la classe*. Ce vecteur joint l'origine O à un point P, appelé le *vecteur-position* du point P.

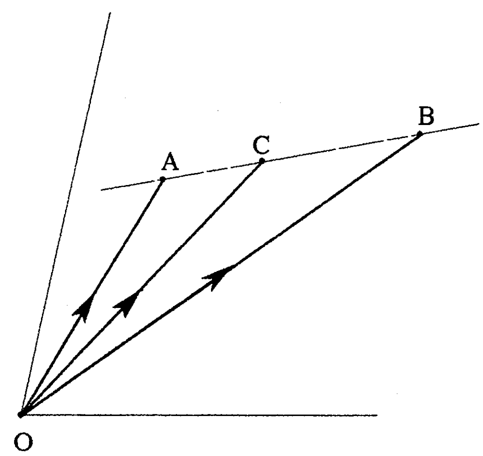
Ce vecteur-position est appelé *vecteur lié*. Les autres vecteurs égaux (les autres éléments de la classe, c'est-à-dire les vecteurs $\overrightarrow{XY}$ égaux à $\overrightarrow{OP}$ tels que $X \neq O$) sont dits *vecteurs libres*.

Par la suite, le vecteur-position $\overrightarrow{OP}$ d'un point P est noté tout simplement P. Ainsi, P est égal au couple des coordonnées du point P dans le système d'axes choisi au départ : $P = (x_1, x_2)$. On devine alors aisément comment sont définies l'addition des vecteurs liés et la multiplication d'un tel vecteur par un nombre ; l'addition et la soustraction sont illustrées à l'aide des traces graphiques suivantes :





Le paragraphe 21 a pour but de préciser une notation, proche de celle utilisée par Coffin, consistant à utiliser la même lettre pour désigner un point et son vecteur-position. Mais alors que Coffin les différenciait en employant majuscule et miniscule, Pedoe adopte une position plus radicale : la même lettre P désignera à la fois un point et son vecteur-position, ce qu'il illustre par le schéma suivant :



On constate pour la représentation graphique d'un vecteur la même particularité que celle relevée chez Fletcher : la flèche n'est pas placée au point dont le vecteur est le vecteur-position (l'extrémité du segment autre que O), mais en un point du segment.

Ceci est à mettre en relation avec l'utilisation pratique de ce type de schéma, qui est quasiment nulle dans les résolutions de problèmes car, comme nous le verrons plus loin, aucune lecture de tels graphiques visualisant des vecteurs ne sera nécessaire.
Cette notation permet également de relier un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ libre (au sens de Pedoe) avec les vecteurs liés $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ sous une forme particulièrement simple, dont l'importance dans l'œuvre de Grassmann a déjà été soulignée :

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

Enfin, à l'aide de la notation ainsi introduite, une expression du type $x\,A + y\,B + z\,C$ désigne une combinaison linéaire de trois vecteurs.

Le paragraphe qui nous intéresse le plus est évidemment celui concernant les « points sur une droite ». On va y retrouver des théorèmes déjà évoqués dans les ouvrages de Coffin et de Chatellun, avec des énoncés plus précis que dans le « Coffin », et énoncés de manière différente de celles du « Chatellun », permettant une meilleure visibilité de leur rôle dans les résolutions de problèmes. Ces théorèmes sont évidemment tous démontrés, des applications simples en sont rédigées, et des exercices complémentaires (peu nombreux, mais choisis avec soin) permettent au lecteur de revenir d'une autre manière sur leur formulation ou sur leur démonstration, et de les appliquer.
Énonçons ces théorèmes, qui sont au nombre de quatre.

Théorème 1 :
Si C est un point quelconque de la droite déterminée par deux points distincts A et B, alors on peut toujours écrire :

$$C = (1-t)A + t\,B,$$

le rapport $\dfrac{t}{1-t}$ étant égal au rapport $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Théorème 2 :
Si A, B et C sont des points alignés, alors il existe des nombres réels x, y, z, non tous nuls, tels que :
$x + y + z = 0$ et $x\,A + y\,B + z\,C = 0$.

Théorème 3 (réciproque du théorème 2) :
Si A, B et C sont des points donnés, et si x, y, z sont des nombres réels non tous nuls, tels que $x + y + z = 0$ et $x\,A + y\,B + z\,C = 0$, alors A, B et C sont alignés.

Théorème 4 (qui se déduit immédiatement du précédent) :
Si A, B et C sont des points non alignés, et si x, y, z sont des nombres réels tels que $x + y + z = 0$ et $x\,A + y\,B + z\,C = 0$, alors $x = y = z = 0$.

Aux trois premiers théorèmes sont attachées des techniques qui vont être fortement sollicités dans les problèmes d'alignement :

– le théorème 1 sert à convertir une situation de « point qui divise un segment dans un rapport donné » en relation vectorielle, et inversement, pourvu que la somme des coefficients apparaissant dans la combinaison linéaire soit égale à 1.

– le théorème 2 sert à traduire vectoriellement l'alignement de trois points, à l'aide de leurs seuls vecteurs-positions.

– le théorème 3 sert à démontrer vectoriellement l'alignement de trois points.

Quant au théorème 4, il aura essentiellement un rôle pour démontrer des théorèmes vus ultérieurement. Il a donc, contrairement aux trois théorèmes qui précèdent surtout un rôle au niveau technologique de l'organisation mathématique de Pedoe.

Comme dans le « Coffin » , et de nombreux autres ouvrages de calcul vectoriel d'origine anglo-saxonne[13], la première application traitée consiste à démontrer que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Mais la démonstration en est ici beaucoup plus simple, en évitant le recours à des répresentations paramétriques vectorielles. En effet le théorème 1 permet de caractériser le milieu I d'un segment AB par la relation vectorielle :

$$I = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B,$$

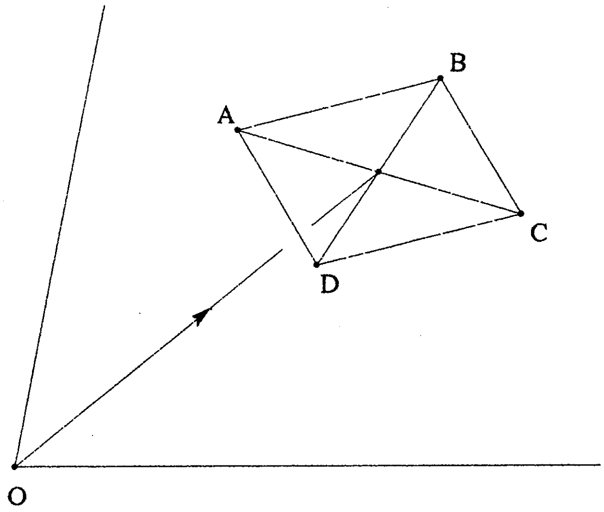
souvent notée I = (A + B)/2, pour éviter le recours à des écritures fractionnaires.

Les notations introduites montrent alors leur efficacité : le résultat est une conséquence de l'équivalence des égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$
$$B - A = C - D$$
$$B + D = C + A$$
$$(B + D)/2 = (C + A)/2$$

La représentation graphique qui l'accompagne met bien en valeur la préoccupation principale : déterminer les vecteurs-positions des milieux des diagonales.

[13]On peut citer par exemple : HAY G.E., 1953, Vector and Tensor Analysis, Dover Publications, New York.



Les théorèmes précédents permettent de démontrer tout aussi simplement le fait que, dans un triangle, le point situé sur une médiane au tiers à partir de la base est commun aux trois médianes (on a vu que Coffin proposait une démonstration de ce résultat sans supposer connue la position de ce point sur l'une d'entre elles : il a été imité par de nombreux auteurs anglo-saxons sur ce point[14]).

Les exercices choisis montrent que l'auteur est conscient du dépaysement que risque de provoquer le théorème 1. Son énoncé cache en effet le fait que la relation $C = (1 - t)A + t B$ est équivalente à $\overrightarrow{AC} = t\ \overrightarrow{AB}$, fait pourtant bien visible dans la démonstration du théorème 1. C'est pourquoi le premier exercice demande au lecteur de placer le point C sur la droite AB lorsque t varie dans R. En fait, au sujet du théorème 1, en vue de ses utilisations dans les problèmes, il convient de retenir l'équivalence entre les trois égalités suivantes :

$$C = (1 - t)A + t B,$$

$$\overrightarrow{AC} = t\,\overrightarrow{AB},$$

$$\frac{t}{1-t} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$

Un autre exercice interroge le lecteur sur la position du point C défini par la relation vectorielle $C = k A + k' B$, lorsque $k + k' = 1$, puis lorsque $k + k' \neq 1$. Notons C_1 le point obtenu dans le premier cas, et D celui obtenu dans le deuxième. On a :
$D = (k + k')\, C_1$, ce qui montre l'intérêt de considérer dans les deux cas le barycentre de (A, k) et (B, k'). Mais l'auteur ne l'évoque pas ici, pas plus qu'il n'évoque la notion de barycentre dans le paragraphe pourtant intitulé « Coordoonnées barycentriques »,

[14]En plus de la référence indiquée à la note précédente, on peut citer :
RUTHERFORD D.E., 1954, *Vector methods applied to differentiel geométry, mechanics, and potential theory*, Oliver and Boyd, Edinburgh and London, Interscience publishers, New York.

coordonnées dont il préfère souligner l'autre nom (coordonnées aréolaires) afin d'indiquer que ces coordonnées peuvent s'expriment sous forme de rapports d'aires algébriques de triangles.

La suite concerne les théorèmes et questions classiques que nous avons évoqués : leurs démonstrations utilisent les théorèmes relatifs aux combinaisons linéaires de vecteurs dont les coefficinets ont des sommes nulles ou égales à 1, ce qui rappelle la démarche vue dans le « Chatellun ».

Nous aurons l'occasion de voir dans le paragraphe 2 suivant que l'intérêt principal de cet ouvrage est de conserver en géométrie euclidienne ces notations valables pour la géométrie affine en les complétant par une notion et une notation nouvelle propre à la structure euclidienne, permettant ainsi non seulement de modéliser vectoriellement les configurations affines, mais également les configurations de la géométrie euclidienne, en conservant tous les acquis antérieurs en ce domaine.

Commentaire didactique sur l'organisation mathématique du « Pedoe »

Il a déjà été partiellement fait lors de la description du contenu du chapitre concerné. En résumé, on peut dire que, malgré le niveau assez élevé des lecteurs potentiels de l'ouvrage, tous les niveaux d'une organisation mathématique y sont sollicités, en particulier les types de problèmes (alignement), les techniques pour les résoudre (combinaisons linéaires de vecteurs-positions dont la somme des coefficients est nulle) et bien sûr les niveaux technologico-théoriques. La présence des théorèmes de Ménélaüs et de Céva, démontrés à l'aide des premiers théorèmes, rend cependant ces derniers souvent inutiles. Dans une organisation mathématique ne les faisant pas apparaître au niveau technologique (ce qui est en général le cas au niveau du lycée), ils garderaient tout leur intérêt.

On remarquera que la théorie du barycentre ainsi que ses applications sont ici complètement passées sous silence.

18 – Une publication de l'IREM de Bordeaux : « L'enseignement des vecteurs, Quatrième, Troisisème, Seconde » (1992)

Le Groupe de Géométrie de l'IREM de Bordeaux a publié en 1992, dans sa collection « Contribution à l'enseignement de la Géométrie », un fascicule[15] concernant l'enseignement relatif aux vecteurs de la classe de Quatrième à la classe de Seconde, se plaçant dans le cadre des programmes en vigueur à cette époque ; en particulier, les

[15]GOUTEYRON A., BOUSCASSE J.-M., CHAUMET M.-C., COLMEZ F., DAMEY P., PINET B., PUYOU J., ROBERT Y., (1992), *L'Enseignement des vecteurs,* IREM de Bordeaux.

vecteurs sont introduits à partir de transformations géométriques, comme en témoigne le plan de l'ouvrage :

1 - Translations et vecteurs

2 - Composée de deux translations. Somme de deux vecteurs.

3 - Repérage d'un point dans le plan. Effet d'une translation sur les coordonnées d'un point.

4 - Le Calcul vectoriel. (Le plan vectoriel, addition vectorielle, multiplication d'un vecteur par un nombre réel).

Dans un préambule, les auteurs se livrent à une comparaison des concepts de longueur et de vecteur en termes de groupe opérant sur un ensemble, que nous résumerons à l'aide du tableau ci-dessous :

Groupe opérant	Ensemble sur lequel il opère	Grandeur géométrique visée
Groupe des déplacements du plan	Paire de points	Longueurs
Groupe des translations	Couples de points	Vecteurs

Ils opposent alors les deux situations, d'une part sur le plan mathématique, d'autre part sur le plan didactique :

– pour les longueurs, il est facile de distinguer le groupe qui opère de la grandeur géométrique visée; d'autre part, il n'est guère question, avec des débutants, d'introduire les déplacements avant les longueurs ;

– dans le cas des vecteurs, le groupe opérant et la grandeur géométrique visée sont du même ordre de complexité mathématique ; dans quel ordre convient-il d'introduire dans l'enseignement le « vecteur d'une translation » et le « vecteur d'un couple de points » ? À quel moment introduire le second, et comment ?

Ils évoquent alors la réponse adoptée dans la tradition scolaire française, qu'ils qualifient de « réponse traditionnelle » : on parle d'abord de vecteurs de couples de points, pour pouvoir disposer des vecteurs pour nommer une translation. Ils contestent la pertinence d'une telle approche, la notation $t_{(A,B)}$ étant aussi claire que la notation $t_{\overrightarrow{AB}}$. Quant à la notation d'un vecteur à l'aide d'une seule lettre ($\vec{u}$), ils la réservent pour la classe de Seconde, la notation $t_{\vec{u}}$ pour une translation étant alors justifiée. C'est précisément la position retenue par les rédacteurs des programmes qui sont alors en vigueur.[16]

[16]Mais dans les programmes ou leurs compléments, on ne trouve aucune justification (d'ordre mathématique ou didactique) relative aux choix adoptés.

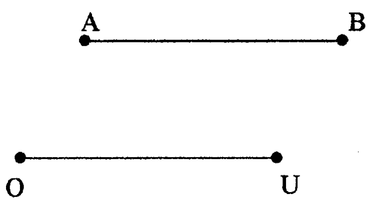
On peut constater l'importance accordée aux notations dans l'argumentation qui précède. Mais nous allons voir que les auteurs donnent à cette notation une signification et un rôle différents de ceux qu'elle jouait dans la tradition récente de l'enseignement français à ce niveau.

En effet, dans leur quatrième partie, intitulée « Calcul vectoriel » , et relative à l'enseignement des vecteurs au niveau de la Seconde, après avoir introduit la notation $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ pour désigner l'ensemble des vecteurs du plan, ils consacrent un paragraphe entier à l'identification de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ avec le plan $\mathscr{P}$ muni d'un point origine, cette identification générant une nouvelle notation pour les vecteurs, assortie d'une convention d'emploi que nous allons préciser.

D'abord, le vocabulaire suivant est introduit :

« Lorsqu'on choisit un point de référence dans le plan, on dit que l'on « *pointe* » le plan. Ce point de référence, sorte de nombril de $\mathscr{P}$, est traditionnellement noté O et appelé *point origine* de $\mathscr{P}$. Un plan muni d'un point origine est dit *pointé* ; on le note $\mathscr{P}_O$ (lire : p, O). ».

Quels que soient les points A et B d'un plan pointé $\mathscr{P}_O$, l'unique point U tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OU}$ est appelé *l'image* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le plan pointé $\mathscr{P}_O$.



Quant à la convention d'emploi, elle consiste à noter $\vec{u}$ le vecteur dont l'image est le point U et, d'une manière générale, par une seule lettre minuscule surmontée d'une flèche le vecteur dont l'image dans $\mathscr{P}_O$ est désignée par la lettre majuscule de même nom.

De l'identification entre un vecteur et un point de $\mathscr{P}_O$ d'une part, de la convention d'emploi d'autre part, il résulte que si A et B sont des points de $\mathscr{P}_O$, et si U désigne l'image du vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors $\vec{u}$ devient automatiquement une nouvelle désignation de ce vecteur, ce que l'on note : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Inversement, si on a décidé de noter $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors U désigne automatiquement l'image de ce vecteur dans $\mathscr{P}_O$.

Les auteurs précisent plus loin que, malgré le caractère un peu trop contraignant de cette convention d'emploi de la notation $\vec{u}$, il serait à leur avis « dommageable de ne pas la respecter au moins pendant la période de mise en place du calcul vectoriel. ».

Ils terminent le paragraphe en question par une remarque relative à la terminologie. Lorsque les vecteurs étaient présentés comme classes d'équivalence de bipoints pour la relation d'équipollence, on utilisait de manière légitime la terminologie « Soit $\vec{u}$ un vecteur, (A, B) un représentant de $\vec{u}$ ». Avec la présentation des vecteurs qu'ils proposent ici à partir des translations, cette terminologie n'est plus légitime, et ils proposent de la remplacer par la suivante : « Soit $\vec{u}$ un vecteur, (A, B) un bipoint de vecteur $\vec{u}$ », expression qu'ils ont déjà employée lors de l'introduction des vecteurs : au lieu de dire que les bipoints (A, B) et (C, D) ont même direction, même sens et même longueur, ils proposent de dire de manière plus concise qu'ils « ont même vecteur ».

Quelle utilisation les auteurs font-ils de ces nouvelles notations et conventions ?

– La première occasion d'emploi de la notation $\vec{u}$ est évidemment la nouvelle façon de désigner une translation (la notation $t_{\vec{u}}$ évoquée précédemment) qui est mise à profit pour traiter de l'addition vectorielle : elle permet en effet, tout en conservant l'approche par la composition des translations utilisée en classe de Troisième, d'introduire une notation plus efficace et plus concise pour énoncer les propriétés algébriques de cette opération ; on retrouve d'ailleurs cette notation dans le texte même du programme.
– La notation $\vec{u}$, mais surtout la « convention d'emploi » des lettres minuscule et majuscule pour désigner respectivement un vecteur et son (point) image trouvent dans la définition de la multiplication d'un vecteur par un nombre leur véritable utilisation : en effet, leur emploi permet de ramener le problème à la droite (OU) : le produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre réel k est le vecteur $\vec{v}$ tel que V soit le point de la droite (OU) ayant k pour abscisse dans le repère (O, U). Cette définition mettant en rapport le registre des écritures vectorielles et celui du calcul littéral permet d'exhiber un schéma de démonstration pour la plupart des propriétés algébriques de la multiplication externe :

– on transcrit les données « vectorielles » en langage numérique (littéral) :
$\vec{v} = \alpha(\beta\vec{u})$ devient ainsi $x_V = \alpha(\beta x_U)$
– on utilise une règle adéquate du calcul littéral : $x_V = (\alpha\beta)\, x_U$
– on transcrit le résultat en langage vectoriel : $\vec{v} = (\alpha\beta)\,\vec{u}$
– il en résulte $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u}$.

– La dernière utilisation de la notation $\vec{u}$ associée à la « convention d'emploi » concerne la géométrie analytique : le plan étant pointé à l'origine du repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), les coordonnées du point M sont les mêmes que celles du vecteur $\vec{m}$ dans la base ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). Les auteurs déduisent ainsi l'unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base de celle de l'unicité des coordonnées d'un point dans un repère.

En revanche, aucune utilisation de cette notation n'est faite dans les exercices : la trentaine d'énoncés qui sont relatifs à cette partie ne fait apparaître que des notations du type $\overrightarrow{AB}$, et leur résolution ne nécessite à aucun moment l'utilisation par les élèves de la notation et de la convention d'emploi si soigneusement mises en place.

En ce qui concerne les problèmes d'alignement, seuls deux exercices en relèvent, et ils mettent tous les deux en jeu des vecteurs égaux, ou la configuration des milieux dans un triangle. Ce type de problèmes n'est donc pas vraiment abordé.

Commentaire didactique relatif à cette brochure :

L'introduction de la notation $\vec{u}$ associée à la convention d'emploi consistant à désigner par une lettre minuscle surmontée d'une flèche pour désigner un vecteur et la même lettre majuscule pour désigner le point image de ce vecteur dans le plan pointé rappelle l'emploi de la notion de « vecteur position » utilisée par Coffin, ainsi que par de nombreux auteurs anglo-saxons. Mais les usages qui sont faits de ces deux ostensifs sont complètement différents. Dans la brochure qui nous occupe, ils servent surtout au niveau technologique de l'organisation mathématique, en particulier pour définir la multiplication d'un vecteur par un nombre et pour en démontrer les propriétés, ainsi que pour justifier les résultats de géométrie analytique. En revanche, dans les techniques (notamment celles où il convient de mettre en relation une figure avec une modélisation en termes de vecteurs) le recours au plan pointé n'est pas explicitement sollicité, et la « convention d'emploi » ne l'est jamais. Elle reste essentiellement sur le territoire du professeur, et ne devient pas un outil pour le travail de l'élève. Nous avons vu précédemment qu'il n'en était pas de même dans les ouvrages utilisant les vecteurs–positions.

On sait combien le passage d'une présentation des vecteurs à l'aide des bipoints équipollents à celle partant des translations a été problématique, notamment auprès des professeurs de lycée, qui y ont souvent vu les marques d'un manque de rigueur et de légitimité. Cette brochure, dont le contenu est conforme à l'esprit des programmes de Collège et de Seconde, permet de restaurer la situation du point de vue de la rigueur de l'organisation mathématique qu'elle propose : le professeur y trouve certainement son compte.

Les types de problèmes relatifs au calcul vectoriel (classe de Seconde) donnent une large place aux translations, aux parallélogrammes, aux questions mettant en jeu des milieux. Ils sollicitent donc essentiellement des outils déjà manipulés en Troisième, et ne recourent guère à l'emploi de la multiplication externe, ce qui explique le rareté de problèmes d'alignement. Le véritable usage de la multiplication externe est réservé à la mise en place de l'homothétie, qui fait l'objet d'une annexe.

Les activités expérimentales qui figurent au début de chaque introduction de notion ou concept nouveau a pour but de dégager les éléments technologico-théoriques de l'organisation mathématique, les exercices proposés étant vus comme des « applications » de ces éléments ; l'accent n'est mis ni sur les techniques pour les résoudre ni sur les types de problèmes.

19 – Quelques ouvrages anglo-saxons ; un troisième exemple : un manuel scolaire actuellement utilisé en Allemagne (1995-1996)

Nous évoquerons dans ce paragraphe une collection de manuels de mathématiques pour le lycée « LS Mathematik »[17], utilisée dans plusieurs lands en Allemagne. Les programmes de lycée sont très différents de ceux enseignés en France. C'est la raison pour laquelle nous donnerons quelques éléments relatifs aux contenus enseignés avant qu'interviennent les vecteurs, avant de détailler davantage l'enseignement relatif à ces derniers.

Pour les lands en question, le manuel LS9 (niveau 9) décompose le programme de Seconde en huit chapitres dont nous ne donnerons que les titres (accompagnés éventuellement de précisions) :

1 - Nombres réels
2 - Calculs avec les racines carrées
3 - Questions d'aires dans les triangles (incluant le théorème de Pythagore)
4 - Fonctions polynômes du second degré
5 - Équations du second degré
6 - Similitude (Homothéties de rapport positif, sans utilisation de vecteurs, triangles homothétiques en « situation de Thalès », homothéties de rapport négatif définies comme composée d'une homothétie de rapport positif avec une symétrie centrale de

---

[17]Il s'agit de la collection LAMBACHER et SCHWEIZER, publiée chez Ernst Klett. Nous avons utilisé les manuels suivants :
- LS 9 (classe de Seconde), sous la direction de SCHMID A. et WEIDIG I., par LIND D., MÜLLER A., RIEMER W., SCHERMULY H., WEIGIG I., ZIMMERMANN P, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig, 1996, édition pour le land de Nordrhein–Westfalen.
- LS 10 (classe de Première), par les mêmes auteurs,1996.
- LS Analytische geometrie, grunkurs, (classe de terminale, matière de base obligatoire), sous la direction de SCHMID A. et SCHWEIZER W. par BÜRKER M., JONCZYK S., SCHEID H., SCHMID A. et avec la collaboration de GERLACH H., Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig, 1996.
- LS Analytische geometrie, Leitstungskurs, classe de terminale, matière principale), sous la direction de SCHMID A. et SCHWEIZER W. par BÜRKER M., KOLLER D., MÜTZ K., SCHEID H., SCHMID A. et avec la collaboration de Gerlach H., Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig, 1995.

même centre, figures semblables, cas de similitude des triangles, figures semblables dans un cercle)

7 - Calculs classiques de probabilités

8 - Exemples d'emploi de la formule de Bayes.

Pour le programme de Première, les chapitres du manuel LS 10 sont les suivants :

1 - Puissances (jusqu'aux exposants irrationnels)

2 - Fonctions puissances

3 - Expérience de Bernoulli (loi en $1/\sqrt{n}$)

4 - Fonctions exponentielles (puis fonctions logarithmes)

5 - Calculs dans le cercle

6 - Calculs dans les solides (prismes, cylindres, principe de Cavalieri, pyramides, cônes, troncs de pyramides et de cônes, sphères)

7 - Introduction à la trigonométrie (trigonométrie dans le triangle rectangle, relations entre les lignes trigonométriques de α et de $90° - \alpha$, relation $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$).

8 - Fonctions trigonométriques

9 - Calculs trigonométriques (lois des sinus, loi du cosinus dans un triangle quelconque, résolution des triangles).

Les vecteurs font leur apparition seulement dans les manuels de terminale. Celui concernant la matière obligatoire (« Grundkurs » conduisant aux baccalauréats dans lesquels les mathématiques ne sont pas matière principale) est organisé en cinq chapitres ayant les titres suivants :

1 – Vecteurs et systèmes d'équations linéaires

2 – Droites et plans

3 – Longueurs. Distances. Angles

4 – Le cercle et la sphère

5 – Ellipses.

Le manuel relatif aux classes plus scientifiques, dans lesquelles les mathématiques sont une discipline principale, en comporte six :

1 – Systèmes d'équations linéaires

2 – Espaces vectoriels

3 – Droites et plans

4 – Longueurs et angles

5 – Le cercle et la sphère

6 – Applications affines.

Nous allons détailler le contenu du chapitre intitulé « Droites et plans », qui est celui dans lequel le type de problèmes qui nous occupe est abordé.

Dans les deux manuels, les vecteurs sont introduits dans l'un des chapitres qui précèdent à partir des translations. Deux notations sont alors introduites : d'abord la notation

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ pour désigner une translation sans faire référence à un point particulier, ensuite la notation $\overrightarrow{PQ}$. En trois pages sont traitées :

– l'addition vectorielle (à partir de la composition des translations[18], sont mises en évidence la règle du parallélogramme et la commutativité de l'addition ; la relation de Chasles $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ n'est pas mise en valeur, le nom de Chasles n'apparaît nulle part) ;

– la soustraction (la relation de Chasles sous la forme $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}$ est citée ainsi que la relation $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, où $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{PB}$, P désignant un point quelconque) ;

– la multiplication d'un vecteur par un scalaire (S-multiplication, dont toutes les propriétés sont admises).

– la notion de combinaison linéaire.

Ensuite, sont abordées les notions de dépendance et indépendance linéaire et, d'une manière plus succinte, de base.

• Le chapitre « Droites et plans » commence dans les deux livres par un paragraphe intitulé « Vecteurs-positions » (Orstvektoren), nom donné au vecteur $\overrightarrow{OA}$ permettant de repérer le point A à partir d'un point origine O, et noté $\vec{a}$. Dans le manuel le plus complet, une introduction précise l'objet de la géométrie analytique[19] :

« Les points du plan et de l'espace seront dans la suite décrits, moyennant l'emploi d'un système de coordonnées, à l'aide de vecteurs, c'est-à-dire à l'aide d'objets mathématiques avec lesquels on peut " calculer ". Ainsi, on peut traiter un problème de géométrie avec des méthodes algébriques. On parle alors de géométrie " analytique ". Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser dans l'ensemble aux droites et aux plans de l'espace, et en particulier à l'étude des intersections (point d'intersection, droite d'intersection) au point milieu. »

Les premiers exemples traités dans les deux manuels sont les mêmes : milieu d'un segment, centre de gravité d'un triangle. On précise leurs vecteurs-positions :

$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$;

pour le centre de gravité S du triangle ABC, on utilise sa position sur la médiane [CM]:

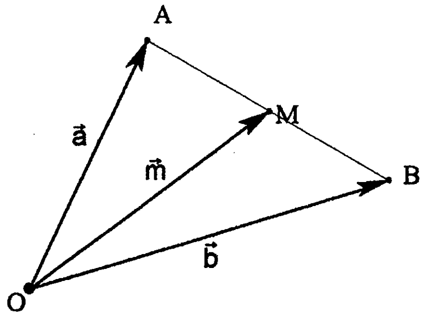
$\vec{s} = \vec{m} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{m}) = ... = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

La seule différence se situe au niveau des graphiques illustrant ces résultats : dans le manuel le plus « fort », le système d'axes n'est pas représenté, et seuls les exercices y font allusion.

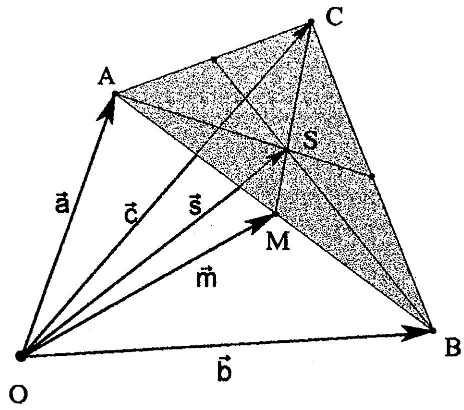
---

[18] On y admet que la composée de deux translations est une translation.

[19] Traduction assurée par nos soins.



$\vec{m} = 1/2\,(\vec{a} + \vec{b})$



$\vec{m} = 1/3\,(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

Le deuxième paragraphe du chapitre est consacré aux droites (dans le plan ou dans l'espace). Le théorème fondamental est le suivant :

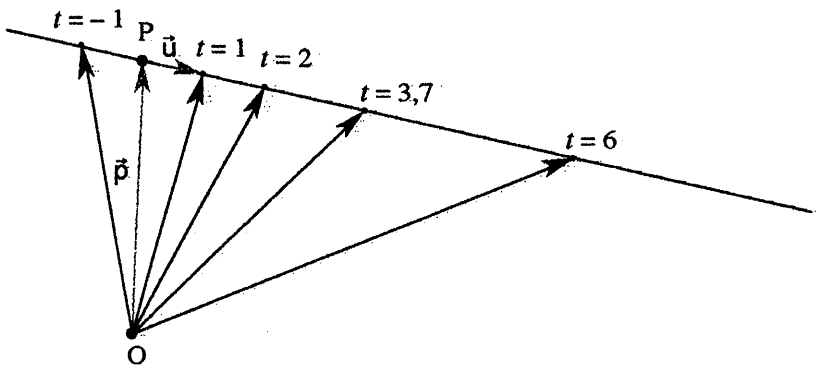
Soit P un point de vecteur-position $\vec{p}$, et $\vec{u}$ un vecteur différent du vecteur nul.

Alors les points X ayant pour vecteur-position $\vec{p}$ tel que

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} \quad (\, t \text{ appartenant à } \mathbf{R})$$

constituent une droite passant par P.

Il est précédé par le schéma suivant :



$\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{u}$ est appelé « équation paramétrique » de la droite d, ce que l'on note $d : \vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{u}$.

Les vecteurs $\vec{p}$ et $\vec{u}$ sont respectivement appelés « vecteur d'appui » et « vecteur directeur » de la droite d, t est appelé « paramètre » de l'équation.

Il est ensuite précisé que pour une droite définie par deux points P et Q, on peut prendre indifféremment $\vec{p}$ ou $\vec{q}$ comme vecteurs d'appui et $\vec{p} - \vec{q}$ ou $\vec{q} - \vec{p}$ comme vecteur directeur.

Le premier type d'exercices (Punkprobe) relève du type de problèmes qui nous intéresse. Trois points sont donnés à l'aide de leurs vecteurs-positions : il s'agit de déterminer s'ils sont alignés. Mais tous les exercices (corrigés ou non) sont donnés dans le plan ou dans l'espace munis d'un système d'axes ; la représentation paramétrique vectorielle de la droite définie par deux d'entre eux est transformée en représentation paramétrique cartésienne du type :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}$$

et le problème se ramène alors à la résolution d'un système de deux ou trois équations linéaires à une inconnue t.

• Après avoir traité à l'aide des mêmes outils la question relative à l'intersection de deux droites (dans le plan ou dans l'espace), on passe à la description d'un plan à l'aide d'une représentation paramétrique vectorielle : $\vec{x} = \vec{p} + t\,\vec{u} + s\,\vec{v}$. Le même type de problèmes (Punkprobe) est traité dans les mêmes conditions, en ramenant la question à la résolution d'un système d'équations linéaires. Ensuite, les auteurs introduisent la notion d'équation cartésienne d'un plan, et traitent du passage d'une telle équation à une représentation paramétrique cartésienne et du passage en sens inverse, ce qui fournit un cadre suffisant pour traiter les questions d'intersection de droites et de plans, d'intersection de deux plans. Les exercices se placent en général dans le plan ou l'espace munis d'un système d'axes (repère orthonormal) ; on note cependant quelques exceptions relatives à l'étude d'intersections de droites et de plans dans des configurations telles que le parallélépipède, ou la pyramide, mais une base de l'espace liée à la configuration est alors donnée dans l'énoncé.

• Le chapitre se termine par un paragraphe intitulé « Teilverhältnisse », que l'on pourrait traduire par « rapport de partage », qui fait apparaître des notions, notations ainsi qu'une technique originales par rapport aux habitudes françaises ; ces outils vont permettre de traiter des questions qui, traditionnellement en France, apparaissent comme des applications classiques du barycentre.

Par définition, si T est le point de la droite AB tel que $\overrightarrow{AT} = t\,\overrightarrow{TB}$, alors t est appelé « Teilverhältnisse » du triplet de points (A, T, B) et noté TV(ATB).

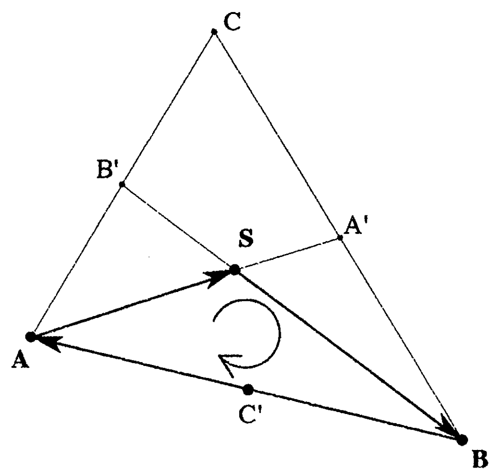
Dans les deux manuels, on souligne le passage de « $\overrightarrow{AT} = r\,\overrightarrow{AB}$ » à l'expression de TV(ATB) en fonction de r, débouchant sur un théorème :

Si $\overrightarrow{AT} = r\,\overrightarrow{AB}$, alors $\mathrm{TV(ATB)} = \dfrac{r}{1-r}$.

Mais dans l'ouvrage le moins approfondi, on ne considère que des points appartenant au segment [AB], alors que dans l'autre, T désigne un point de la droite (AB) ; de plus, dans ce dernier, on formalise davantage le cas où T appartient au segment, en soulignant l'équivalence entre $\overrightarrow{AT} = \dfrac{m}{n}\,\overrightarrow{TB}$ et $\overrightarrow{AT} = \dfrac{m}{m+n}\,\overrightarrow{AB}$, accompagnée par le schéma suivant :

dans lequel le point T divise le segment [AB] dans le rapport $m : n$. Enfin, on y traite également le passage de TV(ATB) = t à la relation $\overrightarrow{AT} = \frac{t}{1+t}\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de transformer toute relation entre $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{TB}$ en une relation entre $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{AB}$ et inversement.

La technique particulière évoquée ci-dessus concerne un type de problèmes bien précis : déterminer le « Teilverhältnisse » d'un triplet de points.
Nous allons l'illustrer à l'aide de l'exemple du centre de gravité d'un triangle, traité dans les deux manuels. Il s'agit cette fois-ci de démontrer à l'aide du calcul vectoriel que les médianes d'un triangle se coupent en un point S partageant chacune d'elles dans le rapport 2 : 1.
Considérons un triangle ABC dont les médianes [AA'] et [BB'] relatives aux sommets A et B se coupent en un point S. On va déterminer TV(ASA') et TV(BSB'), à l'aide de la technique en question. Elle comporte trois étapes .
– La première exige un schéma :



Elle consiste à chercher des vecteurs de somme nulle, dans lesquels les points extémités A et B des deux segments en question ainsi que le point S apparaîssent à la fois comme origine et comme extrémité. Par exemple :

$$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0} \quad (1)$$

Cette étape donne d'ailleurs son nom à la méthode que l'on peut traduire ainsi : « procédé du circuit fermé de vecteurs » (Verfahren des geschlossen Vektorzugs).
– La deuxième consiste à écrire tous les vecteurs à l'aide de deux vecteurs linéairement indépendants, par exemple ici, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, que les auteurs décident de noter $\vec{a}$ et $\vec{b}$, se libérant ainsi de l'emploi usuel de ces notations pour désigner des vecteurs-positions.

Il convient alors d'introduire des scalaires témoignant de l'alignement de A, S et A' d'une part, de B, S et B' d'autre part. Ils choisissent d'écrire :

$\overrightarrow{AS} = x\,\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{SB} = y\,\overrightarrow{B'B}$.

On obtient alors :

$\overrightarrow{AB} = x\,(\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}))$

$\overrightarrow{SB} = y\,(\vec{a} - \frac{1}{2}\,\vec{b})$

$\overrightarrow{BA} = -\,\vec{a}$.

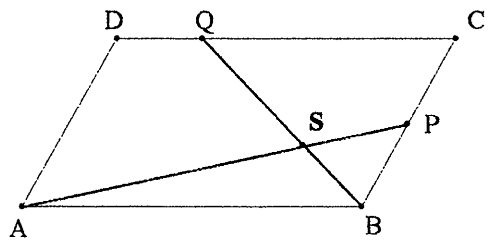
– Dans la troisième étape, en reportant ces expressions dans (1), on obtient après quelques calculs une combinaison linéaire nulle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dont les coefficients sont donc nuls : $\frac{1}{2}x + y - 1 = 0$ et $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$.

La résolution de ce système donne $x = y = \frac{2}{3}$.

On en déduit $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\ \overrightarrow{AA'}$ et donc $\overrightarrow{AS} = 2\ \overrightarrow{SA'}$. Ainsi TV(ASA') = 2 : 1. De même TV(BSB') = 2 : 1.

L'alignement de A, S et C' est ensuite démontré en exprimant le vecteur $\overrightarrow{CS}$ en fonction de $\overrightarrow{CC'}$: pour cela chacun des vecteurs est exprimé dans la base formée par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

La rubrique d'exercices fait apparaître un important entraînement au passage de l'une des deux relations « $\overrightarrow{AT} = t\ \overrightarrow{TB}$ » et « $\overrightarrow{AT} = r\ \overrightarrow{AB}$ » à l'autre. Certains exercices d'application du « Teilverhältnisse » concernent des configurations, sans faire intervenir de système d'axes. Dans les deux manuels figurent des études de configurations analogues à celles que nous avons trouvées dans les manuels actuels de Seconde en France. Par exemple :



ABCD est un parallélogramme. Q est au trois quarts de [CD] à partir de C (TV(CQD) = 3), P est le milieu de [BC]. S est le point d'intersection de [AP] et [BQ]. Il s'agit de déterminer TV(ASP) et TV(BSQ). La technique des « circuits fermés de vecteurs » est ici utilisable.

Dans un manuel français actuel de Seconde, on aurait probablement décrit cette configuration de la manière suivante :

– la position de Q sur [CD] est donnée à l'aide d'une relation entre deux des vecteurs mettant en jeu les trois points C, D, Q ;

– la position de S sur l'un des segments [AP] (ou [BQ]) est définie de la même manière ;
La question posée consisterait à démontrer, à l'aide du calcul vectoriel, que les points B, S et Q (ou A, S et P) sont alignés.
On notera le caractère artificiel d'une telle construction d'énoncé, quand on la met en regard avec celle proposée dans le manuel que nous étudions.

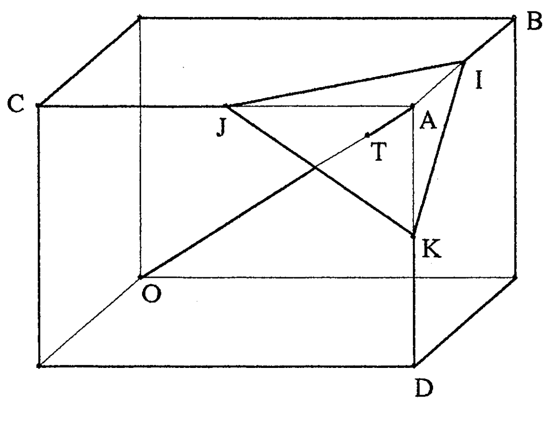
Dans l'ouvrage approfondi, on retrouve dans le cadre des exercices corrigés les thèmes suivants :
– le centre de gravité S d'un tétraèdre ABCD et sa localisation sur chacun des segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée à l'aide des relations :
TV(ASA') = TV(BSB') = ... = TV(DSD') = 3 ;
– le théorème de Céva (et sa réciproque en exercice) ;
– le théorème de Ménélaüs (et sa réciproque en exercice).

Signalons enfin, dans ce même manuel, un exercice dont le but est de mettre en relation le Teilverhältnisse (TV) avec une équation paramétrique vectorielle d'une droite : il s'agit d'interpréter en terme de TV le paramètre t d'un point dans la représentation paramétrique suivante :

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} + t\,\vec{b}}{1 + t}$$ (t désignant un réel différent de – 1).

Mais aucune réutilisation du résultat dans d'autres exercices n'est envisagée explicitement.

En revanche, l'utilisation de représentations paramétriques vectorielles est mise en œuvre dans des exercices corrigés concernant des problèmes de géométrie dans l'espace, type de problèmes pour lequel aucun exemple de mise en œuvre de la technique des « circuits fermés de vecteurs » n'est présentée dans les exercices corrigés. Nous citerons un exemple d'un tel exercice :



I, J et K désignant les milieux respectifs des arêtes [AB], [AC] et [AD] du parallélépipède rectangle, il s'agit de montrer que la diagonale [OA] coupe le plan (IJK) en un point T tel que TV(OTA) = 5.
La résolution de cet exercice met en œuvre une représentation paramétrique vectorielle de la droite (OA) et une représentation paramétrique vectorielle du plan (IJK) ; tous les vecteurs en question sont exprimés à l'aide des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$: on obtient alors un système linéaire ayant pour inconnues les trois paramètres utilisés, dont la résolution donne le TV recherché[20].

Précisons que dans les deux manuels, des exercices analogues à celui qui précède sont donnés auparavant dans un cadre analytique, la configuration étant donnée par l'intermédiaire des coordonnées de certains de ses points dans un repère cartésien.

Commentaire didactique relatif à ces manuels

• *Dans le manuel « Grundkurs »*, du point de vue de l'organisation mathématique, on remarque que les équations paramétriques vectorielles (ou représentations paramétriques vectorielles) de droites et de plans n'interviennent qu'au niveau technologique, dans laquelle la notion de vecteur-position est fortement utilisée. Du point de vue des techniques, seules les représentations paramétriques cartésiennes interviennent en ce qui concerne les problèmes d'alignement.
L'introduction du « Teilverhältnisse » (TV) fournit un moyen puissant pour modéliser des configurations sans avoir recours à un système d'axes extérieur à la configuration ; la technique permettant de passer d'une relation vectorielle liant trois points alignés à une relation en terme de TV fait l'objet d'un important travail d'entraînement. Le TV permet également de retrouver par le calcul vectoriel des propriétés de configurations déjà étudiées sans faire intervenir la théorie du barycentre, qui n'est pas abordée dans ce manuel. Seul est défini, en terme de vecteurs-positions le centre de gravité d'un triangle, d'un quadilatère : ainsi celui d'un quadrilatère ABCD est le point X tel que $\vec{x} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$. Enfin, une technique particulière lui est associée : le procédé des circuits fermés de vecteurs, permettant de calculer des TV. La description de ce procédé rappelle par sa complexité apparente celles présentées dans les revues IREM que nous avons évoquées dans la troisième partie. Le recours à des vecteurs linéairement indépendants, qui est à l'origine de l'intervention de « circuits fermés de vecteurs », peut

[20] Un lecteur familier des programmes français trouvera cette méthode bien maladroite ; en effet, le point T apparaît comme étant le centre de gravité du triangle IJK : on a donc : $3\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AK} = 1/2\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = 1/2\,\overrightarrow{AO}$; ainsi $6\,\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AO}$, donc TV(OTA) = 5. Mais la méthode présentée dans le manuel a une portée plus grande, et s'applique quelles que soient les positions des points I, J et K sur chacune des arêtes.

paraître surprenant : en effet, le recours à une base paraît largement aussi simple. Il s'explique par le fait que l'emploi de bases formées de vecteurs « attachés » à une configuration n'est pas explicitement travaillé dans le chapitre où les bases sont traitées. Les problèmes de localisation de points d'intersection dans une configuration trouvent ainsi un environnement technologique assez pauvre (TV et vecteurs linéairement indépendants), qui doit être enrichi par l'apport d'une technique complexe, mettant en jeu de manière active le contrôle visuel et le registre graphique et, de manière moins visible, de multiples choix parmi les « circuits fermés » utilisables, ainsi que parmi les diverses manières de traduire vectoriellement les données, sans parler du choix des vecteurs indépendants. On note également la même difficulté que celle déjà signalée à propos de la « méthode du double alignement » dans la brochure de l'IREM d'Aix-Marseille : il faut faire intervenir deux paramètres pour situer le point commun à deux droites sur chacune d'elles, ce qui constitue un geste tout à fait nouveau. Il est prévisible que la mise en œuvre de cette technique par les élèves doit poser des problèmes analogues à ceux posés en France par les méthodes évoquées plus haut. Enfin, on peut remarquer que cette technique nécessite la mise à l'écart provisoire des vecteurs-positions, qui jusqu'ici s'étaient avérés fort utiles, au bénéfice exclusif des vecteurs de la forme $\overrightarrow{AB}$. Comment le professeur peut-il justifier et négocier cette mise à l'écart ?

• *Dans le manuel « Leistungskurs »*, les représentations paramétriques vectorielles de droites et de plans jouent un rôle non seulement au niveau technologique, mais également au niveau des techniques pour localiser des points d'intersection, et déterminer des TV. L'adoption de ces mêmes techniques permettrait de se passer de la méthode des « circuits fermés de vecteurs » aussi bien dans l'espace que dans le plan. Cette dernière bénéficie cependant d'un très bon affichage dans ce manuel : la méthode y est décrite dans un encadré, et la description qui en est donnée met en évidence le fait que sa portée concerne aussi bien les problèmes de géométrie plane que ceux de géométrie dans l'espace. Mais comme nous l'avons déjà remarqué précédemment, les exercices corrigés ne la mettent en œuvre que sur des configurations planes (les mêmes que dans le « Grundkurs »). Cela peut s'expliquer par le fait que la question de l'intersection de deux droites se complique dans l'espace : la technique ne peut s'appliquer que pour localiser le point d'intersection de droites dont on sait (ou dont on démontre auparavant) qu'elles sont sécantes : il est difficile d'exhiber un exercice corrigé suffisamment simple sur un tel sujet. En revanche, on note l'emploi des représentations paramétriques vectorielles dans la localisation du point d'intersection d'une droite (définie par deux points) et d'un plan (défini par trois points). Les représentations paramétriques vectorielles de droites sont d'ailleurs employées également dans l'étude de certaines questions de géométrie plane, telles que la démonstration du théorème de Céva, traitée également en exercice corrigé.

Précisons enfin que l'introduction du Teilverhältnisse (TV) d'un triplet de points est justifiée dans ce manuel par une autre raison, d'ordre technologique : le TV constitue l'un des invariants des applications affines, dont l'étude constitue un chapitre essentiel du manuel.

1. 10 – Plusieurs ouvrages universitaires français récents (de 1985 à 1996)

Dans une sélection d'ouvrages récents destinés à la formation des enseignants, et à la préparation des concours de l'enseignement, nous allons examiner la place et le rôle des énoncés traitant, à côté de la théorie du barycentre, des formes de Grassmann de masse nulle, et en particulier de celles qui sont nulles, questions dont nous avons vu l'intérêt pour les problèmes d'alignement. Tous les ouvrages en question traitent en effet le plongement d'un espace affine dans un espace vectoriel permettant d'unifier dans un même cadre théorique le calcul vectoriel et le calcul barycentrique, ce dernier apparaissant alors comme un cas particulier du premier.

Le Livre du problème[21], Volume 5, consacré au calcul barycentrique introduit dans son premier chapitre « l'espace vectoriel du calcul barycentrique » et ceci de plusieurs manières. Ce chapitre se termine par un résumé des règles de calcul dans cet espace vectoriel, utilisant les notations de Grassmann. Le cas des formes de Grassmann de masse nulle (vecteurs) est bien sûr évoqué, mais le cas où une telle forme est nulle est seulement utilisé dans deux exercices, sans avoir été justifié auparavant. Ainsi, ayant établi dans l'un d'entre eux une relation de la forme $(\beta - \gamma)A + (\gamma - \alpha)B + (\alpha - \beta)C = \vec{0}$, ils concluent à l'alignement des points A, B et C. Dans l'autre, disposant d'une famille de points A_i affinement liés, ils affirment l'existence de scalaires λ_i non tous nuls, de somme nulle tels que $\sum_i \lambda_i A_i = \vec{0}$. On peut penser que lecteur est invité à trouver lui-même la justification (ce qui n'est certes guère difficile), mais sans doute demeurera-t-il surpris de voir les auteurs de la brochure mobiliser un tel résultat. Quant aux problèmes d'alignement, lorsque le calcul barycentrique est d'un maniement délicat (démonstration du théorème de Ménélaüs par exemple), ils suggèrent d'utiliser un repère cartésien attaché à la configuration, et la nullité d'un déterminant.

Le traitement de « l'espace universel » fait l'objet d'un chapitre entier du tome 1 de l'ouvrage « Géométrie » de Marcel Berger[22]. Il l'introduit de deux manières : à l'aide de champs de vecteurs bien particuliers sur un espace affine à valeurs dans l'espace

[21] Irem de Strasbourg, 1975, *Le livre du problème*, volume 5, Calcul barycentrique, Cedic, Paris.
[22] BERGER M., 1979 (2ème édition), *Géométrie, tome 1 : action de groupes, espaces affines et projectifs*, Cédic/Fernand Nathan, Paris.

vectoriel auquel il est associé, et comme espace vectoriel $\hat{X}$ dans lequel l'espace affine X se plonge comme hyperplan affine ne contenant pas l'origine, sa direction $\vec{X}$ étant un hyperplan de $\hat{X}$. La théorie du barycentre est complètement reprise dans ce cadre, mais le cas des combinaisons linéaires dont la somme des coefficients est nulle ne fait pas l'objet d'une étude dans le cas où la combinaison est elle-même nulle.

Dans l'ouvrage de Claude Tisseron, « Géométries affine, projective et euclidienne »[23], l'interprétation d'un espace affine X comme hyperplan affine d'un espace vectoriel $\hat{X}$ fait l'objet d'un thème d'étude. Les relations entre les bases de $\hat{X}$ et les repères de X sont explicitées, mais l'étude des combinaisons linéaires pour traduire l'appartenance à une variété linéaire affine n'est pas abordée. Les applications présentées concernent surtout les quadriques.

La situation change dans les deux ouvrages suivants.

Les fondements de la géométrie, de J. Lelong-Ferrand (1985)

La présentation du plongement canonique d'un espace affine dans un espace vectoriel est conduite selon le même principe que dans l'ouvrage de M. Berger, mais avec d'autres notations. $\mathscr{E}$ désignant un espace affine associé au K-espace vectoriel E, F est un espace vectoriel isomorphe à E x K, F_1 est un hyperplan affine de F auquel on identifie $\mathscr{E}$, dont la direction F_0 est un hyperplan vectoriel que l'on peut identifier à E. L'espace vectoriel F est appelé prolongement vectoriel de $\mathscr{E}$ et noté $\hat{\mathscr{E}}$.

Un tel prolongement permet d'interpréter vectoriellement les barycentres. Plus précisément : (A_i, λ_i) désignant une famille de points pondérés de $\mathscr{E}$, on peut écrire sans précaution des combinaisons linéaires finies $\sum_i \lambda_i A_i$, qui désignent des éléments de $\hat{\mathscr{E}}$. Mais, compte tenu des identifications précédentes, une telle combinaison linéaire ne représente un élément de $\mathscr{E}$ que si $\sum_i \lambda_i = 1$, et un élément de E que si $\sum_i \lambda_i = 0$.

La nouveauté par rapport aux ouvrages précédents apparaît dans ce qui est présenté comme une application du résultat qui précède :
Pour que trois points A, B et C de $\mathscr{E}$ soient alignés, il faut et il suffit qu'il existe des scalaires λ, μ, ν, non tous nuls, tels que : $\lambda + \mu + \nu = 0$ et $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$. (1)

---

[23]TISSERON C., 1988 (Nouveau tirage 1994), *Géométries affine, projective et euclidienne*, Collection Formation des enseignants et Formation continue, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.

On retrouve ainsi l'énoncé déjà rencontré dans le « Coffin ». De plus, l'auteur précise que l'intérêt de ce résultat tient au fait que la relation (1) est symétrique en A, B et C et qu'il est possible d'ajouter de telles relations. Malheureusement, aucun exemple n'est traité pour illustrer ces propos.

Dans la rubrique d'exercices, située à la fin du livre, on trouve plusieurs exercices sollicitant l'emploi de ce résultat. Le premier concerne la fonction vectorielle de Leibniz : il s'agit d'abord de construire un système de trois points A, B et C affectés de masses λ, μ, ν non nulles tel que la fonction $M \mapsto \lambda \overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB} + \nu\overrightarrow{MC}$ soit partout nulle. Une indication est donnée au lecteur : A, B, C doivent être alignés ! Ensuite, on demande de généraliser le résultat au cas de $n + 1$ points appartenant à une variété de dimension inférieure à $n - 1$. Trois autres exercices (démonstration des théorèmes de Desargues, de Ménélaüs, de Pappus, du quadrilatère complet) sont posés de façon à solliciter l'emploi de ce résultat : compte tenu de la généralité des questions traitées, des indications sont données en ce qui concerne les relations du type (1) à démontrer.

L'ouvrage de Jean Fresnel « Méthodes modernes en géométrie » (1996)

Cet ouvrage a d'abord été publié sous forme de polycopié, puis chez Hermann, dans la collection Formation des enseignants et formation continue[24] : dans cette nouvelle édition, les rubriques d'exercices sont considérablement enrichies. Il comporte quatre grandes parties : Géométrie affine, géométrie projective, géométrie euclidienne, géométrie non euclidienne (le plan hyperbolique). Nous nous intéresserons à la première partie.

On y trouve en effet une théorie incluant les formes nulles de Grassmann (même si elles ne sont pas présentées à la manière de Grassmann). Le premier paragraphe est intitulé « Espace affine ; calcul barycentrique », et le premier résultat relatif au calcul barycentrique concerne l'étude des relations de la forme :

$$x - a = \sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} (x_i - a).$$

L'auteur adopte les notations de l'exposé de Bourbaki et de Godement, et note $b - a$ ce que d'autres notent $\overrightarrow{AB}$.

Dans les cas où $\sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}}$ est égal à 1 ou à 0, cette relation définit un objet x unique, noté $\sum_{\mathrm{i}} \lambda_{\mathrm{i}} x_i$, qui est un point dans le premier cas, un vecteur dans le second.

[24]FRESNEL J., *Géométrie*, polycopié diffusé par l'Université de Bordeaux I, 40, rue Lamartine 33 400 - Talence.
FRESNEL J., 1996, *Méthodes modernes en Géométrie*, Collection Formation des enseignants et Formation continue, Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris.

On retrouve l'utilisation des formes nulles de Grassmann dans le paragraphe consacré aux variétés linéaires affines ; elle apparaît dans un corollaire caractérisant les familles affinement liées :

Pour qu'une famille (a_i) de points d'un espace affine E soit affinement liée, il faut et il suffit qu'il existe une famille (λ_i) d'éléments du corps K non tous nuls de support fini, avec $\sum_i \lambda_i = 0$ et $\sum_i \lambda_i a_i = 0$.

Ce corollaire est ensuite utilisé pour démontrer, dans un espace affine de dimension n, une caractérisation des familles affinements liées de $n + 1$ points (familles de $n + 1$ points appartenant à un hyperplan de E) en termes de nullité de déterminants d'ordre $n + 1$:

– à l'aide des coordonnées barycentriques de leurs points dans un repère affine ;

– à l'aide des coordonnées cartésiennes de leurs points dans un repère cartésien ; dans un plan, le déterminant en question est d'ordre 3, avec des notations que l'on devine :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cette dernière caractérisation est utilisée pour démontrer le théorème de Ménélaüs .

Dans la version polycopiée de l'ouvrage, cette théorie est illustrée par un exercice du niveau de l'enseignement secondaire, tiré d'un problème de P. Terracher. Il s'agit de démontrer l'alignement de trois points dans une configuration du plan ; il est remarquable qu'une indication soit donnée : elle conseille de calculer dans un repère cartésien attaché à la configuration.

Dans la nouvelle édition, le corollaire évoqué ci-dessus est utilisé dans un exercice ayant pour but de démontrer le théorème de Helly :

Dans un espace affine de dimension d, on considère une famille $\mathscr{F}$ de convexes, de cardinal fini, au moins égal à $d + 2$. Si toute sous-famille de $\mathscr{F}$ ayant $d + 1$ éléments est d'intersection non vide, alors la famille toute entière est d'intersection non vide.

Commentaires didactiques sur ces ouvrages

Dans ces deux ouvrages, les formes nulles de Grassmann de masse nulle sont évoquées au niveau technologique de l'organisation mathématique. Mais leur rôle n'est pas le même dans les deux ouvrages.

• Dans le « Lelong-Ferrand », leur utilisation dans des techniques est évoqué, ainsi que leur avantage principal (ne pas briser la symétrie). Les seuls exemples apparaissant dans les exercices ne seraient pas à la portée du lecteur sans les indications fournies. Le travail de ces techniques sur des exemples plus élémentaires, qui permettrait au lecteur d'acquérir une certaine autonomie, et sans doute de traiter les exercices plus difficiles sans avoir besoin d'indications, ne fait l'objet d'aucune aide dans l'organisation du manuel. Le lecteur doit donc s'imposer lui-même ce travail s'il veut employer les techniques évoquées. En vue d'un enseignement au niveau du secondaire, ces techniques vont avoir une importance très grande ; leur mise au point, et leur partage dans la communauté des enseignants conditionnerons dans une grande mesure le succès de leur enseignement.

• Dans le « Fresnel », elles sont utilisées au niveau technologique comme étape pour démontrer d'autres caractérisations de l'alignement de trois points, mettant en œuvre des outils mathématiques élaborés (coordonnées barycentriques, déterminants), à l'aide desquels les exercices sont traités. Elles retrouvent un sort aussi peu enviables que celui qu'elles avaient dans le « Chatellun », même si les théorèmes figurant dans les deux organisations ne sont pas les mêmes. Mais ces outils élaborés ne sont pas disponibles dans l'enseignement secondaire ....

2 - Organisations mathématiques relatives à l'étude des configurations à l'aide des vecteurs

Les configurations qui nous intéressent ici sont non seulement celles relevant de la géométrie affine, mais également celles qui interviennent fréquemment en géométrie euclidienne depuis les plus petits niveaux de l'enseignement, mettant en jeu des angles droits.

21 - L'ouvrage de Burali-Forti et Marcolongo de 1909-1910.

Le contenu des chapitres concernés

Abordons rapidement le chapitre III, pour nous apesantir davantage sur le chapitre IV, dernier chapitre relatif au calcul vectoriel[25], et qui porte, de manière assez surprenante pour un lecteur d'aujourd'hui, sur les rotations dans le plan.

Chapitre III - Produit vectoriel et produit intérieur

N°		Pages
1	Angle de deux vecteurs	27
2	Produit vectoriel	28
3	Produit intérieur	31
4	Relations entre le produit intérieur et le produit vectoriel	34
5	Projections. Applications à la trigonométrie	39
6	Distances, angles, aires, volumes	41
7	Barycentres	43
8	Coordonnées cartésiennes rectangulaires	44

[25]Les chapitres suivants concernent l'analyse vectorielle.

Le paragraphe 3 est consacré au produit scalaire de deux vecteurs, défini comme étant le produit des modules de chacun des vecteurs par le cosinus de leur angle et la notation adoptée, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, étant celle de Grassmann. Les auteurs donnent de sa définition l'interprétation mécanique en terme de travail d'une force, et une interprétation géométrique : si $\boldsymbol{a}$ est de module 1, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ est la mesure, avec un certain signe, de la projection orthogonale de la longueur mod$\boldsymbol{b}$ sur la direction de $\boldsymbol{a}$; $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ est la composante de $\boldsymbol{b}$ parallèle à $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$ est la composante de $\boldsymbol{b}$ normale à $\boldsymbol{a}$.

Le paragraphe 4 est consacré au double produit vectoriel, au produit mixte.

Le paragraphe 5 commence par le théorème des projections : les auteurs soulignent alors que « la théorie habituelle des projections est donc implicitement contenue dans les règles du calcul vectoriel relative aux signes +, – et x ». Les applications à la trigonométrie comportent les deux formules fondamentales relatives aux triangles, ainsi que la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

Le paragraphe 6 contient les formules permettant de calculer :
- l'angle de deux vecteurs,
- l'aire d'un triangle,
- le volume d'un tétraèdre,
- la distance d'un point à une droite, à un plan,

faisant intervenir les trois produits de vecteurs.

Le paragraphe 7 donne l'interprétation du barycentre comme centre des moyennes distances, résultant immédiatement de l'égalité obtenue en multipliant scalairement les deux membres de l'égalité donnant la définition du barycentre :

$$m(G - O) = \sum_{1}^{n} m_i (A_i - O),$$

par un même vecteur $\boldsymbol{u}$.

Chapitre IV - Rotations dans le plan

N°		Pages
1	Rotation d'un angle droit	47
2	Nombres complexes et règles de calcul de ces nombres	49
3	Rotations en général	51
4	Réduction des nombres complexes à des exponentielles	53
5	Aires planes et distances	53
6	Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires	59

Dans ce chapitre, les auteurs ne considèrent que des vecteurs normaux à un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$ arbitrairement fixé.

Le paragraphe 1 introduit un symbole fonctionnel, un opérateur, noté i car il a les mêmes propriétés algébriques que le nombre complexe désigné usuellement par cette lettre. À tout vecteur $\boldsymbol{x}$ normal à $\boldsymbol{u}$, i associe le vecteur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{x}$, noté $i\boldsymbol{x}$: i fait tourner d'un angle droit dans le sens direct tout vecteur $\boldsymbol{u}$ auquel on l'applique. Il apparaît alors que cet opérateur i est linéaire, et que si $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont tous les deux normaux à $\boldsymbol{u}$, leur produit vectoriel s'exprime à l'aide du produit intérieur (scalaire) de l'un quelconque des deux par l'image de l'autre par i ; plus précisément :

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a} \times i\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{b} \times i\,\boldsymbol{a})\boldsymbol{u}.$$

Le paragraphe 2 étend la définition de l'opérateur i à celle d'un opérateur $m + in$, m et n désignant des nombres réels, de la manière naturelle suivante : l'image d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ par l'opérateur $m + in$ est égale à $m\boldsymbol{x} + ni\boldsymbol{x}$, ce que les auteurs écrivent symboliquement sous la forme : $(m + in)\boldsymbol{x} = m\boldsymbol{x} + ni\boldsymbol{x}$. Les opérateurs ainsi définis sont appelés nombres complexes ; ils sont linéaires, mais le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs $(m + in)\boldsymbol{x}$ et $(m' + in')\boldsymbol{x}$ n'ont pas de relation avec le produit usuel des deux nombres complexes[26]. L'intérêt véritable de ces nombres complexes introduits comme opérateurs apparaît clairement dans le paragraphe 3 : l'opérateur $\cos\alpha + i\sin\alpha$ fait subir à tout vecteur normal à $\boldsymbol{u}$ une rotation de α radians, dans le sens que nous appelons « direct ».

Le contenu du paragraphe 4 ne surprendrait pas, du moins dans l'allure des formules, un élève de Terminale S : on y introduit la notation $e^{i\alpha}$ pour désigner $\cos\alpha + i\sin\alpha$: mais il s'agit ici d'un opérateur. Quant à un complexe non nul $m + in$, l'opérateur ainsi désigné est ce que nous appelerions aujoud'hui une similitude vectorielle directe du plan vectoriel orthogonal à $\mathbf{R}\boldsymbol{u}$, composée d'une rotation vectorielle $e^{i\phi}$ et d'une homothétie vectorielle r, r et ϕ étant tels que $m + in = re^{i\phi}$.

Le contenu du paragraphe 5 est plus original pour un lecteur d'aujourd'hui : l'opérateur i permet de définir l'aire algébrique d'un triangle, d'un quadrilatère et même d'un polygone, définition qui rappelle celle utilisée par Henri Lebesgue dans « La mesure des grandeurs » :

– l'aire algébrique du triangle ABC est définie comme étant la moitié du produit intérieur (scalaire) du vecteur $(A - B)$ par le vecteur $i\,(C - A)$;

(en effet $(B - A) \wedge (C - A) = [(A - B) \times i\,(C - A)]\,\boldsymbol{u}.$) ;

– l'aire algébrique d'un polygone obtenu en joignant successivement les points A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1} (où $A_{n+1} = A_1$) est le nombre $\sum_1^n (O - A_r) \times i\,(A_{r+1} - O)$.

– ce résultat permet de démontrer que l'aire (au sens usuel) d'un quadrilatère « non enchevêtré » est égale à celle d'un triangle dont deux côtés sont égaux aux

[26]En fait, ils ont une relation avec leur rapport.

diagonales du quadrilatère, l'angle compris entre ces deux côtés étant égal à l'angle des diagonales.

Ce même résultat est ensuite utilisé pour résoudre un problème de statique graphique, qui débouche, dans le cas où toutes les forces sont parallèles à un même vecteur, sur une autre construction du barycentre de n points pondérés. Les démonstrations, très simples, ne font intervenir que des sommes telles que celle qui précède.

Commentaires didactiques sur ces deux derniers chapitres

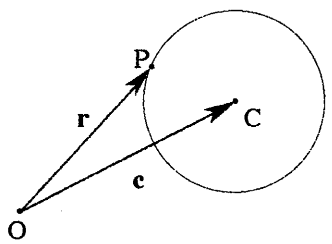
Le projet des auteurs se situe encore au niveau technologico-théorique : leur but est de montrer la puissance du calcul vectoriel pour modéliser des problèmes qui ont déjà été résolus d'une autre manière. Par exemple, les questions de calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes. Peu d'exemples sont traités, seuls les résultats généraux sont donnés (et en général, démontrés). L'intérêt des auteurs pour les rotations dans le plan trouve une justification dans les applications à la mécanique figurant plus loin dans l'ouvrage, notamment aux « mouvements d'une figure plane dans son plan », thème connu sous le nom plus récent de « mouvement plan sur plan ».

L'opérateur i permet ainsi de démontrer simplement des résultats de statique, en l'utilisant pour exprimer des aires algébriques à l'aide du calcul vectoriel. Cet opérateur, a pour cadre de fonctionnement les vecteurs de l'espace, mais il n'agit que sur les vecteurs normaux à un vecteur unitaire donné $\boldsymbol{u}$. Son emploi pour la géométrie dans un plan exige que l'on considère ce plan comme plongé dans l'espace tridimensionnel. Cet inconvénient, léger pour un mécanicien traitant le mouvement plan sur plan après avoir étudié le mouvement d'un solide dans l'espace, est beaucoup plus gênant pour l'enseignement de la géométrie : il inféode la géométrie plane à la géométrie dans l'espace. Nous rencontrerons dans le paragraphe 23 suivant un autre moyen, tiré de l'œuvre de Grassmann, ayant les mêmes avantages que l'opérateur i sans en avoir les inconvénients, beaucoup plus maniable que le quart de tour vectoriel direct, permettant de modéliser les figures usuelles de la géométrie euclidienne plane elle-mêmes, et pas seulement certains de leurs attributs (distances, angles, aires, volumes) comme le font Burali-Forti et Marcolongo.

22 – L'ouvrage de J-G Coffin (1914)

Il recèle pour cette question moins d'originalité que pour celle traitée dans le paragraphe 1 précédent. L'intoduction des produits scalaire et vectoriel, ainsi que les applications traitées ne surprendraient guère un lecteur français d'aujourd'hui que du point de vue du vocabulaire et des notations employées : Coffin note **ab** le produit scalaire des vecteurs **a** et **b**, qu'il appelle « produit algébrique ou scalaire », et $\overline{\mathbf{ab}}$ leur produit vectoriel, qu'il nomme « produit géométrique ou produit vectoriel » .

La seule exception pour la question de l'étude des configurations concerne le traitement du cercle et de la sphère, qui met en jeu comme précédemment des vecteurs-positions.
Considérons le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon a.
Là encore, l'idée consiste à prendre une origine O « extérieure » à la figure. Ainsi, en notant **c** le vecteur position du centre C du cercle et **r** celui de d'un point quelconque P du plan quelconque, l'appartenance de P à $\mathscr{C}$ se traduit par $(\mathbf{r} - \mathbf{c})_0 = a$ [27].



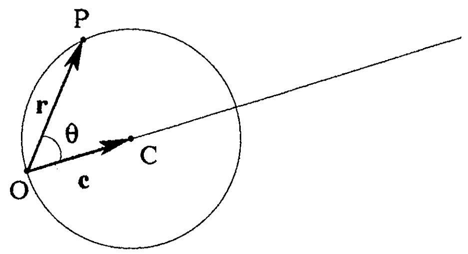
L'introduction du produit scalaire permet de traduire cette égalité par : $(\mathbf{r} - \mathbf{c})^2 = a^2$, ce qui équivaut à :

$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{rc} = \mathbf{c}^2 - a^2.$$

c'est-à-dire $\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{rc}$ = constante.

Ensuite seulement, il traite le cas où le point origine est choisi sur $\mathscr{C}$, et enfin le cas où il est choisi au centre du cercle.
Dans le premier cas, l'équation vectorielle du cercle devient :

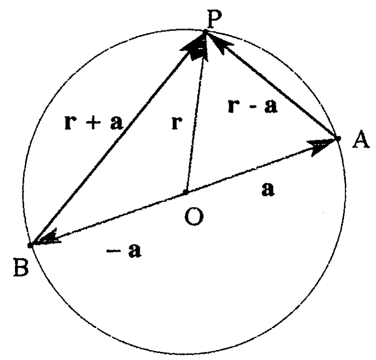
$$\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{rc} = 0,$$



équation donnant d'ailleurs très rapidement l'équation du cercle en coordonnées polaires ($r = 2a\cos\theta$).

[27] Coffin note avec l'indice 0 ce qu'il appelle la « grandeur » ou « valeur absolue » ou parfois même « tenseur » du vecteur auquel il est affecté, c'est-à-dire la mesure de sa longueur (une unité de longueur étant donnée), ou encore sa norme.

Dans le deuxième, si **a** désigne le vecteur-position d'un point A du cercle de rayon a, l'équation vectorielle du cercle s'écrit : $\mathbf{r}^2 = \mathbf{a}^2$, ce qui équivaut à $(\mathbf{r} + \mathbf{a})(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = 0$, égalité qui permet de retrouver l'orthogonalité des droites (PA) et (PB), B désignant le point de diamétralement opposé à A.



Coffin ajoute alors : « On pourrait multiplier indéfiniment des exemples et montrer la facilité avec laquelle les équations peuvent s'adapter aux différentes conditions ». Il renvoie le lecteur au livre de Tait « Quaternions » et à celui de Kelland et Tait « Introduction to quaternions » , à propos desquels il précise : « Dans ces livres, toutes les questions sur la droite, le plan, le cercle, la sphère et les sections coniques, à peu d'exceptions près, sont du calcul vectoriel pur et simple. On rencontre d'ailleurs rarement le quaternion. La seule différence à remarquer c'est que dans ces Ouvrages le produit algébrique a le signe contraire de celui qu'il a ici et que **ab** s'écrit S**ab**, et que $\overline{\mathbf{ab}}$ s'écrit V**ab** ».

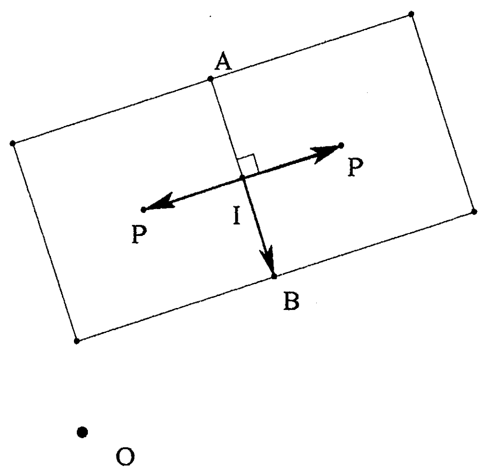
À titre d'exercices, Coffin propose notamment d'utiliser ces résultats pour déterminer l'image d'une droite par une inversion.

23 - L'ouvrage de Dan PEDOE « Geometry, a comprehensive course »
(1970, réédité en **1988)**

Toujours dans le premier chapitre de l'ouvrage que nous avons étudié dans le paragraphe 17 précédent, l'auteur introduit ce qu'il appelle le « supplément d'un vecteur du plan », qui est un cas particulier de la notion de « complémentaire d'un nombre » évoqué par E. Cartan dans l'article que nous avons commenté au paragraphe 11 qui précède. Le supplément d'un vecteur $\vec{u}$ est tout simplement l'image du vecteur $\vec{u}$ par le quart de tour vectoriel direct. Mais cette transformation n'est ni définie, ni nommée ou désignée par une notation ; l'auteur donne seulement une notation du supplémentaire d'un vecteur $\vec{u}$: $\mathrm{I}\vec{u}$.

On peut évidemment définir le supplément d'un vecteur à l'aide des nombres complexes. Pedeo ne s'en prive pas, ce qui lui permet de démontrer facilement les propriétés de l'opérateur "I", notamment celles de linéarité, ainsi que la propriété $\mathrm{I}\mathrm{I}\vec{u} = -\vec{u}$.

Le premier exemple d'emploi de cet opérateur "I" concerne la description (la modélisation à l'aide de vecteurs) d'un carré de côté [AB] donné. Plus précisément, il s'agit de déterminer vectoriellement son centre P à partir du côté [AB]. Pedoe décrit la méthode d'une manière dynamique : on peut atteindre le centre du carré en se déplaçant de B vers A jusqu'au milieu, puis en tournant d'un angle droit et en se déplaçant d'une longueur AB/2,

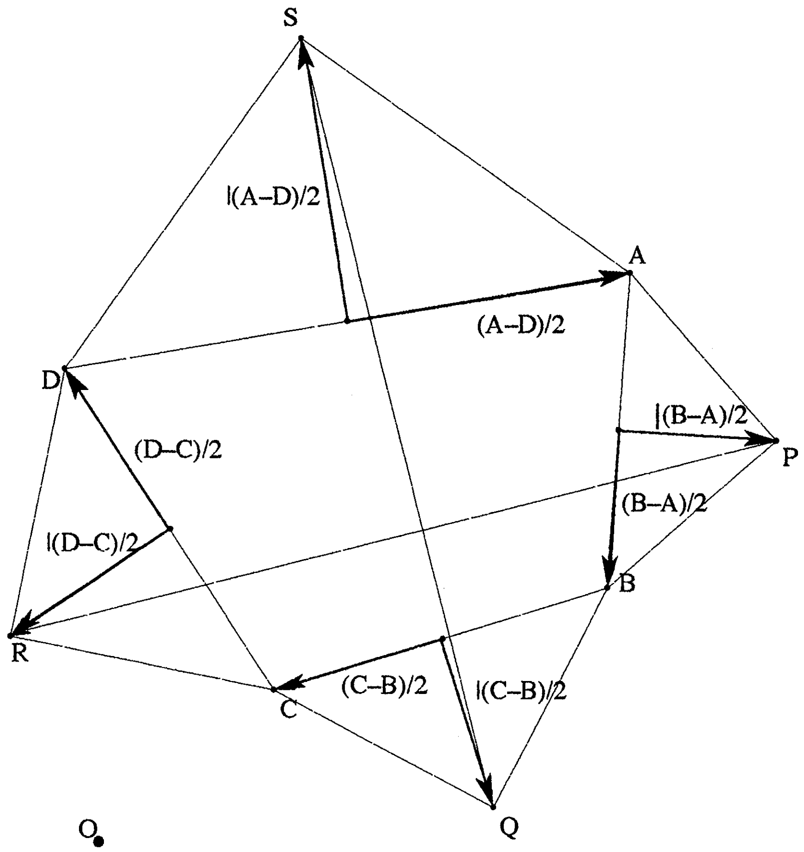


ce qui vectoriellement se traduit en termes de vecteurs-positions (on rappelle que Pedoe note ce vecteur de la même manière que le point) :

$$P = (A+B)/2 \pm \mathrm{I}\,(A-B)/2,$$

le signe dépendant de l'orientation du carré.

Les exercices relatifs à cette partie du cours concernent l'étude de configurations :
– celle de Van Aubel est évoquée la première ;
– une autre est constituée par des triangles semblables construits sur les côtés d'un triangle ABC quelconque : il s'agit de démontrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle dont le centre de gravité est le même que celui de ABC ;
– la dernière est composée d'un triangle sur les côtés duquel on construit extérieurement des triangles équilatéraux. Il s'agit de démontrer que les centres de gravité de ces triangles forment eux-mêmes un triangle équilatéral.
Pour montrer la puissance de l'outil, nous allons traiter la première configuration.
Considérons la configuration suivante, extraite de celle de Van Aubel (nous ne faisons apparaître ici que les centres P, Q, R et S des carrés construits extérieurement sur les côtés du quadrilatère ABCD sans dessiner entièrement ces carrés) :



L'orientation du plan étant fixée selon les conventions usuelles, en supposant que le quadrilatère ABCD est orienté dans le sens direct, les données se traduisent à l'aide des quatre égalités suivantes :

$P = (A + B)/2 + \mathrm{I}\,(B - A)/2$

$Q = (B + C)/2 + \mathrm{I}\,(C - B)/2$

$R = (C + D)/2 + \mathrm{I}\,(D - C)/2$

$S = (D + A)/2 + \mathrm{I}\,(A - D)/2.$

Quant à la conclusion « PR = QS et les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires », elles se traduit par $\mathrm{I}\,(R-P) = \pm\,(Q-S)$. Un contrôle graphique sur la figure permet de conjecturer que le résultat attendu est $\mathrm{I}\,(R-P) = Q-S$

Il s'agit de démontrer que $\mathrm{I}(R-P)$, c'est-à-dire que $\mathrm{I}R - \mathrm{I}P$ est égal à $Q-S$, ce qui se fait à l'aide des règles usuelles du calcul vectoriel vues jusqu'ici, auxquelles on ajoute celles relatives à l'opérateur "I" :

$\mathrm{I}R = \mathrm{I}(C+D)/2 + \mathrm{I}\,\mathrm{I}\,(D-C)/2$ c'est-à-dire $\mathrm{I}R = (C-D)/2 + \mathrm{I}\,(C+D)/2$,

$\mathrm{I}P = \mathrm{I}(A+B)/2 + \mathrm{I}\,\mathrm{I}\,(B-A)/2$ c'est-à-dire $\mathrm{I}P = (A-B)/2 + \mathrm{I}\,(A+B)/2$,

donc $\mathrm{I}R - \mathrm{I}P = (C-D-A+B)/2 + \mathrm{I}\,(C+D-A-B)/2$.

D'autre part, $Q-S = (B+C-A-D)/2 + \mathrm{I}\,(C-B-A+D)/2$.

D'où le résultat.

Pedoe utilise l'opérateur "I" et les coordonnées barycentriques pour étudier une configuration plus complexe, celles des triangles orthologiques.

Il examine rapidement les interactions entre les « suppléments » de vecteurs et le produit scalaire : il énonce la propriété :

$$U.\,\mathrm{I}V = -\,V.\,\mathrm{I}U,$$

mais il n'utilise pas l'interprétation de telles expressions en termes d'aires, car il introduit plus loin des outils plus élaborés qui lui permettent de le faire : les produits extérieurs de deux vecteurs (les 2-vecteurs), que nous allons décrire brièvement.

Partant de l'espace vectoriel des vecteurs du plan euclidien, l'ensemble des bivecteurs constituent un espace vectoriel de dimension 1. Si (E_1, E_2) désigne une base orthonormale directe; et si u et v ont pour coordonnées respectives (a, b) et (c, d), alors :

$$u \wedge v = (ad - bc)\, E_1 \wedge E_2.$$

On en déduit que l'aire algébrique Δ du triangle ABC est donc telle que :

$$2\,\Delta\, E_1 \wedge E_2 = (A-C) \wedge (B-C),$$

ou, si l'on veut une formule plus symétrique par rapport à A, B et C :

$$(2\,\Delta)\, E_1 \wedge E_2 = A \wedge B + B \wedge C + C \wedge A.$$

Commentaire didactique relatif à cet ouvrage

Cet ouvrage met en valeur un opérateur permettant de modéliser les figures élémentaires de la géométrie euclidienne plane : de même que les sommes, différences de vecteurs et les produits de vecteurs par un nombre permettent de modéliser des configuations affines (la relation $\overrightarrow{AB} = B - A$ permettant de ne faire intervenir que des vecteurs-positions dans les relations constituant un modèle vectoriel de la configuration), l'adjonction à ces outils de l'opérateur "I" va permettre d'agrandir considérablement la classe des configurations modélisables ; nous le montrerons avec plus de détails dans la partie B qui suit, où nous étudierons la portée des techniques que nous venons d'évoquer. Par ailleurs, le travail du modèle fait intervenir une algèbre assez simple, rappelant par certains de ses aspects les calculs sur les nombres complexes, muni de la conjugaison.

Dans une perspective d'enseignement au niveau secondaire, la modélisation de ces figures devra être travaillée, et l'apparente facilité des démarches décrites par Pedoe dans l'exemple du centre P d'un carré dont on connaît l'un des côtés [AB] ne doit pas nous conduire à considérer qu'une telle tâche est sans grande difficulté. La description dynamique, évoquant des mouvements permettant de relier P au milieu de [AB], mouvements parmi lesquels les quarts de tour jouent évidemment un rôle très important, n'est la seule possible. D'autres manières d'obtenir le vecteur-position P du centre auraient pu être utilisées ; par exemple si on désigne par D le point tel que $\overrightarrow{AD} = \pm \mathrm{I}\overrightarrow{AB}$ (on fait tourner [AB] d'un quart de tour autour de A), alors P est le milieu de [BD], ce qui se traduit en termes de vecteurs positions par : $D - A = \pm \mathrm{I}\,(B - A)$ et $P = (B + D)/2$, d'où l'on déduit $P = (B + A \pm \mathrm{I}(B - A))/2$, résultat trouvé précédemment par une autre méthode. Ceci souligne l'intérêt que peut présenter la notation $\overrightarrow{AB}$ dans cette phase de modélisation, fait qui était déjà visible dans les modélisations relatives aux configurations affines.

Enfin, en ce qui concerne les calculs d'aires de polygones, l'utilisation de l'opérateur “I” conjointement avec le produit scalaire permet de les prendre en compte sans avoir besoin de « sortir » du plan comme le font Marcolongo et Burali-Forti : en effet l'aire (algébrique) du triangle ABC est égale à la moitié du produit scalaire de $\mathrm{I}\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, et la justification de ce résultat est très simple.[28]

24 – Des brochures et publications récentes évoquant l'emploi de transformations vectorielles

Nous les avons déjà évoquées dans notre troisième partie (paragraphe 22, traitant de l'étude de la technique d'utilisation des transformations vectorielles pour l'étude des configurations). On trouve peu d'ouvrages traitant de cette question, et ceci pour plusieurs raisons :

– les configurations en question peuvent être étudiées à l'aide de transformations ponctuelles ou à l'aide des nombres complexes d'une manière au moins aussi simple. Par exemple, la brochure « Mélanges géométriques » ainsi que plusieurs manuels scolaires déjà évoqués précédemment proposent des études de nombreuses

[28]Certains auteurs de manuels ont d'ailleurs utilisé cette propriété pour visualiser le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide d'aires (Ouvrages de 1ère S, collection Belin, 1991, par exemple).

configurations à l'aide de ces outils, même s'ils insistent sur la méthode employant les transformations vectorielles. De même, dans l'ouvrage « Les mathématiques par les problèmes, olympiades nationales et internationales, rallyes, concours, divertissements »[29], la solution donnée au problème relatif à la configuration de Van Aubel utilise les nombres complexes ; un problème faisant intervenir une configuration voisine est traité en composant des similitudes directes.

– elles peuvent également être traitées à l'aide de l'opérateur "I". L'ouvrage de Pedoe n'est pas le seul à le promouvoir, et on en trouve une utilisation dans l'ouvrage « Problem-Solving through Problems »[30] (dont la première publication date de 1937) pour étudier la configuration formée d'un triangle sur les côtés duquel on construit des triangles isocèles semblables, alternativement à l'intérieur et à l'extérieur du triangle : il s'agit de démontrer que les sommets principaux des triangles isocèles forment, avec l'un des sommets du triangle initial, un parallélogramme. L'auteur modélise un triangle isocèle ABC' de sommet principal C' de la manière suivante :

$$\overrightarrow{AC'} = 1/2\,\overrightarrow{AB} + k\,\mathrm{I}\overrightarrow{AB}.$$

– la technique nécessite une appréhension des figures d'un type particulier, qui est difficile à définir en toute généralité : ainsi, la confrontation à différents spécimens de la tâche ne suffit pas à faire émerger un embryon de technique fiable, ou du moins, cela ne peut se faire qu'au prix d'un entraînement assez important. Dans les actes du Colloque Inter-Irem de Géométrie de Juin 1994[31], P. H. Terracher évoque cette question dans une conférence : il considère une série d'exemples judicieusement choisis et, au fil de leur résolution, essaie de définir la technique utilisée, dont il propose au départ la description suivante :

« "Voir les bons vecteurs de la figure et comment opérer dessus" sous-tend pour l'instant notre démarche. Soyons plus précis : notre promenade visuelle dans la figure s'effectue avec une arrière-pensée, celle de la recherche et de la trouvaille d'un chemin (sorte de série de vecteurs mis bout à bout que nous transformons par morceaux, chaque morceau étant vu à l'endroit où il est bon de le voir) ».

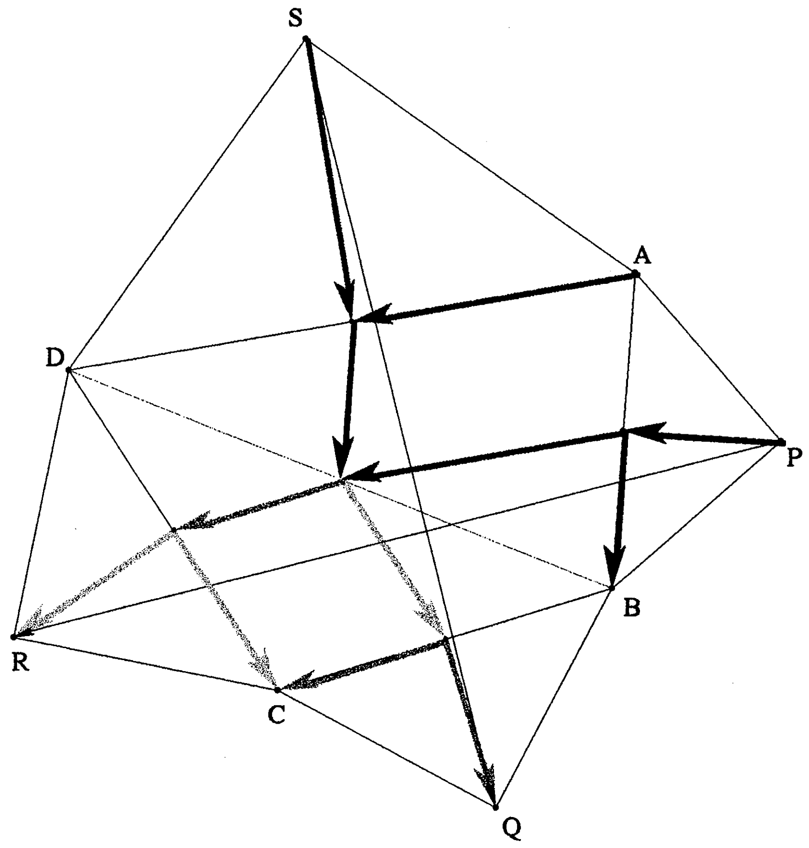
On peut illustrer la méthode ainsi décrite par sa mise en œuvre sur la configuration de Van Aubel, où nous faisons apparaître le chemin reliant P à R, chaque morceau, son transformé et l'endroit où l'un des deux est « bon à voir » étant dessiné avec le même niveau de gris.

---

[29]AKKAR M., AKKAR M-T., EL MOSSADEQ A. I., 1985, *Les mathématiques par les problèmes, olympiades nationales et internationales, rallyes, concours, divertissements*, Sochepress, Casablanca.

[30]LARSON L. C., 1990, *Problem-Solving through Problems*, Springer-Verlag, (2ème édition corrigée, la première chez cet éditeur datant de 1983).

[31]Actes du colloque Inter-IREM de Géométrie 1994, Le dessin géométrique de la main à l'ordinateur, IREM de Lille,



Le lecteur aura constaté au passage le rôle que les milieux des côtés d'un triangle jouent pour faire apparaître des parallélogrammes, qui constituent le moyen de faire « voir un morceau où il est bon de le voir ». Ainsi sur cet exemple, le chemin pour relier P à R est à créer, il n'utilise pas des morceaux déjà dessinés sur la figure (ce qui était le cas dans les premiers exemples traités par l'orateur).

Mais on ne peut s'arrêter à cette description de la technique, car il existe des cas où un tel chemin n'existe pas, comme le montre par exemple la configuration des « triangles de Napoléon », que nous avons déjà évoquée précédemment[32] : Terracher propose alors une variante de la technique précédente : « rattacher les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ aux autres vecteurs de la figure (i.e. aux vecteurs visibles de la figure) », consistant ici à établir les relations $3\,\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'B'}$ et $3\,\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{A'C'}$, relations que l'on « obtient sans trop de peine », que « le calcul vectoriel fait apparaître » : $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont des combinaisons linéaires de vecteurs que l'on sait transformer par la rotation vectorielle d'angle $\pi/3$. Il est sans doute bon de préciser que l'orateur n'évoque pas particulièrement un élève au travail, mais n'importe quel individu (élève, étudiant, professeur, ...) cherchant à résoudre de tels problèmes. On imagine sans peine les difficultés provoquées par l'étude et par l'aide à l'étude de telles « techniques ».

[32]Voir page 306 ; nous reprenons ici les mêmes notations.

Remarquons, pour terminer, que la description qui vient d'être faite des différentes variantes de la technique est, dans ce qui précède, assez fortement personnalisée (on ne saurait en faire le reproche à l'auteur) ; d'autres praticiens peuvent avoir recours à d'autres métaphores (ainsi M. Dofal, auteur de la brochure « Mélanges géométriques », en parle en évoquant « une sorte de pas du patineur », expression qui ne figure pas dans sa brochure). Une technique, pour mériter un nom compris par toute une communauté (la « règle de trois », le « produit en croix », ...), doit avoir fait l'objet d'un travail d'entraînement et d'amélioration, de l'évaluation de sa portée, d'une institutionnalisation. La technique que nous évoquons n'a pour l'instant pas atteint ce stade d'évolution, malgré la pression exercée il y a quelques années par les auteurs des programmes, ce qui peut suffire à expliquer sa disparition.

3 – Conclusion

L'examen des organisations mathématiques existantes (ou ayant existé) en France et dans quelques institutions étrangères permet de dégager les faits suivants :

En France, depuis le début du siècle, l'enseignement du calcul vectoriel pour l'étude de la géométrie peut se caractériser de la manière suivante :

– On utilise deux notations concernant les vecteurs :

– la notation $\overrightarrow{AB}$, très utilisée en pratique, aussi bien par le professeur que par les élèves ; accompagnée par la représentation graphique que constitue la flèche reliant A à B, elle constitue à la fois un objet mathématique (le vecteur « lié », mais aussi parfois le vecteur « libre ») mais également un ostensif, un objet avec lequel on peut faire un certain travail, en particulier un travail d'expression orale : ainsi les élèves, mais également le professeur[33], donnent une signification à des expressions telles que « vecteurs de même origine », « vecteurs mis bout à bout », ..., expressions dont l'emploi est quasiment indispensable pour transmettre, pour montrer certaines techniques de base ;

– la notation $\vec{u}$, qui renvoit à un non-ostensif (le vecteur « libre »), mais constitue également un ostensif, dont l'emploi est davantage sur le territoire du professeur : en effet, il est rare que l'élève se voit confier la responsabilité d'utiliser cette notation ; souvent, si on lui donne un travail qui la solllicite, l'énoncé, dans sa forme, invite à l'utiliser. Par ailleurs, c'est le professeur qui s'en saisit pour énoncer des résultats sous une forme plus concise, plus lisible, masquant les points lorsque ceux-ci importent peu. Quand on lui associe une trace graphique, on prend soin de ne pas dénommer les extrémités de la flèche, pour bien faire comprendre la différence entre un objet ayant trois caractéristiques géométriques (direction, sens, longueur), et non pas quatre (les

[33]Au risque de présenter ces paroles comme des « abus de langage » ...

mêmes, avec en plus une origine). Curieusement pourtant, il arrive que l'on dessine des flèches de même origine représentant deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et cette particularité joue un rôle dans le tracé (définition de la somme, par exemple). Ainsi, la notation $\vec{u}$ est-elle pour l'élève d'un emploi délicat.

– On utilise très peu les vecteurs-positions. La bijection entre l'ensemble des vecteurs et un plan pointé est certes traitée sur le plan technicologico-théorique. Parfois même, souligne-t-on (notamment dans les ouvrages universitaires) qu'une telle bijection n'est pas canonique, et que le changement de point-origine change l'image d'un vecteur dans le plan pointé, autrement dit, on en souligne les faiblesses. Mais sur le plan des techniques et des ostensifs, on constate, à quelques exceptions près, un grand vide : aucun moyen pour désigner le vecteur-position d'un point du plan pointé (par exemple, la notation $\vec{m}$ ou $\vec{M}$, ou *m*, pour désigner le vecteur-position d'un point M, sans aller jusqu'à la même notation M employée par Pedoe) et par conséquent aucune technique mettant en œuvre de tels vecteurs : la seule exception concernant la période récente se trouve dans la brochure IREM de Bordeaux, où on introduit une telle notation assortie d'une convention d'emploi, mais cette dernière n'est utilisée qu'au niveau technologique.

– Ces ostensifs sont évidemment solidaires des techniques de base du calcul vectoriel : ainsi l'usage quasi-exclusif de la notation $\overrightarrow{AB}$ conduit à faire jouer un rôle important à la relation de Chasles sous sa forme additive, et un rôle moins important à sa forme soustractive. L'emploi conjoint de cette notation et de celle du vecteur–position conduit à utiliser très fréquemment la forme soustractive : $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

– Du point de vue des types de problèmes, l'accent est mis sur les problèmes d'alignement et de parallélisme, en liaison avec la colinéarité, puis sur les problèmes de concours en liaison avec la théorie du barycentre. Un type de problèmes est complètement sous-représenté : celui de la localisation du point d'intersection de deux droites (ou segments, ou demi-droites) par rapport aux deux points définissant chacune d'elles.

– Les techniques récemment utilisées pour traiter les problèmes d'alignement sont complexes, personnalisées, et nécessitent un contrôle graphique important.

– La notion de base n'est gère utilisée qu'en vue de la géométrie analytique.

– Le rôle des représentations paramétriques vectorielles de droites est sous-estimé, et ramené à une simple application de l'alignement en termes de colinéarité : en d'autres termes, on traduit un alignement de trois points en prenant comme point de référence l'un des points en question, on s'interdit de « regarder » la situation d'un point de vue extérieur à la droite en question. L'affichage dans les programmes de cette question apparaît actuellement fort tard (en Terminale S) sous une forme assez surprenante à ce niveau ($\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$).

Afin d'améliorer l'étude des questions de géométrie élémentaire à l'aide de leur modélisation par le calcul vectoriel, ce qui précède nous conduit à mettre à l'épreuve les propositions suivantes, en matière d'outils pour ce travail mathématique.
– pour ce qui concerne l'ensemble des questions géométriques, mettre en place les deux ostensifs suivants concernant les vecteurs :

– la notation usuelle $\overrightarrow{AB}$;

– la notion de vecteur-position d'un point dans le plan pointé, ainsi que la notation $\vec{m}$ pour désigner le vecteur-position du point M dans ce plan pointé.
– pour ce qui concerne les questions de géométrie métrique, mettre en place la notion de « supplément » d'un vecteur ainsi que sa notation à l'aide du symbole "ǀ ".

B – Propositions d'organisations locales concernant l'étude du calcul vectoriel au début du lycée.

Nous nous plaçons dans le cas où les deux opérations algébriques fondamentales sur les vecteurs (addition et multiplication scalaire) ont déjà été mises en place (nous reviendrons plus loin sur la question de l'articulation « géométrie vue en collège sans les vecteurs / mise en place des vecteurs et des deux opérations fondamentales »). Une des difficultés pour élaborer des organisations mathématiques dans lesquelles les vecteurs vont être sollicités pour résoudre des problèmes de géométrie réside dans le fait que la modélisation vectorielle d'une configuration nécessite déjà l'utilisation de propriétés faisant partie du calcul vectoriel. Une comparaison avec la modélisation algébrique de questions mettant en œuvre des grandeurs mesurables permettra de mieux éclairer la question. Prenons l'exemple suivant, tiré d'une épreuve de diplôme national du brevet des collèges[34] : l'énoncé, qui présente graphiquement un rectangle de 80 m de long et x m de large, continue ainsi :
« Ce rectangle représente un pré de 80 m de longueur. Le cultivateur doit encore décider de sa largeur x. Il souhaite que le périmètre de ce pré soit inférieur à 240 m. En même temps, il voudrait que son aire soit supérieure à 3 000 m2.
1. Traduire ces informations par deux inéquations.
2. Résoudre ces inéquations et donner les valeurs possibles de la largeur du pré. ».
L'énoncé met l'accent sur les inéquations, et tend à sous-estimer (ainsi d'ailleurs que certaines réalisations de l'enseignement sur ce point) le rôle des fonctions, qui vont pourtant ici constituer un passage obligé vers les inéquations. En effet, ce rectangle dont la largeur x « varie », voit son périmètre et son aire varier en conséquence, et le premier travail de modélisation va consister à décrire cette dépendance : $p(x) = 2(80 + x)$ et $a(x) = 80x$. Le problème se modélise alors à l'aide du système de deux inéquations :

$$\begin{cases} p(x) < 240 \\ a(x) > 3\,000 \end{cases}$$

La notion de fonction joue donc un rôle fondamental dans la modélisation algébrique du système étudié.
Il en est de même dans la modélisation vectorielle d'une configuration géométrique : la position de certains points de la figure dépend de celles de certains d'entre eux (un point est le milieu d'un segment, un autre est le point d'intersection de telles droites ou segments, ...). Mais la grosse différence avec la situation numérique précédente réside principalement dans les deux faits suivants :
– les variables ne sont ni désignées ni même choisies : leur nombre, leur identification, leur dénomination fait partie de la modélisation du système ;

[34] Académie de Lille, session de juin 1993.

– les fonctions qui vont intervenir sont souvent des fonctions à plusieurs variables.
La force de la modélisation en terme de vecteurs réside dans le fait que tout vecteur du plan s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires, arbitrairement choisis. On dispose ainsi d'une infinité de manières de générer des écritures canoniques de vecteurs ; on va mettre à profit cette générosité pour solliciter celles qui sont les mieux adaptées à la configuration à étudier, de manière à pouvoir traduire à l'aide de ces deux vecteurs tous les vecteurs nécessaires à la description (à la mise en équation) de la figure à modéliser. Cette description met déjà en œuvre des propriétés (affines et éventuellement métriques) qu'il convient de savoir traduire vectoriellement, ce qui nous conduit à identifier un certain nombre de types de problèmes dont l'étude fournira la réponse à de telles questions.

Nous allons dans un premier temps examiner les types de problèmes qui seront sollicités dans la modélisation de figures relevant de la géométrie affine, puis nous passerons au cas de la géométrie métrique.

Pour chacune des deux parties, nous évoquerons certains moments de l'étude, sans lesquels la succession des types de problèmes n'aurait guère de signification. Mais notre objet principal de préoccupation demeure la présentation de l'organisation mathématique en termes de types de problèmes, techniques, technologie, théorie.

1 – Calcul vectoriel et géométrie affine.

11 – Les premiers types de problèmes : incidence et modélisation

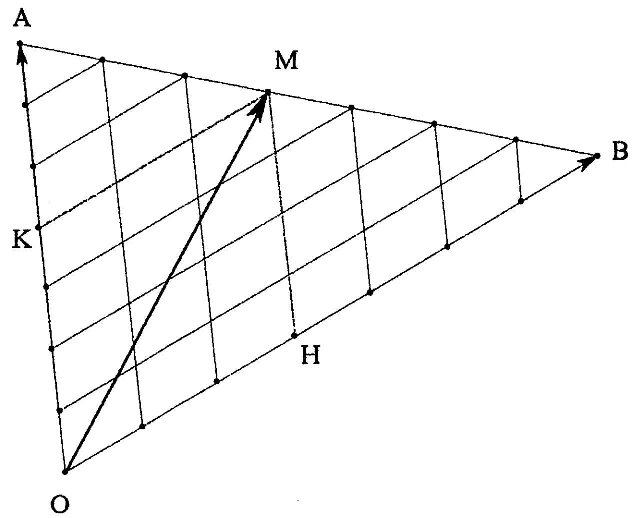
En analysant l'ouvrage de Coffin, nous avons déjà eu l'occasion d'identifier quelques types de problèmes et techniques associées, mettant en œuvre le calcul vectoriel. Nous allons compléter ce travail en faisant apparaître des types de problèmes peu mis en valeur par Coffin, et en réorganisant l'ordre dans lequel ces types de problèmes apparaissent. Pour cela, nous adopterons le dispositif du tableau, qui permet de mieux faire apparaître les types de problèmes, les techniques ainsi que les éléments technologiques en rapport avec ces dernières.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_1 Traduire vectoriellement l'appartenance d'un point M à une droite déterminée par deux points A et B, ou à la demi-droite d'origine A passant par B, ou au segment [AB].	τ_{11} Écrire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, en introduisant un paramètre k ; l'appartenance de M à (AB) (resp. [AB), [AB]) équivaut à l'existence d'un nombre réel (resp. un nombre réel positif, un élément de [0;1]) k tel que : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.	Définition de la colinéarité de deux vecteurs.
	τ_{12} Dans le plan pointé en O, en notant le vecteur position d'un point désigné par une lettre majuscule avec la même lettre minuscule surmontée d'une flèche, l'appartenance de M à (AB) équivaut à l'existence de k tel que : $\vec{m} - \vec{a} = k\,(\vec{b} - \vec{a})$. Cette dernière égalité s'écrit de manière équivalente : $\vec{m} = (1 - k)\vec{a} + k\,\vec{b}$.	La même chose, avec en plus la relation fondamentale permettant de passer de la notation $\overrightarrow{XY}$ à une écriture mobilisant des vecteurs-positions : $\overrightarrow{XY} = \vec{y} - \vec{x}$. La notion de représentation paramétrique vectorielle d'une droite déterminée par deux points A et B, et le vocabulaire « M est le point de la droite (AB) de paramètre k ».

Une remarque s'impose ici, au sujet du passage de l'une des égalités « $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ » et « $\vec{m} = (1-k)\vec{a} + k\,\vec{b}$ » à l'autre, et ceci dans les deux sens. On évitera de donner trop vite des règles visant à une automatisation trop précoce, du type « le coefficient k dans « $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ » devient par la suite le coefficient de $\vec{b}$, et le coefficient de $\vec{a}$ est alors $1-k$; la pratique les fera émerger assez vite, sans que le professeur ait besoin de les installer. L'étude de cette question sera reprise dans le type de problème **T_2** ci-dessous, qui ne concerne que les segments, ce qui facilite grandement les choses.

Types de problèmes	**Techniques**	**Éléments technologiques**
T_2 Traduire vectoriellement le fait qu'un point M se trouve sur le segment [AB], à une fraction *p/q* de la distance AB à partir de A (ou de B). C'est un cas particulier de **T_1**, dont l'examen ne se justifie que par sa fréquence.	**τ_{21}** Écrire $\overrightarrow{AM} = \frac{p}{q}\,\overrightarrow{AB}$ (variante de τ_{11}). (ou $\overrightarrow{BM} = \frac{p}{q}\,\overrightarrow{BA}$). **$\tau_{22}$** C'est une variante de τ_{12}. $\vec{m} = (1-\frac{p}{q})\vec{a} + \frac{p}{q}\vec{b}$. (ou ....)	Définition de la multiplication d'un vecteur par un nombre. Justification éventuelle du fait que $\frac{p}{q}$ se retrouve comme coefficient de $\vec{b}$, celui de $\vec{a}$ étant le complément de $\frac{p}{q}$ à 1. (Voir ci-dessous)

Considérons par exemple le cas où $p = 3$ et $q = 7$.



M est alors aux $\frac{3}{7}$ de [AB] à partir de A. L'utilisation du « petit théorème de Thalès » relatif aux divisions régulières (travaillé actuellement dès la classe de Quatrième) montre que c'est le projeté de M sour (OB) parallèlement à (OA) qui est aux $\frac{3}{7}$ de [OB] à partir de O. Quant au projeté de M sur (OA) parallèlement à (OB), il est aux $\frac{4}{7}$ de [OA] à partir de O.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_3 Traduire en terme de position du point M sur le segment [AB] une relation vectorielle du type : $\overrightarrow{AM} = \frac{p}{q}\overrightarrow{AB}$	**$\tau_{3\,1}$** L'origine commune des deux vecteurs (ici A) donne le point à partir duquel on se place ; la fraction mise en évidence indique à quelle fraction de [AB] le point M se situe, quand on part du point auquel on se place.	Mêmes éléments que pour le type de problèmes précédent.
ou du type : $\vec{m} = (1 - \frac{p}{q})\vec{a} + \frac{p}{q}\vec{b}$.	**$\tau_{3\,2}$** * On peut se ramener à une égalité mettant en œuvre la notation des vecteurs du type $\overrightarrow{AB}$; on utilise alors **$\tau_{3\,1}$**. * Mais on peut éviter ce retour. Si l'on part du point A, M se situe à une certaine fraction de [AB] : cette fraction est le coefficent de $\vec{b}$; Si l'on part de B, M se situe à une certaine fraction de [BA] : cette fraction est le coefficent de $\vec{a}$.	On fait ici explicitement appel à la justification évoquée à la suite de **T_2**.

Le type de problèmes suivant est relatif aux points d'une droite (AB) extérieurs au segment [AB]. Alors que la relation algébrique traduisant la localisation de tels points est de la même forme, la traduction en langage géométrique élémentaire va être plus délicate. Ainsi du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}$, on pourra difficilement dire qu'il est aux $\frac{8}{5}$ de [AB] à partir du point A : en effet, ce point n'appartient pas au segment [AB]. On peut rectifier en disant que M le point de la demi-droite [AB) situé à une distance « $\frac{8}{5}$ de AB » à partir du point A. Quant au point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\frac{8}{7}\overrightarrow{AB}$, l'expression va s'alourdir encore : on va devoir évoquer la demi-droite opposée à la demi-droite [AB), pour laquelle on ne dispose d'aucune notation commode ; M est le point de cette demi-droite situé à la distance « $\frac{8}{7}$ de AB » à partir du point A.

On retrouve ainsi la question de la définition de la multiplication d'un vecteur par un nombre, qui est solidaire de l'étude de ces premiers types de problèmes. Compte tenu de ce qui précède, on voit l'utilité de ne pas en rester à une définition ne sollicitant que des distances. On gagne ici à utiliser la notion d'abscisse d'un point d'une droite munie d'un repère, étudiée dès le début du collège : dans tous les cas, M est le point d'abscisse k dans le repère (A, B) de la droite (AB). L'énoncé des techniques dans le type de problèmes qui suit se place dans ce cadre.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_3 bis Traduire en terme de position du point M sur la droite (AB) (ou demi-droite [AB)) une relation vectorielle du type : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ ou du type : $\vec{m} = (1 - k)\vec{a} + k\,\vec{b}$.	**τ_{31} bis** L'origine commune des deux vecteurs donne le point à partir duquel on se place. Le coefficient k donne l'abscisse de M dans le repère (A, B) de la droite. **τ_{32} bis** L'abscisse de M dans le repère (A, B) de la droite (AB) est le coefficent de $\vec{b}$. L'abscisse de M dans le repère (B, A) est le coefficient de $\vec{a}$.	

Le type de problèmes suivant a déjà été travaillé au collège, niveau d'enseignement pour lequel la gamme de techniques disponibles est déjà grande : la formulation et l'énonciation de certaines d'entre elles (permutation des extrêmes, ou des moyens, croisement des égalités vectorielles – adaptation du fameux « croisement des équipollences ») est souvent omise : l'enseignement se fait dans le registre de l'oral et dans le registre gestuel. Ces techniques méritent donc d'être revisitées de ce point de vue. De plus, les techniques « nouvelles » liées à l'emploi des vecteurs-positions montrent ici toute leur puissance, et leur simplicité « algébrique ». On peut également noter que les transformations algébriques de ces relations peuvent se faire en limitant le recours au contrôle graphique, alors que ce dernier est souvent recommandé quand on se limite aux notations du type $\overrightarrow{AB}$ pour les vecteurs.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_4 Traduire vectoriellement qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme	τ_{41} * Écrire l'une des égalités suivantes : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ... obtenues à partir de l'une d'elles en permutant les points extrêmes, ou les points moyens, ou les deux. S'assurer de l'égalité obtenue par un contrôle graphique, en cas de doute.	Définition des vecteurs, de leur égalité.
	* Écrire que la somme de deux vecteurs de même origine portés par les côtés est égale au vecteur de même origine porté par la diagonale ; par exemple : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.	Définition de la somme de deux vecteurs (règle du parallélogramme).
	τ_{42} * En pointant le plan en un point O distinct des points A, B, C et D, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ s'écrit aussi : $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$. Les autres égalités équivalentes s'en déduisent à l'aide des règles usuelles du calcul algébrique.	
	* En pointant le plan en un sommet du quadrilatère, A par exemple, ABDC est un parallélogramme si et seulement si : $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.	Définition de la somme de deux vecteurs (règle du parallélogramme).

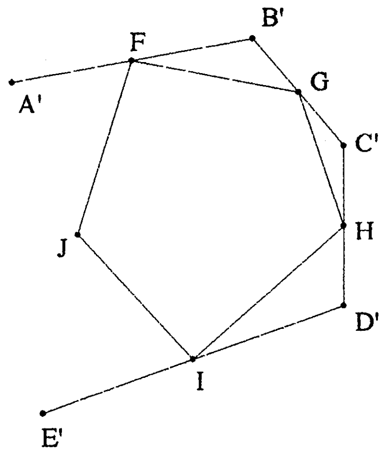
Ici débute le travail de la technique d'emploi des vecteurs-positions. Le premier but est évidemment d'en augmenter la fiabilité, d'automatiser l'emploi des gestes de base de la technique, au rang desquels l'emploi de l'égalité « $\overrightarrow{XY} = \vec{y} - \vec{x}$ » comme « opérateur d'algébrisation des figures » joue un rôle fondamental. L'évocation orale de ce geste sous la forme « vecteur = vecteur-position de l'extrémité – vecteur-position de l'origine » est un élément important pour assurer de bonnes conditions de vie de ce geste dans la classe. Notons à ce sujet que la langue allemande facilite les choses : « vecteur-position » se dit « Orstvektor ». L'expression assez lourde « vecteur-position » pourrait être sans dommage remplacée par la vieille expression « rayon vecteur », utilisée dans les programmes à une époque où les vecteurs venaient à peine d'être créés par Hamilton et Grassmann, pour l'étude des coniques. Mais l'avancement du temps didactique tolère mal le travail de la technique pour elle-même : c'est la raison pour laquelle les types de problèmes suivants ont un autre but. Il s'agit d'amener l'élève à comprendre que les relations entre les constituants de la figure (position d'un point sur une droite, un segment, existence d'un parallélogramme, point qui est le milieu d'un segment, ...) vont pouvoir se décrire à l'aide d'un nombre limité de vecteurs-positions, et que l'on a intérêt à faire en sorte que ce nombre soit le plus petit possible. Ce but est commun aux trois types de problèmes qui suivent.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_5 Dans le plan pointé, – le point « origine » est précisé – exprimer tous les vecteurs-positions des points d'une figure en fonction de certains d'entre eux, qui sont précisés. La figure est du type : polygone avec points localisés sur certains « côtés » par rapport aux extrémités de ces côtés.	On est ramené aux techniques mises en œuvre dans les types de problèmes précédents. (Voir plus loin, des spécimens de ce type de problèmes).	

Exemples de problèmes du type T_5.

1. Un segment [AB] est donné. E est le point situé au quart de [AB] à partir de B (ou au 3/4 de [AB] à partir de A). O est un point extérieur à la droite (AB). Exprimer le vecteur-position $\vec{e}$ de E en fonction de ceux, $\vec{a}$ et $\vec{b}$, de A et B.
2. Un triangle ABC est donné, A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C' celui de [AB] . G est le point situé au tiers de [BB'] à partir de B' (ou au 2/3 de [BB'] à partir de B) ; H est le point situé au tiers de [CC'] à partir de C'; K est le point situé aux 2/3 de [AA'] à partir de A. O est un point du plan distinct de tous les points de la figure.
Il s'agit de déterminer les vecteurs-positions de A', B', C' et de G, H et K en fonction de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, et d'en déduire une propriété bien connue.
3. Même travail en remplaçant un triangle par un quadrilatère ABCD. On demande ensuite de démontrer que les milieux successifs E, F, G et H des segments [AB], [BC], [CD], [DA] forment un parallélogramme (parallélogramme de Varignon, configuration étudiée sans les vecteurs dans toutes les classes de quatrième).
4. Même travail en remplaçant un quadrilatère par un pentagone ABCDE, et celui FGHIJ obtenu en joignant successivement les milieux de [AB], [BC], [CD], [DE] et [EA]. On peut alors se poser le problème suivant (Problème classique, traité en général à l'aide

de la notation $\overrightarrow{AB}$, comme dans le Fletcher): comment reconstituer le pentagone initial quand on ne connaît que le « pentagone des milieux » FGHIJ : partant d'un point A', il est facile de trouver des points B', C', D', E' tels que F soit le milieu de [A'B'], G celui de [B'C'], H celui de [C'D'], I celui de [D'E'].



Se pose alors la question de savoir où placer A' pour que J soit le milieu de [E'A'].

5. ABCD est un parallélogramme. k est un nombre réel non nul, on désigne par A' le point tel que $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AB}$; F le point tel que $\overrightarrow{BF} = k\ \overrightarrow{BC}$; G le point tel que $\overrightarrow{CG} = k\ \overrightarrow{CD}$ et H le point tel que $\overrightarrow{DH} = k\ \overrightarrow{DA}$.
O est un point extérieur à la figure.

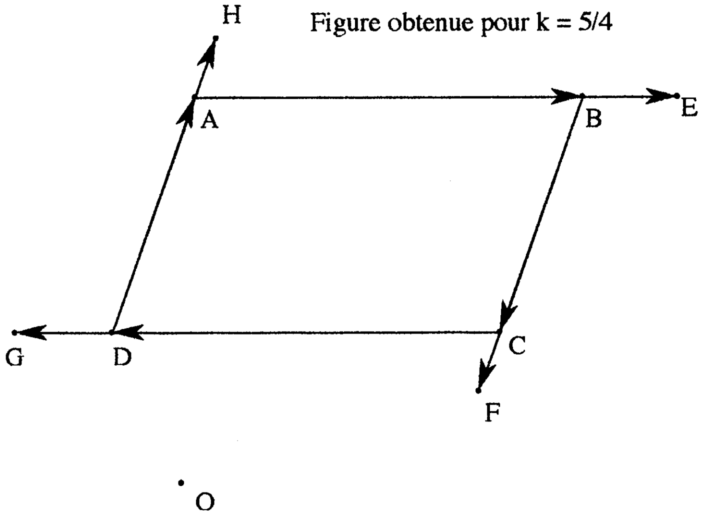


Figure obtenue pour k = 5/4

Il s'agit de déterminer les vecteurs-positions $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$ des points E, F, G et H en fonction des vecteurs-positions $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ des points A, B, C et D. Puis de démontrer que les points E, F, G et H forment un parallélogramme.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_5 bis Effet du changement de point « origine » dans des problèmes du type précédent : on prend comme point « origine » l'un des points de la figure.	(Voir ci-dessous des spécimens de ce type de problèmes, ainsi que les remarques relatives à ce type de problèmes dans l'organisation didactique).	

Exemples et remarques didactiques relatifs au type de problèmes T_5 bis.

On peut reprendre certains des problèmes évoqués précédemment et changer le point « origine » du plan pointé. Par exemple :

– le problème 2. en pointant le plan en l'un des sommets du triangle ABC, A par exemple. Alors, on peut constater que tous les vecteurs-positions recherchés s'expriment en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

– le problème 4. en pointant le plan dans un premier temps en A : alors tous les vecteurs-positions s'expriment en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{d}$; puis dans un second temps, au centre du parallélogramme ABCD (qui est centre de symétrie de la figure) : on peut alors exprimer les vecteurs-positions de tous les autres points à l'aide de deux quelconques des vecteurs-positions de sommets consécutifs du parallélogramme, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ par exemple. On peut alors se poser la question suivante (en fixant d'abord la valeur de k) : si on connaît le parallélogramme EFGH, comment déterminer le parallélogramme ABCD qui, à l'aide de la construction précédente permet d'obtenir le parallélogramme EFGH.

L'étude de ces problèmes permettra ainsi de poursuivre deux objectifs :

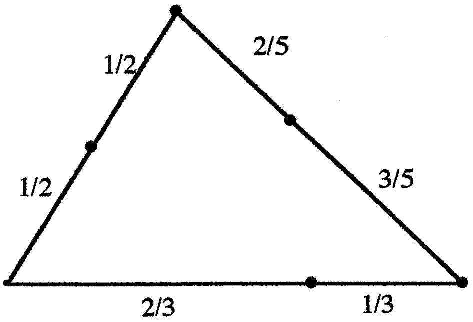
– travailler la technique rencontrée précédemment ;

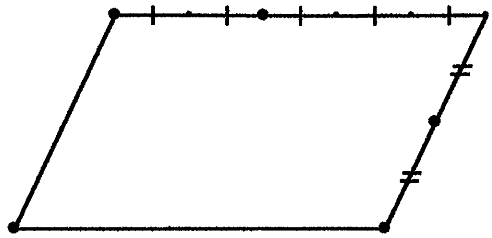
– faire émerger le fait qu'il est intéressant, dans certaines figures, de pointer le plan en certains points particuliers de la figure, et d'exprimer tous les vecteurs sous forme de combinaisons linéaires de deux d'entre eux, qui sont non colinéaires : ceci fournit une transition pour l'étude du type de problèmes **T_6**.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_6 Pointer le plan, et choisir deux vecteurs non colinéaires de manière à pouvoir exprimer tous les vecteurs-positions des points de la figure en fonction de ces deux vecteurs.		

*Autres exemples de spécimens de problèmes pour le type **T_6**.*

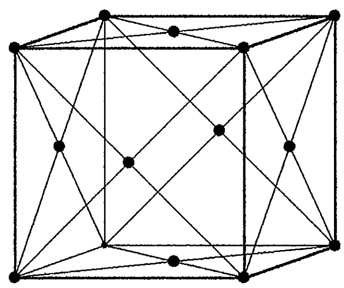
Nous n'indiquons que les figures à modéliser, sans même dénommer les points, pour ne pas induire des choix conditionnés par l'ordre alphabétique, ou pour ne pas gêner le choix d'un point pour origine du fait que son nom serait autre que O.

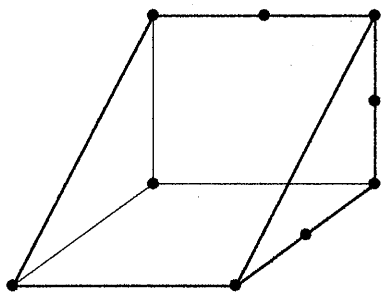




Seuls les points marqués à l'aide d'un gros point noir sont à traiter.

On peut même envisager quelques situations dans l'espace, telles que les suivantes, pour lesquelles la considération de trois vecteurs non coplanaires est à l'espace ce que la considération de deux vecteurs non colinéaires est au plan :



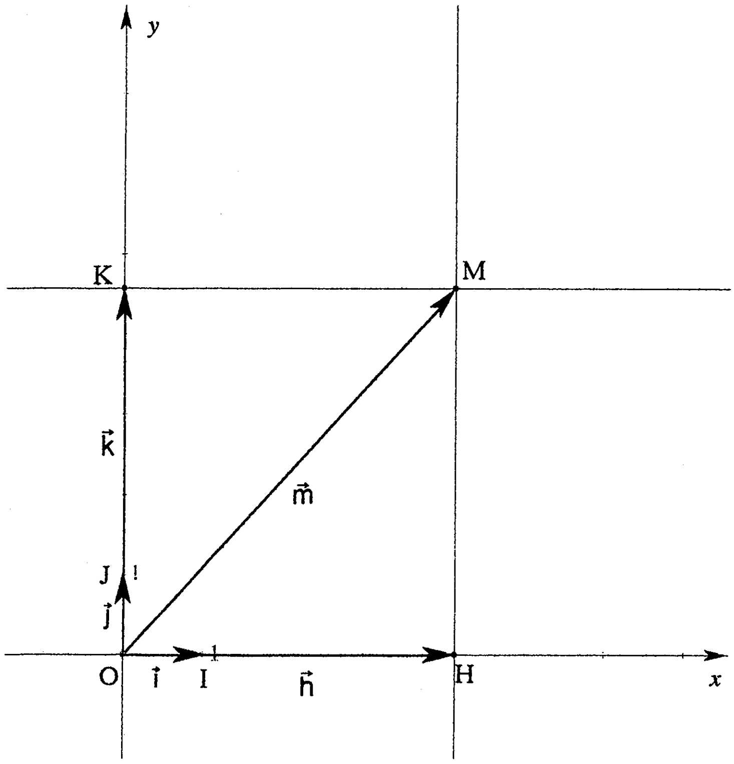


12 – Un moment technologique, facilité par une situation de reprise : bases et repères.

* En classe de Troisième[2], les élèves ont appris à lire et à calculer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ connaissant les coordonnées des points A et B dans un repère (O, I, J) qui est souvent orthonormal, mais toujours orthogonal.
Pointons le plan en O, origine du repère, et considérons les vecteurs positions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ des points I et J. (Remarquons que la dénomination usuelle des vecteurs « de base » est conforme à la convention liée aux vecteurs-positions : c'est la seule trace vivante de cet

[2]Selon les programmes actuellement en vigueur.

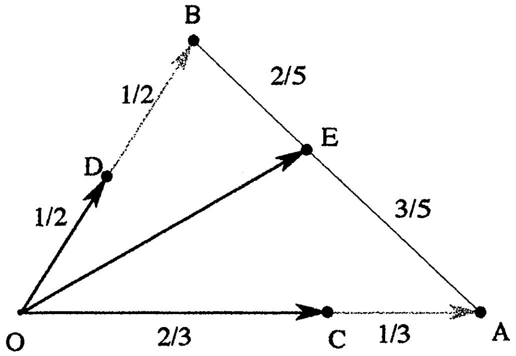
usage dans le système d'enseignement actuellement en vigueur, ce qui rend les notations $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ suspectes aux yeux de certains élèves qui se dépêchent d'écrire à la place des choses comme $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ afin de faire cesser ces notations discordantes).
Considérons un point M du plan, de vecteur-position $\vec{m}$, et désignons respectivement par H et K les projetés orthogonaux de M sur l'axe des abscisses et celui des ordonnées.



Si M a pour coordonnées (x,y) dans le repère (O, I, J) alors x est l'abscisse de H sur l'axe des abscisses muni du repère (O,I), ce qui signifie : $\overrightarrow{OH} = x\ \overrightarrow{OI}$, égalité qui s'écrit aussi $\vec{h} = x\ \vec{\imath}$. De même $\vec{k} = y\ \vec{\jmath}$.
Puisque OHMK est un rectangle, c'est un parallélogramme, et donc $\vec{m} = \vec{h} + \vec{k}$, c'est-à-dire $\vec{m} = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$.

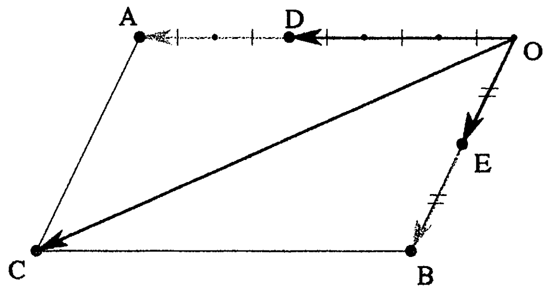
A et B ayant pour coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), on a :
$\vec{a} = x_A\ \vec{\imath} + y_A\ \vec{\jmath}$ et $\vec{b} = x_B\ \vec{\imath} + y_B\ \vec{\jmath}$; puisque $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, on en déduit :
$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\ \vec{\imath} + (y_B - y_A)\ \vec{\jmath}$, résultat qui fait apparaître les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vues en classe de Troisième sous un jour nouveau.

* Tout vecteur du plan s'exprime donc en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, de même que, dans les exercices précédents (de géométrie plane), tous les vecteurs-positions des points de la figure s'exprimaient en fonction de deux d'entre eux, non colinéaires.
Par exemple,



en pointant le plan en O, on peut exprimer tous les vecteurs-positions en fonction de ceux des points A et B, notés $\vec{a}$ et $\vec{b}$; ainsi, compte tenu des techniques vues pour $\mathbf{T_1}$, et notamment la technique $\boldsymbol{\tau_{12}}$,
$\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a}$; $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b}$; $\vec{e} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.

L'autre exemple,



n'apporte rien de nouveau en ce qui concerne $\vec{d}$ et $\vec{e}$: $\vec{d} = \frac{3}{5}\vec{a}$; $\vec{e} = \frac{1}{2}\vec{b}$; en revanche, l'expression de $\vec{c}$ met bien en évidence le fait important : la présence d'un parallélogramme (qui ici n'est plus un rectangle comme c'était le cas pour OHMK) permet d'écrire directement : $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

* Ainsi, dans le cours de Troisième et dans les exercices qui précèdent, on a vu que si on dispose de deux vecteurs non colinéaires ($\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans un cas, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans l'autre), tout vecteur peut s'écrire en fonction de ces deux vecteurs, sous une forme que l'on appelle combinaison linéaire des deux vecteurs.
Une combinaison linéaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur de la forme $\alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$, α et β désignant deux nombres réels.
Le fait que l'on donne un nom au couple de nombres (x, y) tel que $\vec{m} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$, ou encore $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ (on l'appelle coordonnées du point M dans le repère (O, I, J)) donne à penser que pour un vecteur $\vec{m}$ donné le couple (x, y) tel que $\vec{m} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ est unique. En est-il de même lorsque les deux vecteurs non colinéaires n'ont pas des directions perpendiculaires ?

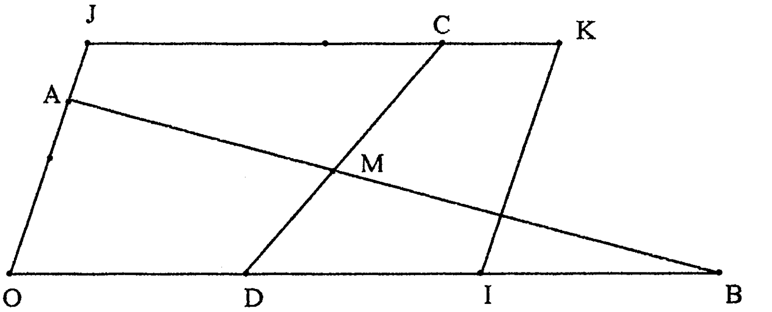
Par exemple, peut-on avoir $3\ \vec{a} + 4\ \vec{b} = 2\ \vec{a} - \vec{b}$, lorsque $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs non colinéaires ?
.... (nous ne détaillons pas la suite de la justification, concernant l'étude du cas général).

* Un couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé base du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique sous forme de combinaison linéaire de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$: $\vec{u} = x\ \vec{\imath} + y\ \vec{\jmath}$. Le couple (x, y) de nombre réels vérifiant cette égalité est appelé coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

13 – Vers d'autres types de problèmes : incidence (intersections, alignements)

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_7 Déterminer vectoriellement le point d'intersection de deux droites (ou de deux segments), ces droites (ou segments) étant déterminés par deux points, que l'on sait repérer par leurs vecteurs-positions.	**$\tau_{7\,2}$** Désignons par A et B les points déterminant la première droite (ou le premier segment), par C et D ceux qui déterminent la deuxième (ou le deuxième). Désignons par M le point d'intersection recherché. D'après **$\tau_{1\,2}$**, on sait traduire l'appartenance de M à chacun des deux ensembles. M est le point de (AB) de paramètre t, et le point de (CD) de paramètre s : $\vec{m} = (1-t)\vec{a} + t\ \vec{b}$. $\vec{m} = (1-s)\vec{c} + s\ \vec{d}$. On écrit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, et $\vec{d}$ en fonction de deux vecteurs de base $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.(Type de problème **T_6**). On substitue ces expressions dans les égalités précédentes. On obtient alors deux écritures de $\vec{m}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$: les coefficients correspondants sont donc égaux : on résout le système d'inconnue (t, s) ainsi obtenu : la solution permet de positionner M sur chacune des droites (ou segments) AB et CD. (Types de problème **T_3** et **T_3 bis**)	Définition de la colinéarité de deux vecteurs. Éventuellement, la notion de représentation paramétrique vectorielle d'une droite passant par un point A donné, de vecteur directeur $\vec{u}$ donné. Le résultat ci-contre en est une application : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La même chose, avec en plus la relation fondamentale permettant de passer de la notation $\overrightarrow{XY}$ à une écriture mobilisant des vecteurs-positions : $\overrightarrow{XY} = \vec{y} - \vec{x}$.

Nous avons déjà eu l'occasion de mettre en œuvre cette technique lors de la description de l'ouvrage de Coffin, à travers des exemples classiques dans le paragraphe 13 du A (pages 320 à 322). Pour un meilleur confort de lecture, et pour illustrer la technique qui vient d'être énoncée (cette dernière apparaît comme étant une variante de celle décrite par Coffin), nous allons traiter un nouvel exemple. Considérons la configuration suivante :



OIKJ est un parallélogramme. A est le point de [OJ] situé aux $\frac{3}{4}$ de [OJ] à partir de O. C est aux trois-quarts de [JK] à partir de J. D est le milieu de [OI], B est le symétrique de D par rapport à I. Il s'agit de localiser le point M d'intersection des segments [AB] et [CD] sur chacun d'eux.

Alors

$\vec{m} = (1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b}$

$\vec{m} = (1-s)\,\vec{c} + s\,\vec{d}$.

Mais, $\vec{a} = \frac{3}{4}\vec{\jmath}$; $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{\imath}$; $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{\imath}$; et $\vec{c} = \frac{1}{4}\vec{\jmath} + \frac{3}{4}\vec{k}$, avec $\vec{k} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, ou plus rapidement $\vec{c} = \vec{\jmath} + \frac{3}{4}\vec{\imath}$.

Ainsi, on obtient les deux expressions suivantes de $\vec{m}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$\vec{m} = \frac{3}{2}t\ \vec{\imath} + \frac{3}{4}(1-t)\,\vec{\jmath}$

$\vec{m} = (-\frac{1}{4}s + \frac{3}{4})\,\vec{\imath} + (1-s)\,\vec{\jmath}$,

ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{3t}{2} = -\frac{1}{4}s + \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}(1-t) = 1 - s \end{cases},$$

système admettant pour solution $t = \frac{11}{27}$ et $s = \frac{5}{9}$.

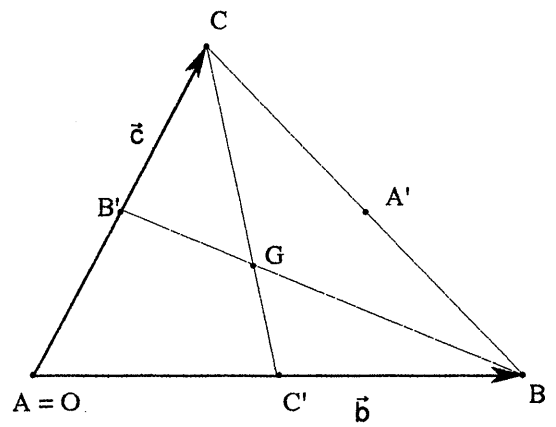
Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \frac{11}{27}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CD}$, autrement dit, M est aux $\frac{11}{27}$ de [AB] à partir de A, et aux $\frac{5}{9}$ de [CD] à partir de C.

Les mêmes techniques sont adaptables pour des problèmes d'intersection de droites, de droites et de plans en géométrie dans l'espace, à condition de repérer tous les vecteurs-positions à l'aide de trois d'entre eux qui seront choisis en pointant l'espace en un point de la figure, et en considérant trois vecteurs-positions non coplanaires.

Un exemple classique de problème de ce type

Il concerne le triangle. Les types de problèmes précédents ont permis de démontrer avec des techniques vectorielles que le point situé sur chacune des médianes au tiers de chacune d'elles à partir de sa base est un point commun aux trois médianes. On pourrait alors penser que la seule utilité du calcul vectoriel soit de retrouver, par un calcul algébrique portant sur des objets nouveaux, des propriétés de géométrie élémentaire qui sont déjà connues : le calcul vectoriel permet-il de trouver la position de ce point sur chacune des médianes ?

C'est un spécimen du type de problèmes que nous venons de traiter, qui constitue un exemple simple d'utilisation de la technique qui vient d'être rencontrée.



Pointons le plan en A, les vecteurs de base étant les vecteurs-positons de B et C.
Alors : $\vec{c}' = \frac{1}{2}\ \vec{b}$, $\vec{b}' = \frac{1}{2}\vec{c}$. Le point G, commun aux deux médianes (BB') et (CC'), est le point de paramètre t sur la première, de paramètre s sur la seconde, ce qui se traduit par:
$\vec{g} = (1-t)\,\vec{b} + \frac{t}{2}\,\vec{c}$ et $\vec{g} = (1-s)\,\vec{c} + \frac{s}{2}\,\vec{b}$; ainsi : $\vec{g} = (1-t)\,\vec{b} + \frac{t}{2}\,\vec{c}$ et $\vec{g} = \frac{s}{2}\,\vec{b} + (1-s)\,\vec{c}$.
De l'unicité de l'écriture du vecteur $\vec{g}$ dans la base ($\vec{b}$, $\vec{c}$) on déduit le système :

$$\begin{cases} 1 - t = \dfrac{s}{2} \\ \dfrac{t}{2} = 1 - s \end{cases}$$

dont la résolution donne $t = s = \frac{2}{3}$.

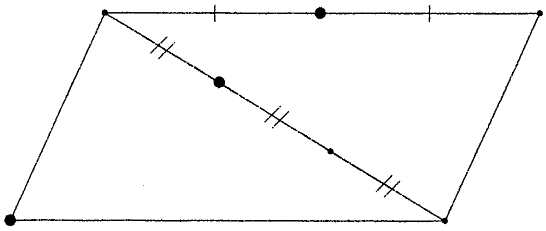
Ainsi G est aux deux-tiers de chacune des deux médianes en partant du sommet du triangle. De $\vec{g} = \frac{1}{3}\,\vec{b} + \frac{1}{3}\,\vec{c}$, on déduit facilement que $\vec{g} = \frac{2}{3}\ \vec{a}'$, ce qui prouve que G est positionné de la même manière sur la troisième médiane.

Nous abordons enfin le type de problèmes dont les actuelles difficultés d'organisation de l'étude nous a motivé au départ de ce travail : les problèmes d'alignement.

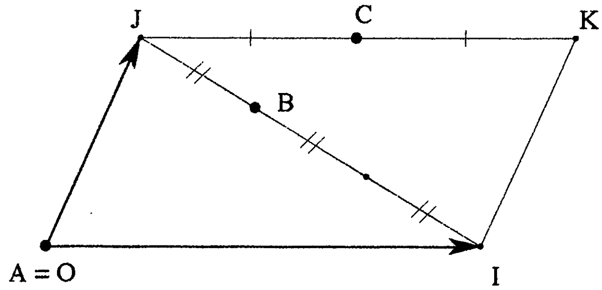
Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_8 Démontrer vectoriellement l'alignement de trois points A, B et C.	τ_{81} * La première technique consiste à démontrer que deux des six vecteurs que l'on peut former à l'aide de ces trois points, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, sont colinéaires. (Nous avons vu toutes les difficultés que la mise en œuvre de cette méthode ne manque pas de susciter).	Caractérisation de l'alignement de trois points à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs.
	τ_{82} * Dans le plan pointé, l'un des trois points, A par exemple, étant le point « origine » (technique τ_{821}). Il suffit alors de démontrer que $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires ; pour cela, il convient en général de les exprimer dans une même base (constituée par les vecteurs-positions de deux points non alignés avec le point « origine ») et de démontrer la proportionnalité de leurs coordonnées dans cette base.	Caractérisation de l'alignement de trois points à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs.
	* Dans le plan pointé, les trois points étant distincts du point « origine ». Deux situations se présentent alors : **Ou bien**, (technique τ_{822}) on arrive à montrer que le vecteur-position de l'un des trois points, $\vec{b}$ par exemple, s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres, la somme des coefficients étant égale à 1 : $\vec{b} = k\,\vec{a} + (1 - k)\,\vec{c}$. Alors, d'après les techniques vues pour **T3**, B appartient au segment [AC], donc A, B et C sont alignés. **Ou bien**, (technique τ_{823}), on cherche trois nombres α, β et γ, non tous nuls, dont la somme est nulle, et tels que: $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$.	Cette technique τ_{823} peut s'introduire à partir de celle qui précède τ_{822}. Sa justification sera évoquée ci-dessous.

Il convient de présenter une suite de problèmes mettant successivement en faiblesse les techniques particulières τ_{821} et τ_{822}, dont la portée est évidemment trop limitée.

* Par exemple, τ_{821} suffit pour démontrer l'alignement des trois points marqués à l'aide de gros points rouges dans la configuration classique suivante :

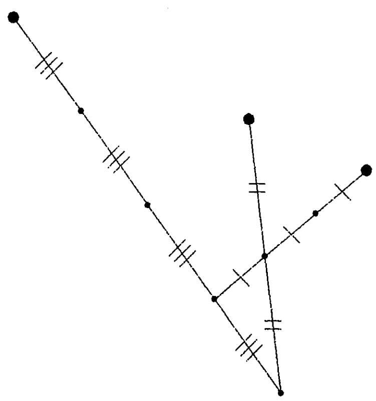


Il suffit de choisir le point « origine » et les vecteurs de base comme indiqué ci-dessous :



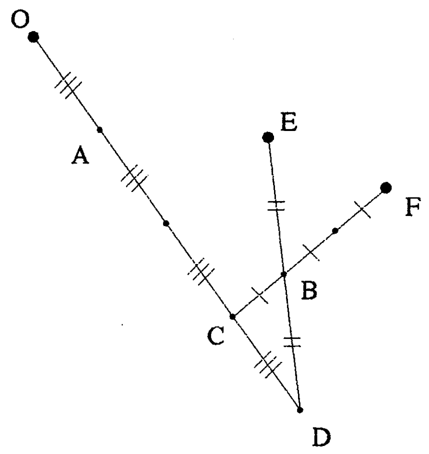
B est au tiers de [JI] à partir de J, donc $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath}$. C est le milieu de [JK], donc $\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{\jmath} + \vec{k})$, avec $\vec{k} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, ce qui donne $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. Ainsi, $3\,\vec{b} = 2\,\vec{c}$, ou encore $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{c}$.

* La situation suivante, tirée de la revue « Repères IREM »[3], rend assez artificielle l'idée de pointer le plan en l'un des trois points dont on veut montrer l'alignement.



[3]Article de N. Vogel, dans le numéro 16, juillet 1994.

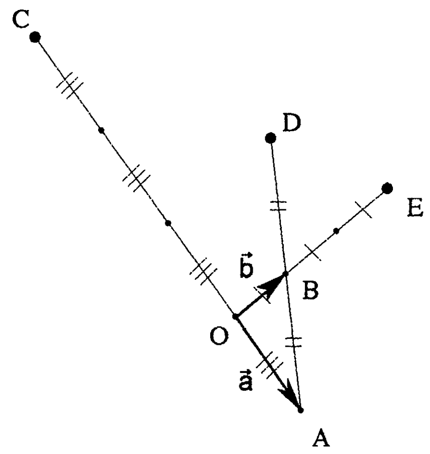
Il s'agit évidemment de démontrer que les points indiqués à l'aide de gros points rouges sont alignés.
En effet, pointons le plan en l'un de ces trois points, comme indiqué ci-dessous.



Se pose alors le problème du choix d'une base : si, pour l'un des vecteurs, on a l'embarras du choix ($\vec{a}$, $\vec{c}$ ou $\vec{d}$, par exemple), il n'en est pas de même pour le second : on hésite entre $\vec{b}$, $\vec{e}$ et $\vec{f}$. Prenons par exemple ($\vec{a}$, $\vec{b}$) comme base, et cherchons les coordonnées de $\vec{e}$ et $\vec{f}$. Alors :
$\vec{c} = 3\,\vec{a}$; $\vec{f} - \vec{c} = 3\,(\vec{b} - \vec{c})$, d'où l'on tire : $\vec{f} = 3\,\vec{b} - 2\,\vec{c}$ ce qui, compte tenu de $\vec{c} = 3\,\vec{a}$, donne $\vec{f} = 3\,\vec{b} - 6\,\vec{a}$.
D'autre part, $\vec{d} = 4\,\vec{a}$; $\vec{e} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{d}$, donc $\vec{e} = 2\,\vec{b} - \vec{d}$, d'où l'on déduit : $\vec{e} = 2\,\vec{b} - 4\,\vec{a}$.
Ainsi $\vec{e} = -4\,\vec{a} + 2\,\vec{b}$ et $\vec{f} = -6\,\vec{a} + 3\,\vec{b}$. Donc $3\,\vec{e} = 2\,\vec{f}$, ce qui permet de conclure.

Ainsi, l'emploi de la technique τ_{821} est possible, mais exige des compétences nouvelles par rapport à la situation précédente :
– oser utiliser une sur-figure, lors du choix du deuxième vecteur de base ;
– savoir faire intervenir des « vecteurs auxiliaires » tels que $\vec{c}$ pour trouver l'expression de $\vec{f}$, et $\vec{d}$ pour trouver celle de $\vec{e}$;
compétences qui risquent de ne pas être disponibles chez une majorité d'élèves.

D'où l'idée de choisir un point « origine » différent des trois points dont on veut montrer l'alignement, ce qui conduit à le choisir en dehors de la droite à laquelle ils appartiennent, idée qui est présente depuis l'étude des premiers types de problèmes.
On peut par exemple choisir le point « origine » et les vecteurs de base comme l'indique la figure ci-dessous :



La modélisation de la figure en est grandement facilitée :

$\vec{c} = -3\,\vec{a}$; $\vec{e} = 3\,\vec{b}$; $\vec{d} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$, d'où l'on déduit $\vec{d} = 2\,\vec{b} - \vec{a}$. La disposition suivante des égalités obtenues :

$\vec{c} = -3\,\vec{a}$

$\vec{e} = \quad\quad 3\,\vec{b}$

$\vec{d} = -\vec{a} + 2\,\vec{b}$, suggère d'écrire $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{e}$:

$\vec{d} = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{e}$.

Mais cette égalité prouve que D appartient au segment [CE], et donne même au passage sa position sur ce segment.

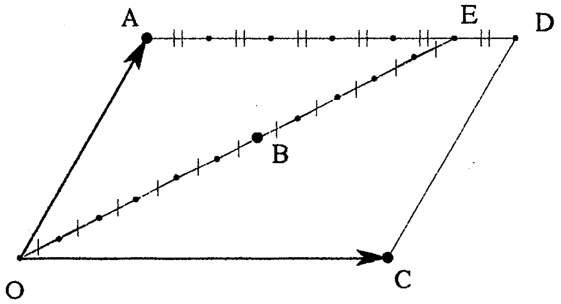
On est donc en présence d'une deuxième technique : τ_{822}.

* Pour introduire la technique la plus élaborée, on peut réutiliser l'exemple précédent et remarquer que l'égalité obtenue peut s'écrire sous la forme :

$$3\,\vec{d} - \vec{c} - 2\,\vec{e} = \vec{0}.$$

combinaison linéaire des trois vecteurs-positions des points qui nous intéressent, qui est nulle, la somme des coefficients (3 – 1 – 2) étant nulle également.

On peut étudier d'autres configurations avec la même technique, par exemple :



E est aux $\frac{5}{6}$ de [AD] à partir de A, B est aux $\frac{6}{11}$ de [OE] à partir de O.

Il s'agit de démontrer que A, B et C sont alignés.

De $\vec{e} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{d}$, $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{b} = \frac{6}{11}\vec{e}$, on déduit $\vec{e} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{c}$, puis $\vec{b} = \frac{6}{11}\vec{a} + \frac{5}{11}\vec{c}$.

Ce résultat peut également s'écrire sous la forme :

$$11\vec{b} - 6\vec{a} - 5\vec{c} = \vec{0},$$

égalité dont le premier membre est une combinaison linéaire des vecteurs-positions des points dont on veut montrer l'alignement, dont la somme des coefficients $(11 - 6 - 5)$ est nulle.

Ce résultat est-il toujours vrai lorsque des points A, B et C sont alignés ?

Si $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, alors $\vec{c} - \vec{a} = k\,(\vec{b} - \vec{a})$, ce qui s'écrit: $\vec{c} + (-1 + k)\vec{a} - k\,\vec{b} = \vec{0}$, avec $1 + (-1 + k) - k = 0$.

Ainsi, si A, B et C sont trois points alignés, leurs vecteurs-positions vérifient une relation de la forme $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$, la somme $\alpha + \beta + \gamma$ étant nulle.

Pour avoir un outil permettant de démontrer l'alignement de trois points, la question de la valeur de vérité de la réciproque se pose.

Ainsi, que dire de trois points A, B et C dont les vecteurs-positions vérifient des relations telles que :

$7\vec{a} - 5\vec{b} - 2\vec{c} = \vec{0}$;

$6\vec{a} - 7\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$;

$-9\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c} = \vec{0}$;

$\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + (-\alpha - \beta)\,\vec{c} = \vec{0}$, (α et β étant deux nombres non nuls) ?

Cet outil permet de résoudre les problèmes évoqués dans les brochures IREM que nous avons évoquées précédemment. Nous illustrerons son emploi à l'aide d'un exemple plus compliqué, relatif à la géométrie dans l'espace, pris dans un devoir donné cette année dans une classe de Première S[3].

ABCD est un tétraèdre ; E, F, G et H sont les points définis par :

$\overrightarrow{DE} = 2\,\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{AF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BG} = 5\,\overrightarrow{BA}$;

$\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CD} + \frac{16}{5}\overrightarrow{CB}$.

Il s'agit de démontrer que E, F, G et H sont coplanaires.

(Voir figure page suivante).

Pointons l'espace en A, et travaillons dans la base $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$.

Les hypothèses se traduisent ainsi :

$\vec{e} = -\vec{d}$;

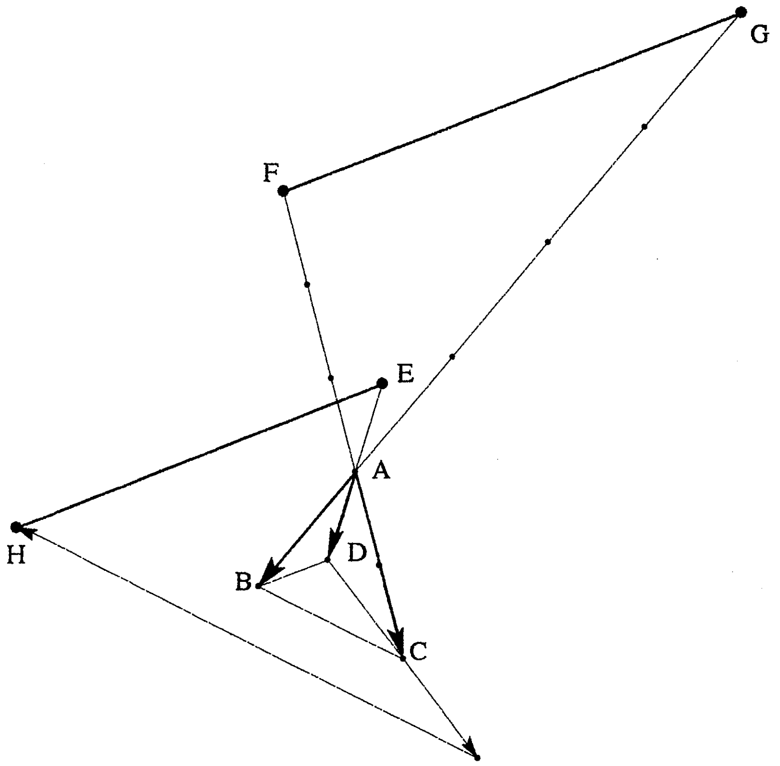
---

[3]Au lycée J. Giraudoux de Châteauroux.

$\vec{f} = -\frac{3}{2}\vec{c}$;

$\vec{g} - \vec{b} = = -5\,\vec{b}$, c'est-à-dire $\vec{g} = -4\,\vec{b}$;

$\vec{h} - \vec{c} = \vec{c} - \vec{d} + \frac{16}{5}(\vec{b} - \vec{c})$, c'est-à-dire $\vec{h} = \frac{16}{5}\vec{b} - \frac{6}{5}\vec{c} - \vec{d}$.



Réécrivons ces égalités de manière à bien faire apparaître les coordonnées de chacun des vecteurs relatives à chacun des vecteurs de base.

$$\begin{aligned}
\vec{e} &= & & & -\vec{d}\\
\vec{f} &= & -\tfrac{3}{2}\vec{c} & &\\
\vec{g} &= -4\,\vec{b} & & &\\
\vec{h} &= \tfrac{16}{5}\,\vec{b} & -\tfrac{6}{5}\vec{c} & & -\vec{d}.
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
5\,\vec{h} &= 16\,\vec{b} & -6\,\vec{c} & & -5\,\vec{d}.\\
\vec{g} &= -4\,\vec{b} & & &\\
\vec{f} &= & -\tfrac{3}{2}\vec{c} & &\\
\vec{e} &= & & & -\vec{d}
\end{aligned}$$

Pour faire disparaître les termes en $\vec{b}$, on est conduit à considérer $4\,\vec{g}$; pour faire disparaître les termes en $\vec{d}$, on est conduit à considérer $-5\,\vec{e}$.

$$\begin{aligned}
5\,\vec{h} &= 16\,\vec{b} & -6\,\vec{c} & & -5\,\vec{d}.\\
4\,\vec{g} &= -16\,\vec{b} & & &\\
\vec{f} &= & -\tfrac{3}{2}\vec{c} & &\\
-5\,\vec{e} &= & & & +5\,\vec{d}
\end{aligned}$$

La disparition des termes en $\vec{c}$ résulte du choix du dernier coefficient, – 4, par lequel on multiplie $\vec{f}$.

On obtient alors $5\,\vec{h} + 4\,\vec{g} - 4\,\vec{f} - 5\,\vec{e} = \vec{0}$. La coplanéité des points E, F, G, H en résulte. On en déduit immédiatement que $5\,(\vec{h} - \vec{e}) = 4\,(\vec{f} - \vec{g})$, c'est-à-dire $5\,\overrightarrow{EH} = 4\,\overrightarrow{GF}$, ce qui montre que les droites (EH) et (FG) sont parallèles (ce que la perspective cavalière – qui conserve le parallélisme – de la configuration spatiale, dessinée ci-dessus, confirme).

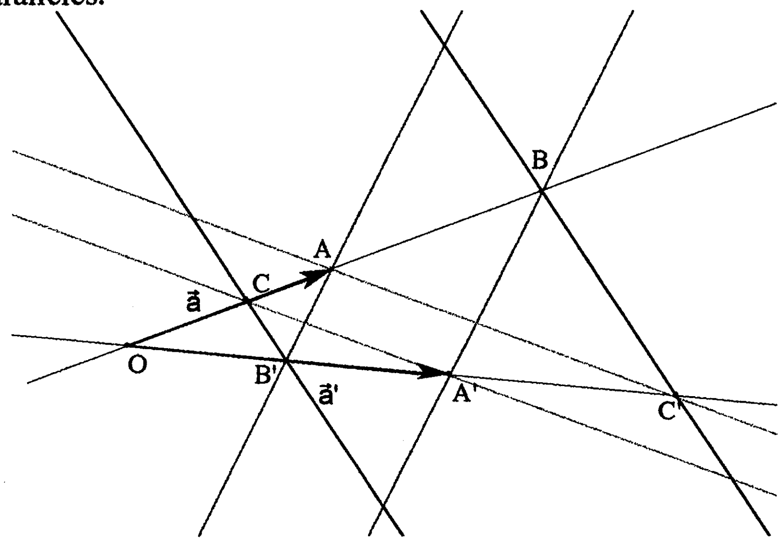
Nous terminerons justement ce paragraphe par l'examen d'un dernier type de problèmes, les problèmes de parallélisme.

Types de problèmes	Techniques	Éléments technologiques
T_9 Démontrer vectoriellement que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.	**τ_9 1** * La première technique consiste à démontrer que deux des quatre vecteurs directeurs que l'on peut former à l'aide de ces points, par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, sont colinéaires.	Caractérisation du parallélisme à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs.
	τ_9 2 Dans le plan pointé, cela revient à démontrer que les vecteurs $\vec{b} - \vec{a}$ et $\vec{d} - \vec{c}$ sont colinéaires ; pour cela, il convient en général de les exprimer dans une même base (constituée par les vecteurs-positions de deux points non alignés avec le point « origine ») et de démontrer la proportionnalité de leurs coordonnées dans cette base. Remarque : Le fait de pointer le plan en l'un des quatre points ne simplifie en général pas considérablement les calculs.	Caractérisation du parallélisme à l'aide de la colinéarité de deux vecteurs.

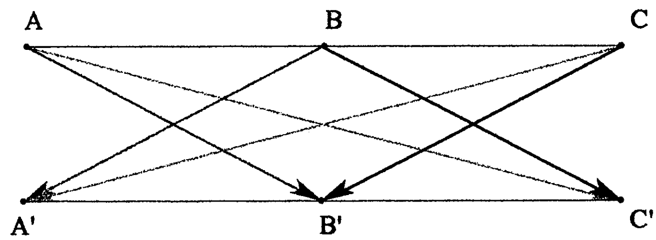
Nous allons illustrer le traitement de ce type de problème à l'aide d'un exemple classique, le théorème de Pappus (affine).

On considère deux droites sécantes en O, trois points A, B et C sur l'une, trois points A', B' et C' sur l'autre. On suppose que les droites (AB') et (A'B) d'une part, (AC') et

(A'C) d'autre part sont parallèles. Il s'agit de démontrer qu'alors les droites (BC') et (B'C) sont parallèles.



La dénomination des droites, qui est ici une difficulté, peut être facilement mémorisée à l'aide du diagramme suivant :



Pour modéliser cette configuration, il est commode de pointer le plan au point O d'intersection des deux droites, et de prendre comme vecteurs de base les vecteurs-positions des points A et A' (ici, l'ordre alphabétique facilite les choses).
On a alors $\vec{b} = \beta\,\vec{a}$ et $\vec{c} = \gamma\,\vec{a}$. D'après le théorème de Thalès, de $\vec{b} = \beta\,\vec{a}$ on déduit $\vec{a}' = \beta\,\vec{b}'$ et de $\vec{c} = \gamma\,\vec{a}$, on déduit $\vec{a}' = \gamma\,\vec{c}'$.
Nous nous intéressons aux vecteurs $\vec{c}' - \vec{b}$ et $\vec{c} - \vec{b}'$. Exprimons les tous les deux dans la base $(\vec{a}, \vec{a}')$:
$\vec{c}' - \vec{b} = \frac{1}{\gamma}\,\vec{a}' - \beta\,\vec{a}$ et $\vec{c} - \vec{b}' = \gamma\,\vec{a} - \frac{1}{\beta}\,\vec{a}'$. On en déduit que $\gamma(\vec{c}' - \vec{b}) = -\,\beta(\vec{c} - \vec{b}')$, ce qui prouve que les deux vecteurs $\vec{c}' - \vec{b}$ et $\vec{c} - \vec{b}'$ sont colinéaires, et donc que les droites (BC') et (B'C) sont parallèles.

Comme premier contact en classe avec cette configuration, on pourra considérer des cas particuliers numériques de β et γ ; mais l'étude du cas général montre l'intérêt de des paramètres pour décrire la configuration (la figure de géométrie, au lieu d'une de ses instanciations), et la puissance du modèle algébrique que constituent les vecteurs pour l'étude des questions de géométrie.

14 – Un deuxième moment technologique : relations vectorielles indépendantes du point « origine ». Vers une autonomisation du modèle.

141 - Relations vectorielles indépendantes du point « origine »

L'étude des types de problèmes **T1** à **T8**[4] met en évidence l'intérêt de relations telles que :

$$\vec{m} = (1-k)\vec{a} + k\,\vec{b}, \text{ où } k \text{ désigne un nombre réel (forme 1)}$$
$$\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}, \text{ avec } \alpha + \beta + \gamma = 0, \text{ (forme 2)}$$

la première étant un cas particulier de la seconde.

Les notations employées cachent le fait que, dès le départ, on a pointé le plan en un point O, et que $\vec{x}$ n'est qu'une manière commode de désigner $\overrightarrow{OX}$. Que se passe-t-il pour une relation de la deuxième forme si l'on remplace le point O par un autre point O' ? Désignons alors par $\vec{x}'$ le vecteur $\overrightarrow{O'X}$. Alors : $\vec{x}' = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OO'}$,

c'est-à-dire $\vec{x}' = \vec{x} - \overrightarrow{OO'}$

$$\alpha\,\vec{a}' + \beta\,\vec{b}' + \gamma\,\vec{c}' = \alpha\,(\vec{a} - \overrightarrow{OO'}) + \beta\,(\vec{b} - \overrightarrow{OO'}) + \gamma\,(\vec{c} - \overrightarrow{OO'})$$
$$= \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} + (\alpha + \beta + \gamma)\,\overrightarrow{OO'}$$
$$= \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c}\text{, puisque } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Ainsi, lorsque la somme des coefficients est nulle, toute combinaison linéaire de trois vecteurs-positions est un vecteur indépendant du point « origine » choisi dans le plan.

Les relations utilisées dans ce qui précède sont donc toutes indépendantes de la manière dont on pointe le plan pour pouvoir utiliser seulement des vecteurs-positions.

Le même résultat est valable pour des combinaisons linéaires de deux vecteurs, de trois vecteurs, pourvu que la somme des coefficients soit nulle.

142 - Vers une autonomisation du modèle

Les combinaisons linéaires de vecteurs-positions ayant un rôle dans ce qui précède font apparaître deux cas particulièrement importants :

– les combinaisons linéaires de deux vecteurs-positions dont la somme des coefficients est égale à 1 ;

---

[4]On notera que la remarque s'étend aussi à T9,où les relations que l'on démontre peuvent s'écrire sous la forme $\vec{d} - \vec{c} - k\vec{b} + k\vec{a} = \vec{0}$, faisant apparaître une combinaison linéaire nulle de quatre vecteurs, dont la somme des coefficients est nulle.

– les combinaisons linéaires de trois vecteurs-positions dont la somme des coefficients est égale à 0.

Une question se pose alors ?

Que dire d'une combinaison linéaire de deux vecteurs–positions dont la somme des coefficients n'est pas égale à 1 ?

Considérons une telle combinaison : $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$.

• Si $\alpha + \beta = 0$, alors $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = \alpha\,\vec{a} - \alpha\,\vec{b} = \alpha\,(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\ \overrightarrow{BA}$.

On retrouve le résultat vu précédemment : une combinaison linéaire de deux vecteurs dont la somme des coefficients est nulle est un vecteur, indépendant du point « origine » choisi.

• Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors deux stratégies peuvent être envisagées pour utiliser ce que nous connaissons sur les combinaisons linéaires de vecteurs-positions :

– se ramener à une combinaison linéaire de deux vecteurs-positions dont la somme des coefficients est égale à 1 ;

– faire intervenir un troisième vecteur-position de manière à obtenir une combinaison linéaire de trois vecteurs-positions dont la somme des coefficients est égale à 0 ; on sait d'ailleurs que la première stratégie est un cas particulier de la seconde.

Quelle que soit la voie choisie, on est amené à introduire un point G dont le vecteur-position $\vec{g}$ vérifie :

$$(\alpha + \beta)\,\vec{g} \equiv \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} \quad (1)$$

ou encore

$$-(\alpha + \beta)\,\vec{g} + \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} \equiv \vec{0}. \quad (2)$$

La relation (2) montre que ce point G est indépendant du choix du point « origine » choisi, et que le point G est sur la droite (AB).

La relation (1), écrite sous la forme : $\vec{g} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\,\vec{a} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\,\vec{b}$, met bien en évidence le fait que la somme des coefficients de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égale à 1 ; elle permet en outre de situer G sur la droite (AB) : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\ \overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\ \overrightarrow{BA}$.

Alors, on peut introduire le vocabulaire relatif au barycentre de deux points pondérés, qui notons-le, n'a pas été sollicité jusqu'ici. Certes, un lecteur ayant été formé en France aura tendance à juger le traitement des types de problèmes qui précèdent comme une intervention de la théorie du barycentre (et peut-être à penser du même coup qu'il est d'un « niveau » trop élevé) ; mais un lecteur anglo-saxon n'y verra rien de surprenant ou de « difficile ». L'analyse en termes de types de problèmes et de techniques permet justement de tempérer de tels jugements, en faisant intervenir assez tardivement les aspects technologico-théoriques qui ont tendance à occuper le terrain du débat, et surtout en attirant l'attention sur ce qui, d'habitude, n'est guère abordé, car supposé faire partie d'un patrimoine commun à tous ceux qui ont étudié la question : les techniques. Ce qui précède montre toute l'attention que devraient leur réserver les responsables de la rédaction des programmes, et les professeurs.

15 – Vers de nouveaux problèmes, ou de nouvelles techniques

Le travail fait avec les combinaisons linéaires de deux vecteurs-positions ouvre la voie à des questions analogues concernant les combinaisons linéaires de 3, 4 et plus généralement *n* vecteurs-positions, ce qui nous engage un peu rapidement dans une fuite technologico-théorique.

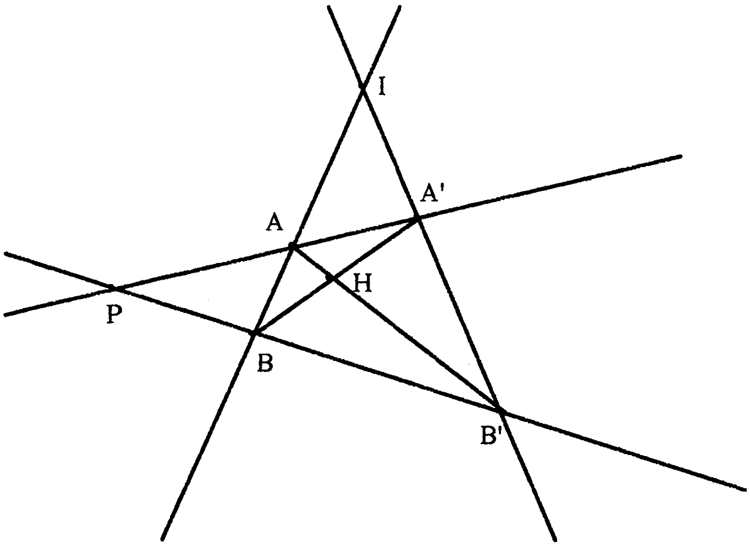
Il sera en effet facile de démontrer tous les résultats connus sous le nom de « fonction vectorielle de Leibniz associée à un système de points pondérés », le théorème du barycentre partiel, ... Les démonstrations se réduiront à du calcul sur les objets de base du calcul vectoriel : les combinaisons linéaires. Les applications de ces résultats sont nombreuses et constituent un important réservoir de sujets très souvent sollicités dans les évaluations, y compris dans les sujets d'examen.

151 - De nouvelles techniques pour les problèmes d'alignement

Si l'on veut éviter de tomber dans ce travers (qui génère des rapports aux mathématiques assez peu solides, de durée limitée) la poursuite de l'étude de la géométrie élémentaire à l'aide du calcul vectoriel va devoir se faire à partir de nouveaux types de problèmes, ou de nouvelles techniques permetttant de résoudre des types de problèmes déjà rencontrés, plus efficaces que celles déjà disponibles. Nous allons illustrer ce dernier aspect à l'aide d'un exemple[5], concernant les problèmes d'alignement : quelle nouvelle technique en rapport avec ce type de problèmes l'introduction du barycentre telle que nous l'avons ébauchée permet-elle ?

[5]Cet exemple est traité dans la plupart des manuels de Première S : il s'agit de démontrer le théorème de Desargues.

Considérons la situation suivante :



P est le point de (AA') de paramètre α, et le point de (BB') de paramètre β :
$\vec{p} = \alpha\,\vec{a} + (1-\alpha)\,\vec{a}'$; $\vec{p} = \beta\,\vec{b} + (1-\beta)\,\vec{b}'$. On en déduit évidemment l'égalité :

$$\alpha\,\vec{a} + (1-\alpha)\,\vec{a}' = \beta\,\vec{b} + (1-\beta)\,\vec{b}'$$

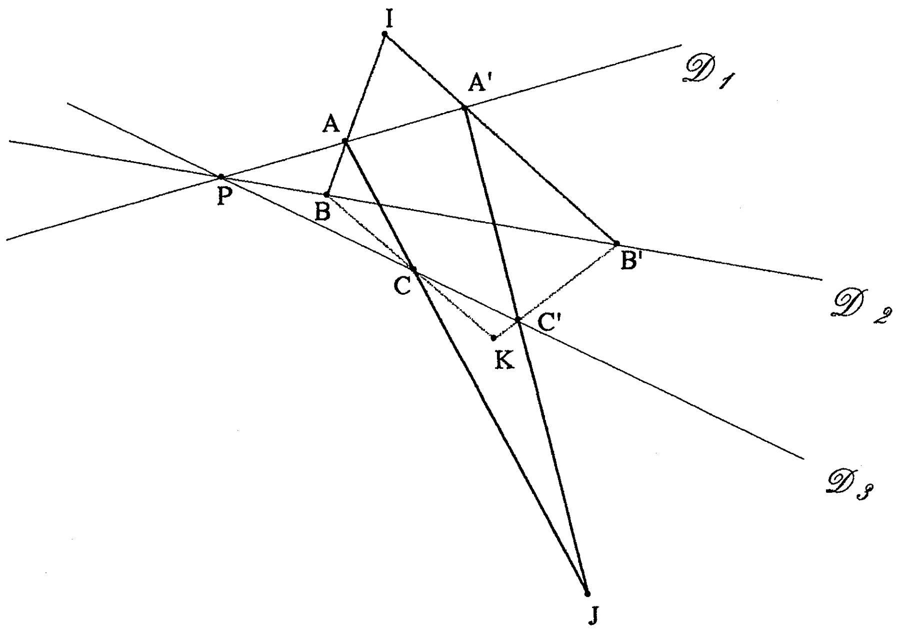
égalité dont les transformations algébriques (telles que la transposition d'un terme d'un membre dans l'autre) n'étaient guère intéressantes avant l'introduction du barycentre, car elles font apparaître des combinaisons linéaires dont la somme des coefficients est en général différente de 1. La définition du barycentre nous autorise cette liberté de manipulation algébrique de telles égalités.

• On en déduit immédiatement de l'égalité précédente : $\alpha\,\vec{a} - \beta\,\vec{b} = -(1-\alpha)\,\vec{a}' + (1-\beta)\,\vec{b}'$.
Si $\alpha - \beta \neq 0$, chacune de ces combinaisons linéaires, dont la somme des coefficients est égale à $\alpha - \beta$, peut s'écrire sous la forme : $(\alpha - \beta)\,\vec{\imath}$, où $\vec{\imath}$ désigne le vecteur-position d'un point I qui appartient à (AB) et à (A'B').
I, point d'intersection de (AB) et (A'B'), est le barycentre de (A, α) et (B, β) ainsi que de (A', $1-\alpha$) et de (B', $1-\beta$).

• De même, des deux expressions de $\vec{p}$, on peut déduire $\alpha\vec{a} - (1-\beta)\vec{b}' = -(1-\alpha)\vec{a}' + \beta\vec{b}$.
Si $\alpha + \beta \neq 1$, le vecteur $\vec{h}$ tel que $(\alpha + \beta - 1)\,\vec{h}$ soit égal à chacune de ces deux combinaisons linéaires est le vecteur-position du point H d'intersection des droites (AB') et (A'B), qui apparaît ainsi comme le barycentre de (A, α) et (B', $\beta - 1$) d'une part, de (A', $\alpha - 1$) et (B, β) d'autre part.

On mesure le confort qu'apporte la notion de barycentre à la modélisation de cette configuration, par rapport à celle n'utilisant qu'un plan pointé et une base, que nous avons employée jusqu'ici. Plus précisément, le barycentre permet d'interpréter en termes de points toutes les combinaisons linéaires de deux vecteurs-positions : il fournit un langage ponctuel correspondant à l'algèbre des vecteurs-positions, ces derniers demeurant cependant au cœur des techniques.

Muni d'une telle technique de modélisation de la configuration du quadrilatère complet, l'étude de la configuration (projective) de Desargues fournit un exemple intégrant la plupart des techniques rencontrées précédemment, et mettant en valeur leur puissance.



Il s'agit de démontrer que I, J et K sont alignés.
En réutilisant
$\vec{p} = \alpha\, \vec{a} + (1-\alpha)\, \vec{a}'$; $\vec{p} = \beta\, \vec{b} + (1-\beta)\, \vec{b}'$; $\vec{p} = \gamma\, \vec{c} + (1-\gamma)\, \vec{c}'$.
D'après l'étude qui précède :
$(\alpha - \beta)\, \vec{i} = \alpha\, \vec{a} - \beta\, \vec{b}$
$(\beta - \gamma)\, \vec{k} = \beta\, \vec{b} - \gamma\, \vec{c}$
$(\gamma - \alpha)\, \vec{j} = \gamma\, \vec{c} - \alpha\, \vec{a}$.
On en déduit que $(\alpha - \beta)\, \vec{i} + (\beta - \gamma)\, \vec{k} + (\gamma - \alpha)\, \vec{j} = \vec{0}$; or la somme des coefficients est nulle. Ce qui suffit pour démontrer l'alignement de I, J et K.

On aura remarqué que nous n'avons nulle part manipulé des barycentres : seuls leurs vecteurs-positions sont utiles dans les calculs. On imagine sans peine que tous les résultats classiques de la théorie du barycentre (associativité et désassociativité du barycentre, par exemple) peuvent se traiter à l'aide des mêmes techniques vectorielles.
Ainsi, par exemple, si G est l'isobarycentre de A, B, C et D, I et J les milieux respectifs de [AB) et [CD], les égalités vectorielles :
$4\,\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$,
$2\,\vec{i} = \vec{a} + \vec{b}$,
$2\,\vec{j} = \vec{c} + \vec{d}$,

montrent très simplement que $4\vec{g} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, c'est-à-dire $2\vec{g} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, c'est-à-dire que G est le milieu de [IJ].

La mise en parallèle de ce traitement avec celui qui est usuellement utilisé au lycée est ici très parlante :

G est le barycentre de (A, 1) , (B, 1), (C, 1) et (D, 1).

I est le barycentre de (A, 1) et (B, 1). Donc, d'après le théorème du barycentre partiel, G est le barycentre de (I, 2), (C, 1) et (D, 1).

D'autre part, J est le barycentre de (C, 1) et (D, 1). Donc, toujours d'après le théorème du barycentre partiel, G est le barycentre de (I, 2) et (J, 2). G est donc l'isobarycentre de I et J, c'est-à-dire le milieu de [IJ].

152 – Un retour à la géométrie analytique

Les progammes de Seconde actuels ou, du moins, l'interprétation qui en est faite par les manuels, introduisent la notion de base du plan surtout dans le but de disposer de l'outil vectoriel pour traiter la géométrie analytique, dans le traitement des questions suivantes :

– condition de colinéarité de deux vecteurs (portant sur leurs coordonnées dans une base);

– équation cartésienne d'une droite dans un repère ;

– condition d'orthogonalité de deux vecteurs (portant sur leurs coordonnées dans une base orthonormale).

Nous avons traité au paragraphe 12 qui précède l'introduction des bases, repères, et coordonnées de points et vecteurs. Les types de problèmes étudiés n'ont pas nécessité l'emploi de la condition de colinéarité de deux vecteurs. Une occasion importante d'emploi de cette condition (qui généralise la notion de couples de nombres proportionnels) se présente dans le traitement de l'équation cartésienne d'une droite. Comme nous l'avons vu lors de l'étude de l'ouvrage de Coffin, l'emploi des vecteurs-positions permet une autre entrée dans l'étude de cette question, que nous allons préciser. Lors de l'étude du type T1 de problèmes, nous avons vu que si la droite (AB) ne passe pas par le point « origine » O, alors un point M du plan appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un nombre réel k tel que :

$$\vec{m} = (1 - k)\,\vec{a} + k\,\vec{b},$$

ce qui revient à dire que l'appartenance du point M à la droite (AB) est équivalente à la relation : $x = 1 - y$, ou encore $x + y = 1$, (x, y) désignant les coordonnées du point M dans le repère $(O\,;\,\vec{a},\,\vec{b})$. En d'autres termes, $x + y = 1$ est une équation cartésienne de (AB) dans le repère $(O\,;\,\vec{a},\,\vec{b})$.

Considérons maintenant un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ du plan et une droite D coupant respectivement les axes des abscisses et des ordonnées en A et B, distincts de O. Si a désigne l'abscisse de A, et b l'ordonnée de B, D a pour équation $X + Y = 1$ dans le repère

(O ; $a\vec{\imath}$, $b\vec{\jmath}$). La relation $\vec{m} = X\,a\,\vec{\imath} + Y\,b\,\vec{\jmath} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ permet d'établir les relations entre X et Y et les coordonnées (x, y) du même point dans le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) : $x = X\,a$; $y = Y\,b$, d'où l'on déduit une équation cartésienne de D dans ce repère :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

L'examen de ce que devient cette équation lorsque b « tend vers l'infini » permet de retrouver le fait que la parallèle à Oy passant par A a pour équation $x = a$. De même, pour la parallèle à Ox passant par B dont une équation est $y = b$.

L'enseignement de cette forme d'équation de droite est tombé en désuétude. Pourtant, les intersections d'une droite avec les axes sont des objets de préoccupation pour de nombreux élèves confrontés à la traditionnelle équation $y = mx + p$. Si p est effectivement « l'ordonnée à l'origine » de la droite, nombreux sont les élèves qui ont tendance à faire comme si m était son « abscisse à l'origine ». Une confrontation des équations écrites toutes les deux sous la même forme :

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

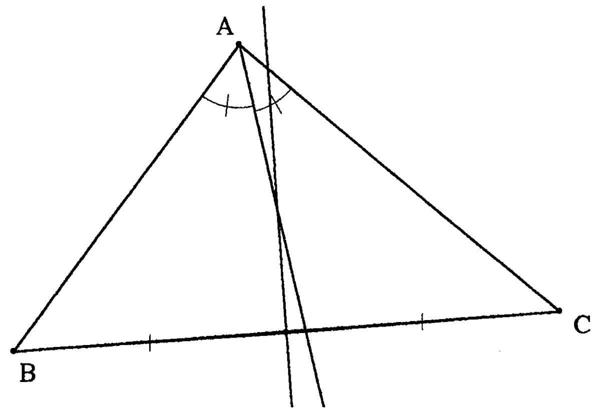
$$y = mx + p,$$

donne une justification algébrique de la question, pourvu que l'unicité de l'équation sous cette forme ait été réglée antérieurement. En effet : si $b = p$ confirme que tout se passe bien pour le point d'intersection avec Oy, le fait que $m = -\dfrac{b}{a}$ souligne qu'en général $m \neq a$.

Nous reviendrons sur cette question dans notre deuxième partie, pour montrer que cette l'expression $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1$ est, à une constante près, la mesure de l'aire du triangle AMB, ce qui nous fournira une autre justification géométrique du fait que M appartient à la droite (AB) si et seulement si $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$. On notera à ce sujet que les notions d'aires (et de volumes) fortement présentes dans les programmes de collège, sont presque complètement délaissées dans les programmes actuels de lycée.

153 – Un retour à la modélisation : demi-plans, intérieurs de triangles ....

On connaît les difficultés engendrées, dans les classes de collège, par les propriétés géométriques liées aux axiomes d'ordre et de séparation : comment prouver que deux points sont ou non dans le même demi-plan ? En général, une démonstration respectant les canons de la démonstration mathématique nécessiterait d'exhiber des axiomes ayant un fort degré d'évidence, mais surtout de démontrer certaines de leurs conséquences qui semblent avoir une évidence encore plus grande, dont la démonstration est très délicate, même pour un mathématicien averti. L'un des avantages de l'introduction des vecteurs réside justement dans le fait que l'on peut définir un demi-plan, l'intérieur d'un triangle, ... et par conséquent amener sur le territoire des énoncés démontrables des propriétés que l'on ne pouvait jusqu'ici convoquer que dans le registre perceptif. Donnons un exemple bien connu, parfois exploité en classe pour souligner qu'il ne faut accorder qu'une confiance limitée aux figures. Considérons un triangle ABC qui n'est pas isocèle en A, la bissectrice intérieure de l'angle A et la médiatrice de [BC].



En partant de cette figure fausse, on peut démontrer que le triangle est ... isocèle en A, ce qui fait clairement éclater une contradiction. Le professeur ne pourra convaincre l'élève de la fausseté de la figure que s'il peut produire une démonstration du fait que la bissectrice intérieure et la médiatrice se coupent dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas A. Sinon, il devra se rabattre sur le terrain de la « figure très précise », avec le risque de renforcer la figure comme moyen de preuve, ce qui est précisément le contraire de ses intentions initiales. Dans le cadre du mémoire professionnel en seconde année d'IUFM à Orléans, plusieurs professeurs stagiaires ont travaillé sur ce thème ou un thème analogue : même en élargissant la gamme des outils mathématiques à celle rencontrée en préparation au CAPES, aucun d'entre eux n'a su modéliser la situation pour trouver une démonstration. (La question fait évidemment intervenir des aspects métriques, et pas seulement affines, que nous n'aborderons qu'au paragraphe 2 suivant. ...).

Quant à la résolution graphique des inéquations du premier degré à deux inconnues, qui figure au programme actuel de Seconde, la démonstration du fait que l'ensemble des solutions est un demi-plan n'est pratiquement jamais donnée dans les manuels sans distinguer le cas où l'inéquation peut se ramener à la forme « $y \leq$ (ou >) $mx + p$ » ou à la forme « $x \leq$ (ou >) k », ce qui renforce le discrédit dont souffre aux yeux des élèves l'équation « générale » $ax + by + c = 0$ ». En d'autres termes, cette question est renvoyée dans le champ des fonctions et de leur traitement graphique, sans que le mot « demi-plan » reçoive une définition mathématique, pourtant possible en utilisant les vecteurs : le demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant le point C est l'ensemble des points M tels qu'il existe un nombre réel k et un nombre réel strictement positif m tels que : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{AC}$; ou encore, en pointant le plan en A, l'ensemble des points M dont le vecteur-position est de la forme $\vec{m} = k\,\vec{b} + m\,\vec{c}$, $k \in \mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{R}^{*+}$.

De même, la question de la modélisation de l'intérieur d'un triangle en termes de vecteurs ou de barycentres permet de lui donner, enfin, le statut de notion mathématique, intégrable dans une démonstration. Elle apparaît actuellement dans les rubriques d'exercices des manuels.

En revanche, l'intérêt des vecteurs pour de telles modélisations n'est guère souligné : ils pourraient intervenir au niveau technologique pour justifier les techniques employées aussi bien pour la résolution graphique des inéquations que pour les questions de régionnement du plan traitées par des moyens autres que ceux de la géométrie analytique (à l'aide du produit scalaire par exemple : ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}.\,\vec{u}$ ait un signe constant ...).

2 – Calcul vectoriel et géométrie euclidienne.

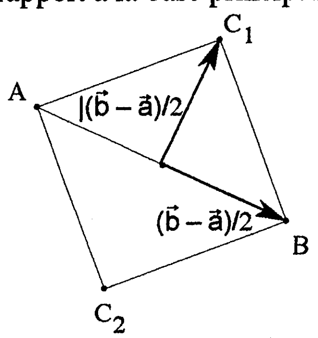
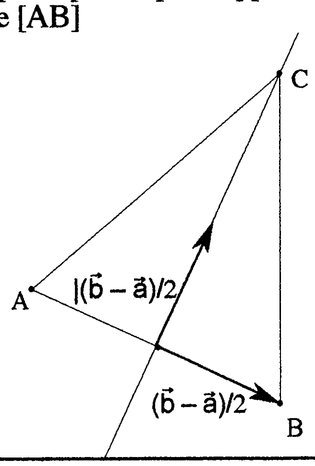
Comme nous l'avons déjà précisé précédemment, il s'agit d'introduire dans le calcul vectoriel des éléments suffisants pour pouvoir modéliser la plupart des figures et transformations de la géométrie euclidienne. Dans les programmes actuels, le caractère euclidien de la géométrie élémentaire est présent dès le début, ce qui permet d'ailleurs d'introduire les vecteurs en considérant leur longueur comme un des leurs attributs ; de même, la notion de perpendicularité est présente dès le début des programmes de collège ; à la fin de ce dernier, on sait calculer une longueur pourvu que l'on dispose d'un repère orthonormal, et en classe de Seconde, on sait, dans le même contexte, caractériser des vecteurs orthogonaux. Pourtant, si l'on sort du cadre de la géométrie analytique, il faut attendre la classe de Première pour pouvoir traduire algébriquement, par l'entremise des vecteurs, qu'un quadrilatère est un losange : les commentaires des programmes de cette classe insistent d'ailleurs à ce sujet, en signalant que l'équivalence de l'égalité $\| \vec{u} \| = \| \vec{v} \|$ et de l'orthogonalité de $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ est à relier aux propriétés du losange et du triangle isocèle. En d'autres termes, il faut attendre de disposer du produit scalaire pour modéliser les figures usuelles de la géométrie euclidienne plane.

Nous avons vu précédemment quelques exemples illustrant la puissance de l'opérateur "I", qui transforme tout vecteur $\vec{u}$ en le vecteur noté $\mathrm{I}\vec{u}$, ayant la même longueur et faisant avec $\vec{u}$ un angle droit dans le sens direct. Nous allons dans ce qui suit faire un inventaire plus complet des configurations usuelles de la géométrie euclidienne plane, et de ses transformations ponctuelles, et pour chacune d'elles, en donner une modélisation en termes de vecteurs-positions par rapport à un point « origine » que nous préciserons, et en utilisant l'opérateur "I". Comme précédemment, nous adopterons une présentation en tableau. Dans un second temps, nous illustrerons les types de problèmes que ces outils permettent de traiter, ainsi que ceux pour lesquels ils sont peu commodes ou insuffisants. Nous serons ainsi amenés à tracer une frontière entre les types de problèmes relevant du calcul avec les vecteurs-positions renforcé par l'opérateur "I", et ceux pour lesquels le produit scalaire est plus adapté.

21 – Le calcul vectoriel enrichi par l'opérateur "I" : modélisation en géométrie euclidienne plane.

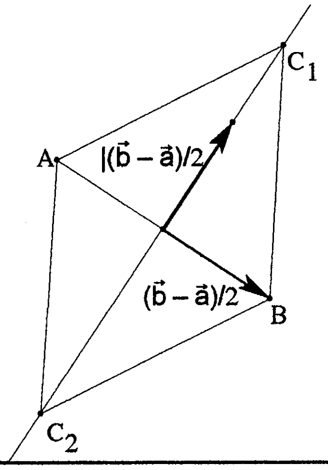
Dans toute la suite, nous nous plaçons dans le plan pointé en un point « origine » O, dont la position n'est pas précisée ; on utilise la convention désormais usuelle consistant à désigner par $\vec{m}$ le vecteur-position du point M.

211 – Modélisation de configurations

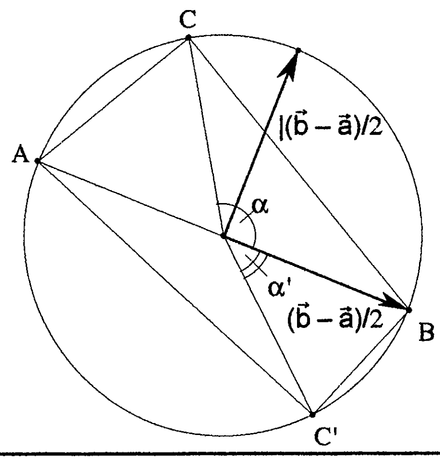
Configuration et mode de description	Modélisation en termes de vecteurs- positions
Triangle ABC rectangle isocèle en C : localisation du sommet principal C par rapport à la base principale [AB] 	$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. $\vec{c}_2 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.
Carré de côté [AB] : localisation de son centre par rapport au côté [AB]. (Voir la figure précédente).	$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. $\vec{c}_2 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.
Triangle ABC isocèle en C : localisation du sommet principal C par rapport à la base principale [AB] 	$\vec{c} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + k\,\mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $k \in \mathbf{R}^*$.

Dans les programmes actuels, la définition de la médiatrice et la caractérisation du triangle isocèle et du losange à l'aide d'axes de symétrie sont connues dès la classe de Sixième. L'opérateur "I" permet de les traduire vectoriellement.

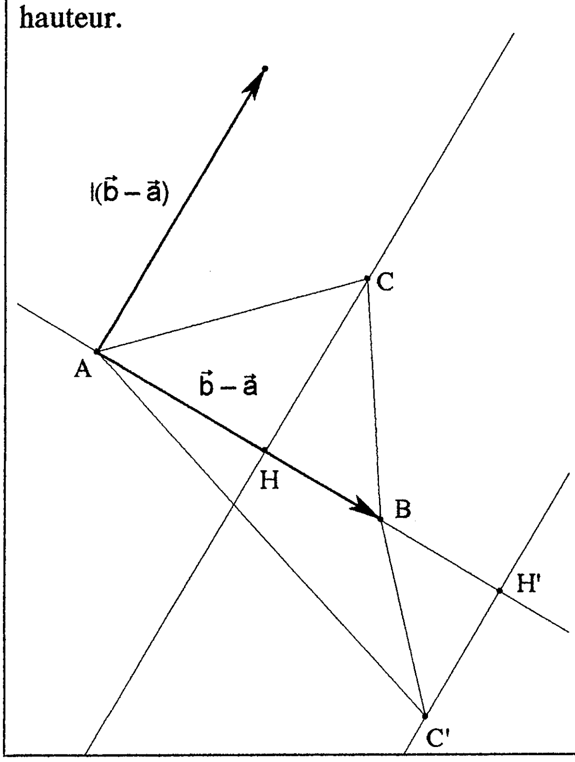
Notons que, de la modélisation précédente, on déduit facilement celle d'un losange à partir d'une de ses diagonales [AB] : les points C et D tels que : $\vec{c} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + k\,\mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$ et $\vec{d} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - k\,\mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$ sont les sommets d'un losange ACBD ayant [AB] comme diagonale.

Configuration et mode de description	Modélisation en termes de vecteurs- positions
Triangle équilatéral ABC : localisation du sommet C par rapport à la base [AB]. 	$\vec{c}_1 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \sqrt{3}\,\mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. $\vec{c}_2 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \sqrt{3}\,\mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$.

Dans les programmes actuels, depuis la classe de Troisième, les élèves connaissent le rapport entre la hauteur d'un triangle équilatéral et son côté : cette modélisation réinvestit cette propriété.

Configuration et mode de description	Modélisation en termes de vecteurs- positions
Triangle rectangle ABC d'hypoténuse [AB] ou point M d'un demi-cercle de diamètre [AB]. 	$\vec{c}$ (ou $\vec{m}$) $= \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + \cos\alpha\,\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2} \pm \sin\alpha\,\mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$. $\alpha \in\ ]0 ; 180[$ (ou $]0 ; \pi[$).

Dans les programmes actuels, la caractérisation du triangle rectangle et l'utilisation du demi-cercle trigonométrique sollicitées ici ont été rencontrées pour la première fois par les élèves en classe de Quatrième.

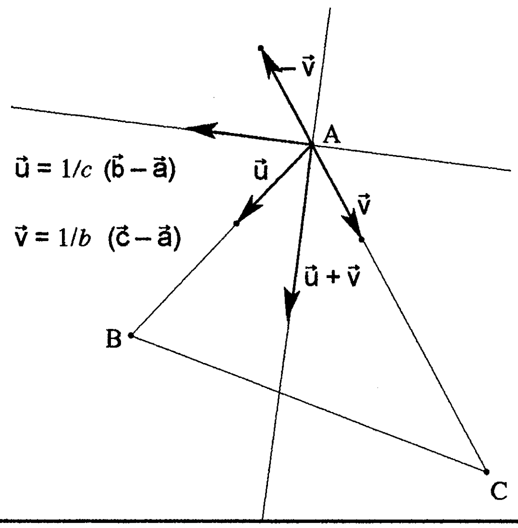
Configuration et mode de description	Modélisation en termes de vecteurs- positions
Triangle quelconque ABC : localisation du pied H de la hauteur sur [AB], et de C sur cette hauteur. 	$\vec{h} = (1-k)\,\vec{a} + k\,\vec{b},\ k \in \mathbf{R}$ $\vec{c} = (1-k)\,\vec{a} + k\,\vec{b} + m\,\mathrm{l}(\vec{b}-\vec{a}),\ k \in \mathbf{R}$, $m \in \mathbf{R}^*$.

212 – Représentation paramétrique vectorielle de droites remarquables

Le travail fait précédemment pour les configurations permet d'obtenir directement celle d'une médiatrice.

Droite remarquable	Représentation paramétrique vectorielle
Médiatrice du segment [AB]	$\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + k\,\mathrm{l}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, $k \in \mathbf{R}$, ou $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + m\,\mathrm{l}(\vec{b}-\vec{a})$, $m \in \mathbf{R}$

En revanche, la question relative aux bissectrices est plus délicate. Les positions sur (BC) des points d'intersection avec les deux bissectrices de l'angle A ne font plus partie des connaissances actuellement rencontrées au collège. En revanche, le travail de modélisation qui suit n'est pas sans rapport avec la construction de ces bissectrices à la règle et au compas, qui fait l'objet d'un enseignement depuis la classe de Sixième.

Droite remarquable	Représentation paramétrique vectorielle
Bissectrice intérieure (resp. extérieure) de l'angle A dans le triangle ABC.  	On pose, selon les conventions usuelles : AB = c ; AC = b. $\vec{u}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens : $\vec{u} = \frac{1}{b}\ \overrightarrow{AB}$. $\vec{v}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens : $\vec{v} = \frac{1}{c}\ \overrightarrow{AC}$. Point M de la bissectrice intérieure : $\vec{m} - \vec{a} = k\ (\vec{u} + \vec{v}),\ k \in \mathbf{R}$. Point M de la bissectrice extérieure : $\vec{m} - \vec{a} = k\ (\vec{u} - \vec{v}),\ k \in \mathbf{R}$.

Cette modélisation s'appuie sur la construction d'un losange de sommet A dont deux côtés sont portés par [AB] et [AC] : on considère dans ce but les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont bien même norme, puisqu'ils sont tous les deux de norme 1. L'idée de considérer de tels vecteurs n'est pas très naturelle : la recherche des vecteurs unitaires colinéaires à un vecteur non nul $\vec{u}$ donné est un problème qui méritera d'être abordé lors de l'introduction de la multiplication d'un vecteur par un nombre. Cette question est très développée dans les ouvrages du début du siècle, où l'on disposait d'une notation pour le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{u}$ et de même sens (le $\mathbf{u}_1$ de Coffin, par exemple) ainsi que d'un nom et d'une notation pour le vecteur colinéaire à $\vec{u}$, de même sens et dont la norme est l'inverse de celle de $\vec{u}$ (vecteur « inverse » et notation $\frac{1}{\mathbf{u}}$ ou $\mathbf{u}^{-1}$ chez Coffin) dont nous verrons plus loin l'utilité.

Quant aux deux dernières droites remarquables dans un triangle, leur représentation paramétrique vectorielle ne pose guère de problème.

Droite remarquable	Représentation paramétrique vectorielle
Médiane issue de A dans le triangle ABC.	$\vec{m} = \vec{a} + k\ \left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{a}\right),\ k \in \mathbf{R}$.
Hauteur issue de A dans le triangle ABC.	$\vec{m} = \vec{a} + k\ \mathrm{l}(\vec{c} - \vec{b})\ ,\ k \in \mathbf{R}$.

Connaissant les éléments caractéristiques d'une transformation ponctuelle, et en particulier les vecteurs-positions de leurs points caractéristiques (s'il en existe), peut-on exprimer le vecteur-position $\vec{m}'$ de l'image M' d'un point M en fonction du vecteur-position $\vec{m}$ de ce dernier ?

La réponse est simple pour les translations, les homothéties (et en particulier la symétrie centrale), transformations que l'on aurait pu évoquer dans le paragraphe 1 qui précède ; l'introduction de l'opérateur "I" est particulièrement adapté aux quarts de tours directs, et permet de traiter également les rotations, les similitudes directes.

Transformation	Définition vectorielle
Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	$\vec{m}' = \vec{m} + (\vec{b} - \vec{a})$
Homothétie de centre P et de rapport k.	$\vec{m}' = \vec{p} + k\,(\vec{m} - \vec{p})$
Symétrie centrale de centre P.	$\vec{m}' = 2\,\vec{p} - \vec{m}$
Quart de tour direct de centre P	$\vec{m}' = \vec{p} + \mathrm{I}(\vec{m} - \vec{p})$
Rotation de centre P d'angle de mesure α	$\vec{m}' = \vec{p} + \cos\alpha\,(\vec{m} - \vec{p}) + \sin\alpha\,\mathrm{I}(\vec{m} - \vec{p})$
Similitude directe centre P, d'angle de mesure α, et de rapport k.	$\vec{m}' = \vec{p} + k\,[\cos\alpha\,(\vec{m} - \vec{p}) + \sin\alpha\,\mathrm{I}(\vec{m} - \vec{p})]$

Le résultat concernant les rotations n'est autre que celui qui figure dans l'actuel programme de Première S sous la forme du commentaire suivant :

« On mettra en valeur et on exploitera l'écriture vectorielle d'une rotation : pour tout point M, ayant M' pour image :

$$\overrightarrow{OM'} = \cos\theta\,\overrightarrow{OM} + \sin\theta\,\overrightarrow{ON},$$

où N est l'image de M par le quart de tour direct de centre O. »,

commentaire dont nous avons déjà remarqué qu'il était peu pris en compte par les manuels. On peut sans doute interpréter cette lacune par la lourdeur des notations et le nombre des objets mis en œuvre (la description d'une rotation en fait intervenir une deuxième, pour laquelle la notation $\overrightarrow{ON}$ relative à l'image de M n'a pas de caractère fonctionnel au sens mathématique et au sens pratique de ce mot. L'opérateur "I" permet, comme nous l'avons déjà vu dans le paragraphe A de cette partie, une exploitation des relations vectorielles dans l'étude de configurations.

On note ici une ressemblance avec les formules analytiques permettant de décrire les transformations avec les nombres complexes. Mais deux remarques s'imposent ici :

– d'une part, ce sont précisément ces égalités vectorielles que l'on traduit en termes d'affixes de vecteurs et de points ;

– d'autre part, les relations vectorielles qui apparaissent ici ne font intervenir aucun repère orthonormal donné à l'avance ; elles sont par ailleurs indépendantes du choix du point « origine » O. Elles ne portent que sur les éléments géométriques qui interviennent naturellement dans la question.

En revanche, la définition vectorielle d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le cadre précédent pose problème : on sait que le produit scalaire permettra de résoudre le problème, en réglant d'abord la question de la définition vectorielle d'une projection orthogonale sur une droite. Nous reprendrons cette question dans le paragraphe 25 suivant.

22 – Types de problèmes, techniques

221 – Des types de problèmes et des techniques déjà évoquées

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que de nombreuses figures usuelles de la géométrie euclidienne plane peuvent être modélisées dans le calcul vectoriel augmenté de l'opérateur "I". L'utilité de telles modélisations nous était déjà apparue lors de l'étude de configurations conduite dans le paragraphe A, notamment aux paragraphes 23 et 24 consacrés à l'ouvrage de Dan Pedoe et à des brochures ou articles français plus récents. Ces configurations devenues « classiques » interviennent dans des problèmes d'origine très diverses. Nous allons l'illustrer à l'aide de quelques exemples.

• D'abord, la configuration formée d'un triangle et de carrés construit sur ses côtés évoque bien sûr certaines démonstrations du théorème de Pythagore lorsque le triangle initial est rectangle. À partir de cette situation, on peut se poser de multiples questions :

– que se passe-t-il, en termes d'aires, si on remplace le triangle initial par un triangle quelconque ?

– que se passe-t-il, en termes d'aires, si on remplace le triangle initial par un triangle quelconque, et les carrés par des parallélogrammes ?

Puis, on peut étudier les configurations obtenues en s'intéressant à des propriétés autres que les aires : perpendicularité de certaines droites, comparaison de longueurs de segments ....

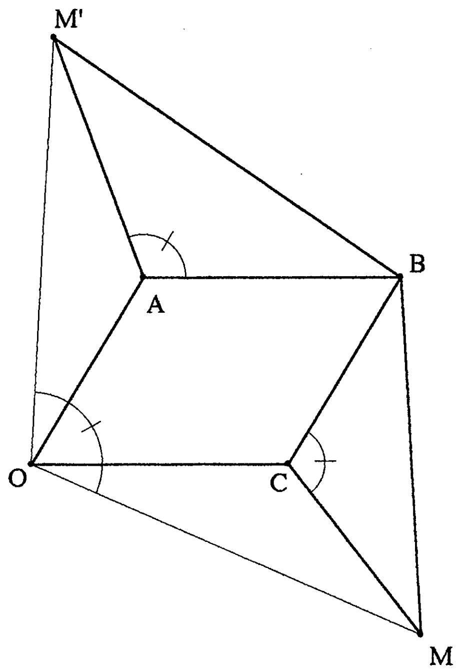
• La configuration des triangles de Napoléon peut être sollicitée pour trouver le point P intérieur à un triangle ABC ayant trois angles aigus tel que PA + PB + PC soit minimum[6]. On peut ensuite étudier pour elle-même cette configuration, riche en propriétés d'alignement, et d'égalité d'angles.

---

[6]Voir par exemple la brochure de la collection Inter-IREM intitulée « Thèmes en Seconde », 1981, IREM d'Orléans.

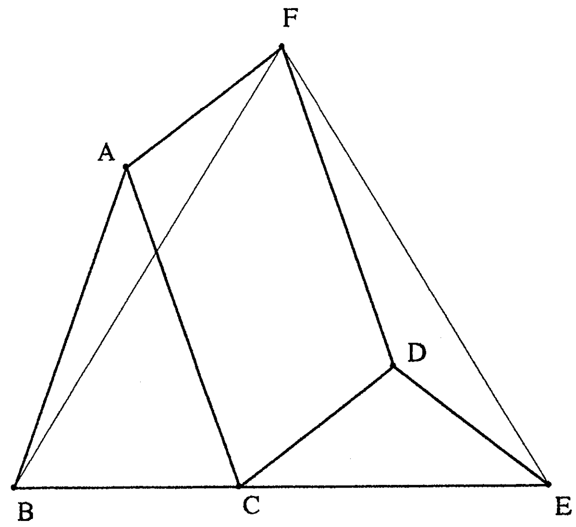
On s'aperçoit alors que l'idée de construire des figures semblables (carrés, ou triangles isocèles rectangles) sur les côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère est intéressante. En voici un autre exemple.

• L'appareil à rotation est formé d'un parallélogramme, ainsi que de deux triangles isocèles semblables construits sur deux côtés consécutifs du parallélogramme.



On peut alors démontrer que le triangle OMM' est semblable aux deux triangles isocèles initiaux CMB et ABM'....

Les manuels scolaires récents (voir notre troisième partie, et plus particulièrement le paragraphe 23) ont proposé l'étude de nombreuses situations de ce type, et nous avons montré dans le A de cette quatrième partie comment l'emploi du calcul vectoriel complété par l'opérateur "I" permet de la traiter d'une manière très efficace.Nous ne reprendrons pas l'étude de toutes ces situations avec ces techniques. En revanche, nous en exposerons une dernière, mettant en œuvre des triangles isocèles (non rectangles, et qui ne sont pas nécessairement semblables) qui montre l'utilité des modélisations dont nous avons dressé un inventaire au 21.



ABC et CDE sont deux triangles isocèles de sommets principaux respectifs A et D, dont les bases principales [BC] et [CE] sont portées par la même droite. ACDF est un parallélogramme. Il s'agit de démontrer que le triangle BFE est lui aussi isocèle[8].

La figure peut se modéliser ainsi :

$\vec{a} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + k\,\mathrm{I}(\vec{c} - \vec{b})$ (1)

$\vec{d} = \dfrac{\vec{c} + \vec{e}}{2} + k'\,\mathrm{I}(\vec{e} - \vec{c})$ (2)

$\vec{a} + \vec{d} = \vec{c} + \vec{f}$. (3)

Il convient de montrer qu'il existe un nombre k'' tel que

$\vec{f} = \dfrac{\vec{b} + \vec{e}}{2} + k''\,\mathrm{I}(\vec{e} - \vec{b})$.

De (3), on tire $\vec{f} = \vec{a} + \vec{d} - \vec{c}$, ce qui incite à additionner (1) et (2) membres à membres pour expremer $\vec{a} + \vec{d}$. On obtient alors :

$\vec{f} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \dfrac{\vec{c} + \vec{e}}{2} - \vec{c} + k\,\mathrm{I}(\vec{c} - \vec{b}) + k'\,\mathrm{I}(\vec{e} - \vec{c})$.

Or $\dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \dfrac{\vec{c} + \vec{e}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{e}}{2} + \vec{c}$. Donc :

$\vec{f} = \dfrac{\vec{b} + \vec{e}}{2} + k\,\mathrm{I}(\vec{c} - \vec{b}) + k'\,\mathrm{I}(\vec{e} - \vec{c})$.

Les deux derniers termes de la somme sont des vecteurs orthogonaux à la droite (BE) : leur somme est donc colinéaire à $\mathrm{I}(\vec{e} - \vec{b})$, ce qui permet de conclure.

On utilise ainsi implicitement l'homogénéité de l'opérateur "I", c'est-à-dire la propriété : pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre k, $\mathrm{I}(k\,\vec{u}) = k\,\mathrm{I}\vec{u}$.

Ceci nous rappelle qu'un moment technologique relatif à l'opérateur "I" est indispensable : il convient de démontrer sa linéarité ainsi que la propriété $\mathrm{I}\,(\mathrm{I}\,\vec{u}) = -\vec{u}$.

[8]La technique employant une transformation vectorielle solliciterait ici la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à la droite vectorielle de base $\mathrm{I}\overrightarrow{BC}$.

Une manière commode de le faire est de recourir à son expression dans une base orthonormale directe (si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une telle base, et si $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$, alors $\mathrm{I}\,\vec{u} = -\,b\,\vec{i} + a\,\vec{j}$.).

222 – De nouveaux problèmes, où les mêmes techniques suffisent.

Dans ce paragraphe nous allons évoquer de nouveaux types de problèmes mettant en jeu les aspects euclidiens des configurations, que l'on peut encore traiter à l'aide des outils et techniques précédents. Pour cela, nous donnerons deux exemples de niveau de difficulté fort différent.

– le premier est une simple application des représentations paramétriques de droites remarquables dans le triangle, et n'est guère original : il concerne la localisation du point d'intersection de la bissectrice intérieure ou extérieure d'un angle d'un triangle et du côté opposé. Il montre comment le type de problèmes **T7** et les techniques qui lui sont associées peuvent s'étendre à certaines configurations relevant de la géométrie euclidienne.

– le deuxième, plus original, reprend la question des configurations formées par un quadrilatère sur les côtés duquel on construit des quadrilatères (ou des triangles) semblables, ces quadrilatères étant des figures usuelles de la géométrie euclidienne.

Points d'intersection des bissectrices d'un angle d'un triangle avec le côté opposé

Étant donné un triangle ABC, nous avons vu précédemment comment obtenir des représentations paramétriques vectorielles des deux bissectrices de l'angle A. En pointant le plan en A, et en travaillant dans la base $(\vec{b}, \vec{c})$, il est facile de déterminer une représentation paramétrique de ces bissectrices et de la droite (BC). Les techniques vues à propos de T7 permettent d'obtenir les vecteurs-positions de leurs points d'intersection : on retrouve ainsi le fait que ces points sont ceux qui divisent le segment [BC] dans les rapports $\frac{c}{b}$ et $-\frac{c}{b}$.

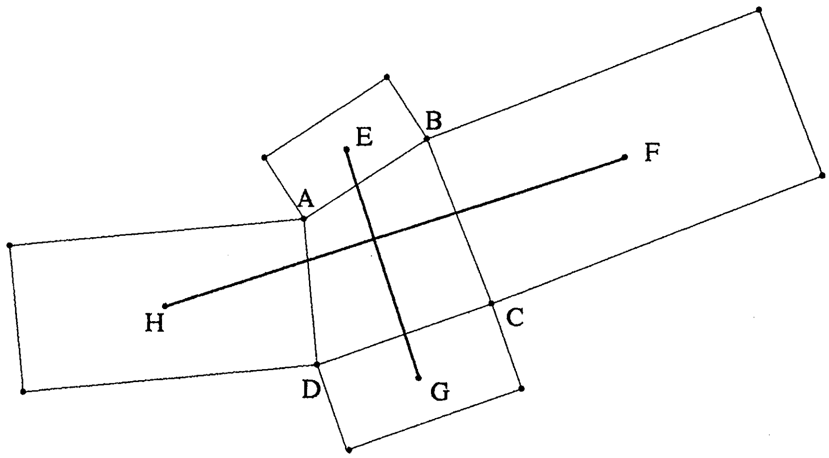
Généralisation des configurations du type « Van Aubel »

À partir de configurations telles que celle de « Van Aubel », on peut se demander quelles propriétés géométriques demeurent valables quand on remplace les carrés par des rectangles semblables, ou par des losanges semblables. Dans l'ouvrage « Geometry turned on !, dynamic software in learning, teaching, and research »[8], Michael de Villiers examine cette question du point de vue du rôle de la preuve dans les recherches conduites

[8]KING J. R., SCHATTSCHNEIDER D., 1997, *Geometry turned on !, dynamic software in learning, teaching, and research,* MAA Notes 41, The Mathematical Association of America.

à l'aide de logiciels tels que Cabri-Géomètre ou Sketchpad. Nous allons reprendre cette question du point de vue de la recherche d'une preuve dans le cadre du calcul vectoriel étendu que nous avons introduit.

Considérons la première configuration, conjecturée par de Villiers à l'aide de Cabri.



En construisant des rectangles sur les côtés [AB] et [CD] dont le rapport *L/l* soit égal à k, et sur les côtés [BC] et [DA] des rectangles dont le rapport *L/l* soit égal à $\frac{1}{k}$, à partir de manipulations à l'aide de Cabri, on émet la conjecture suivante : les centres E, F, G et H des rectangles ainsi obtenus forment un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires.

Les modélisations établies plus haut permettent d'obtenir rapidement une modélisation de la figure :

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} + k \ \mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} + \frac{1}{k} \ \mathrm{I}\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{c}+\vec{d}}{2} + k \ \mathrm{I}\frac{\vec{d}-\vec{c}}{2}$$

$$\vec{h} = \frac{\vec{d}+\vec{a}}{2} + \frac{1}{k} \ \mathrm{I}\frac{\vec{a}-\vec{d}}{2}$$

Le résultat à démontrer se modélise ainsi :

$\mathrm{I}(\vec{g}-\vec{e})$ est colinéaire à $\vec{h}-\vec{f}$.

Or $\vec{g}-\vec{e} = \frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{2} + k \ \mathrm{I}\frac{\vec{d}-\vec{c}}{2} - k \ \mathrm{I}\frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}$, c'est-à-dire :

$\vec{g}-\vec{e} = \frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{2} + k \ \mathrm{I}\frac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2}$, d'où l'on déduit (en tenant compte du fait que $\mathrm{I}(\mathrm{I}\vec{u}) = -\vec{u}$) :

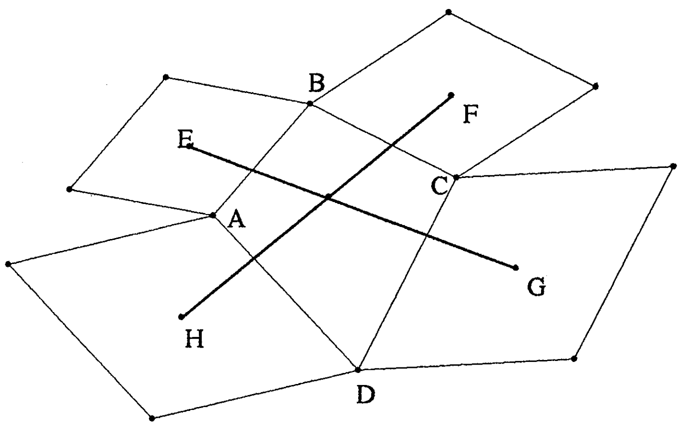
$$\mathrm{I}(\vec{g}-\vec{e}) = -k \ \frac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2} + \mathrm{I}\ \frac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{2} .(1)$$

D'autre part :

$$\vec{h}-\vec{f} = \frac{\vec{d}+\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}}{2} + \frac{1}{k} \ \mathrm{I}\frac{\vec{a}-\vec{d}-\vec{c}+\vec{b}}{2} . (2)$$

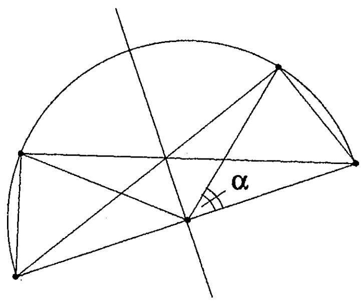
La comparaison de (1) et (2) montre que :
$k\,(\vec{h} - \vec{f}) = -\,\mathrm{l}(\vec{g} - \vec{e})$,
ce qui prouve le résultat attendu ((EG) $\perp$ ((FH)) et donne de plus une information concernant les distances EG et FH : EG = k FH.

La deuxième configuration découverte par de Villiers est la suivante :



En construisant des losanges sur les côtés [AB] et [CD] dont le rapport L/l des diagonales soit égal à k, et sur les côtés [BC] et [DA] des losanges dont le rapport L/l des diagonales soit égal à $\frac{1}{k}$,il s'agit de démontrer la propriété suivante : les centres E, F, G et H des losanges ainsi obtenus forment un quadrilatère dont les diagonales ont même longueur.

Les centres de ces losanges forment avec chacun des côtés un triangle rectangle, dont le rapport des côtés de l'angle droit est égal au rapport des diagonales du losange. Changer ce rapport en son inverse s'obtient en intervertissant les côtés de l'angle droit :



On obtient alors la modélisation suivante de la figure :
$\vec{e} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \cos\alpha\,\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} + \sin\alpha\,\mathrm{l}\frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$.
$\vec{f} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \cos\alpha\,\frac{\vec{c} - \vec{b}}{2} + \sin\alpha\,\mathrm{l}\frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$.
$\vec{g} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} + \cos\alpha\,\frac{\vec{d} - \vec{c}}{2} + \sin\alpha\,\mathrm{l}\frac{\vec{d} - \vec{c}}{2}$.
$\vec{h} = \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2} - \cos\alpha\,\frac{\vec{a} - \vec{d}}{2} + \sin\alpha\,\mathrm{l}\frac{\vec{a} - \vec{d}}{2}$.
Le résultat à démontrer se modélise ainsi :

$(\vec{g}-\vec{e})$ a même norme que $\vec{h}-\vec{f}$, autrement dit :

il existe un nombre θ tel que $\vec{h}-\vec{f} = \cos\theta\,(\vec{g}-\vec{e}) + \sin\theta\ \mathrm{I}\,(\vec{g}-\vec{e})$.

Or :

$\vec{g}-\vec{e} = \dfrac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{2} + \cos\alpha\,\dfrac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2} + \sin\alpha\ \mathrm{I}\dfrac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2}$, donc

$\mathrm{I}(\vec{g}-\vec{e}) = \mathrm{I}\dfrac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{2} + \cos\alpha\ \mathrm{I}\,\dfrac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2} - \sin\alpha\,\dfrac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2}$,

et $\vec{h}-\vec{f} = \dfrac{\vec{d}+\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}}{2} - \cos\alpha\,\dfrac{\vec{a}-\vec{d}-\vec{c}+\vec{b}}{2} + \sin\alpha\ \mathrm{I}\dfrac{\vec{a}-\vec{d}-\vec{c}+\vec{b}}{2}$.

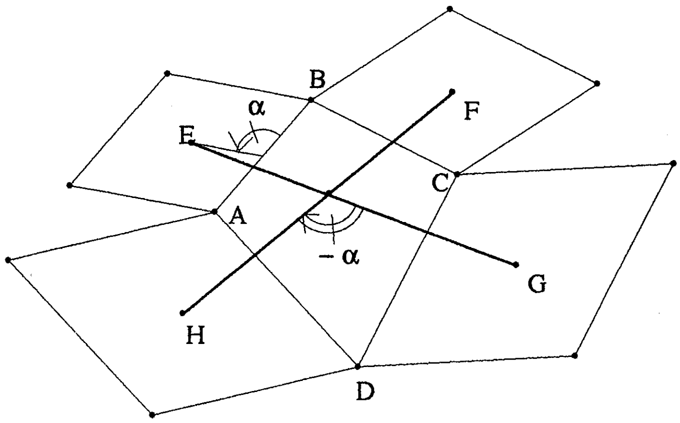
On peut conjecturer que le nombre θ à trouver a une relation simple avec α. La figure permet d'émettre une hypothèse à cet égard, que la démonstration viendra confirmer ou infirmer[10].

En considérant à cet égard les combinaisons linéaires $(\cos\alpha)\,(\vec{g}-\vec{e}) + (\sin\alpha)\ \mathrm{I}(\vec{g}-\vec{e})$ et $(\cos\alpha)\,(\vec{g}-\vec{e}) - (\sin\alpha)\ \mathrm{I}(\vec{g}-\vec{e})$, on obtient :

$(\cos\alpha)\,(\vec{g}-\vec{e}) - (\sin\alpha)\ \mathrm{I}(\vec{g}-\vec{e}) = \dfrac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2} + \cos\alpha\,\dfrac{\vec{c}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{b}}{2} - \sin\alpha\ \mathrm{I}\dfrac{\vec{d}-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}}{2}$,

c'est-à-dire $(\cos\alpha)\,(\vec{g}-\vec{e}) - (\sin\alpha)\ \mathrm{I}(\vec{g}-\vec{e}) = \vec{h}-\vec{f}$.

Cette relation prouve la propriété demandée, et de plus montre que le vecteur $\overrightarrow{FH}$ s'obtient en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{EG}$ d'un angle de mesure (– α), ce que confirme la figure :



Le traitement de cet exemple, pourtant assez élaboré, est à comparer avec l'emploi des techniques décrites par P. L. Terracher, que nous avons commentées à la fin du A.

223 – Des problèmes où ces techniques atteignent leurs limites

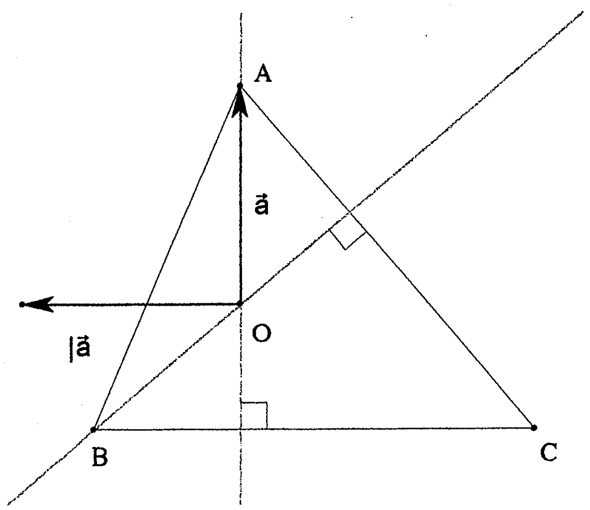
Nous allons maintenant exhiber deux spécimens de types de problèmes où le calcul vectoriel tel que nous l'avons étendu atteint ses limites. Le premier consiste à montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes. Le deuxième est un exercice très connu comme application classique du produit scalaire dans l'étude d'une configuration.

---

[10] Voir l'article « Le caractère expérimental de l'activité mathématique » écrit par Yves Chevallard, dans le numéro 30 de « Petit x », pp. 5 à 15, 1991-1992.

Les hauteurs d'un triangle

Considérons un triangle ainsi que deux de ses hauteurs. Nous allons démontrer que la droite reliant le troisième sommet au point d'intersection de ces deux hauteurs est la troisième hauteur du triangle. Pour cela, nous allons pointer le plan et choisir la base suivante :



Alors on peut modéliser la figure de la manière suivante :

$\vec{b} = \beta\, \vec{a} + \beta'\, |\vec{a}$;

$\vec{c} = \beta\, \vec{a} + \gamma'\, |\vec{a}$;

$|\vec{b}$ est colinéaire à $\vec{c} - \vec{a}$.

Il convient de démontrer que $|\vec{c}$ est colinéaire à $\vec{b} - \vec{a}$.

Or $|\vec{b} = -\beta'\, \vec{a} + \beta\, |\vec{a}$, et $\vec{c} - \vec{a} = (\beta - 1)\, \vec{a} + \gamma'\, |\vec{a}$. La colinéarité de ces deux vecteurs est donc équivalente à :

$$\begin{vmatrix} -\beta' & \beta - 1 \\ \beta & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

D'autre part,

$|\vec{c} = -\gamma'\, \vec{a} + \beta\, |\vec{a}$, et $\vec{b} - \vec{a} = (\beta - 1)\, \vec{a} + \beta'\, |\vec{a}$. Pour démontrer leur colinéarité, il convient de démontrer que le déterminant suivant est nul :

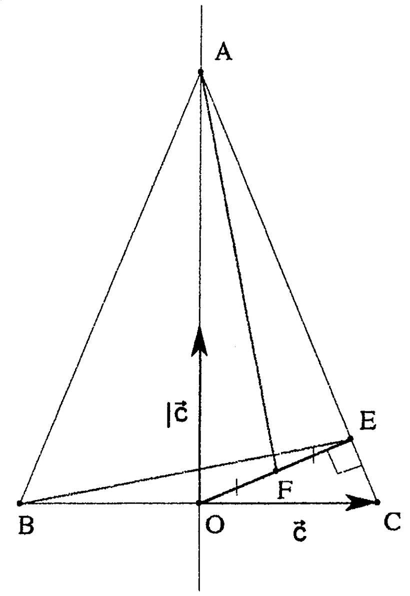
$$\begin{vmatrix} -\gamma' & \beta - 1 \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}.$$

Or il est égal au précédent : il est donc nul.

Cet exemple est assez simple, pourvu que l'on choisisse judicieusement le point en lequel on pointe le plan (le choix de la base devant être tel que les hypothèses se traduisent facilement à l'aide de l'opérateur "|").

L'exemple qui suit montre que de tels choix ne suffisent pas à rendre très simple la modélisation et les calculs.

On considère la figure suivante :



ABC est un triangle isocèle de sommet principal A, E est le projeté orthogonal sur (AC) du milieu O de [BC], F est le milieu de [OE]. Il s'agit de démontrer que les droites (BE) et (AF) sont perpendiculaires.

À l'aide du choix du point « origine » et de la base indiquée sur la figure, on peut la modéliser ainsi :

$\vec{a} = k\ |\vec{c}$

$\vec{b} = -\vec{c}$

E est le point d'intersection de la droite (AC) et de la perpendiculaire à cette droite passant par O, dirigée par $|(\vec{c} - \vec{a})$. On peut écrire une représentation paramétrique vectorielle de chacune de ces droites et déterminer ainsi le vecteur-position de E (type de problèmes T7). En mettant en œuvre cette technique, on obtient :

$$\vec{e} = \frac{k^2}{1+k^2}\vec{c} + \frac{k}{1+k^2}|\vec{c}.$$

On en déduit $\vec{f}$, qui est égal à $\frac{\vec{e}}{2}$.

Le résultat à démontrer se traduit ainsi :

$|(\vec{e} - \vec{b})$ est colinéaire à $\vec{f} - \vec{a}$.

Or $\vec{e} - \vec{b} = \vec{e} + \vec{c} = \dfrac{2k^2+1}{1+k^2}\vec{c} + \dfrac{k}{1+k^2}|\vec{c}$, et

$$\vec{f} - \vec{a} = \frac{k^2}{2(1+k^2)}\vec{c} + \left(\frac{k}{2(1+k^2)} - k\right)|\vec{c}.$$

Donc

$$|(\vec{e} - \vec{b}) = -\frac{k}{1+k^2}\vec{c} + \frac{2k^2+1}{1+k^2}|\vec{c}\text{, et}$$

$$\vec{f} - \vec{a} = \frac{k^2}{2(1+k^2)}\vec{c} + \frac{-k-2k^3}{2(1+k^2)}|\vec{c}.$$

Il apparaît ainsi que $\vec{f} - \vec{a} = -\frac{k}{2}(\vec{e} - \vec{b})$, ce qui permet de conclure, et montre en plus que : $\frac{AF}{BE} = \frac{OA}{2OC} = \frac{OA}{BC}$.

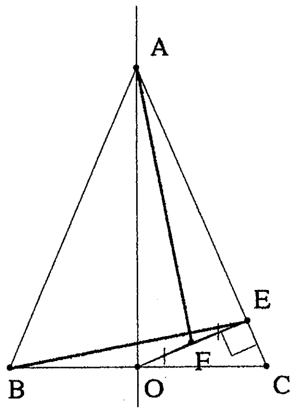
Ainsi, même si les techniques mises en œuvre ne sont pas très compliquées, la présence dans le modèle d'un paramètre littéral conduit à manipuler des fonctions rationnelles de ce paramètre. Un tel exemple montre l'utilité de telles fonctions dans l'étude de situations géométriques assez simples.

Nous allons reprendre l'étude de cette figure dans le paragraphe suivant, en supposant connu le produit scalaire. Nous verrons que l'un des avantages de ces techniques réside dans le fait que de tels paramètres littéraux (numériques) n'y sont plus nécessaires.

23 – Des problèmes où des techniques intégrant le produit scalaire sont plus efficaces

Reprise des deux derniers problèmes

La configuration précédente



Il s'agit de démontrer que $(\vec{e} - \vec{b}) \cdot (\vec{f} - \vec{a}) = 0$, c'est-à-dire, compte-tenu de $\vec{b} = -\vec{c}$ et $\vec{f} = \frac{\vec{e}}{2}$ que $(\vec{e} + \vec{c}).(\vec{e} - 2\vec{a}) = 0$.

Or $(\vec{e} + \vec{c}).(\vec{e} - 2\vec{a}) = \vec{e}.\vec{e} + \vec{c}.\vec{e} - 2\,\vec{e}.\vec{a} - 2\,\vec{c}.\vec{a}$.

Or, on sait que $\vec{a}.\vec{c} = 0$. Donc $(\vec{e} + \vec{c}).(\vec{e} - 2\vec{a}) = \vec{e}.\vec{e} + \vec{c}.\vec{e} - 2\,\vec{e}.\vec{a}$.

E étant le projeté orthogonal de O sur (AC), c'est également le projeté orthogonal de A et de C sur (OE). Donc : $\vec{e}.\vec{c} = \vec{e}.\vec{e}$ et $\vec{e}.\vec{a} = \vec{e}.\vec{e}$. Finalement :

$(\vec{e} + \vec{c}).(\vec{e} - 2\vec{a}) = \vec{e}.\vec{e} + \vec{e}.\vec{e} - 2\vec{e}.\vec{e} = 0$, ce qui permet de conclure.

La concision des calculs, en comparaison avec ceux livrés précédemment, saute aux yeux.

La question des hauteurs d'un triangle

Nous traitons ici cette question très classique pour montrer l'intérêt des vecteurs-positions.

En appelant H le point d'intersection des hauteurs issues de A et de B, on sait que :

$(\vec{h} - \vec{a}).(\vec{c} - \vec{b}) = 0$ (1) et $(\vec{h} - \vec{b}).(\vec{c} - \vec{a}) = 0$ (2).

On veut démontrer :

$(\vec{h} - \vec{c}).(\vec{b} - \vec{a}) = 0$.

Or $(\vec{h} - \vec{c}).(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{h}.\vec{b} - \vec{h}.\vec{a} - \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{a}$ (3).

D'après (1) $\vec{h}.\vec{b} = \vec{h}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{b}$ et d'après (2) $-\vec{h}.\vec{a} = -\vec{h}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}.\vec{a}$, d'où l'on déduit, en reportant dans (3) :

$(\vec{h} - \vec{c}).(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{h}.\vec{c} - \vec{a}.\vec{c} + \vec{a}.\vec{b} - \vec{h}.\vec{c} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{b}.\vec{a} - \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{a} = 0$.

D'où le résultat.

Là encore, on constate le même phénomène.

De ce qui précède, on déduit facilement que, quels que soient les points M, A, B, et C :
$(\vec{m} - \vec{a}).(\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{m} - \vec{b}).(\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{m} - \vec{c}).(\vec{a} - \vec{b}) = 0$, relation attribuée à Euler, qui montre de manière claire que si deux des termes de la somme sont nuls, il en est nécessairement de même du troisième : cette relation est vraie dans l'espace, et son interprétation pour les tétraèdres est classique. On peut l'écrire de manière équivalente sous la forme :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$[10],

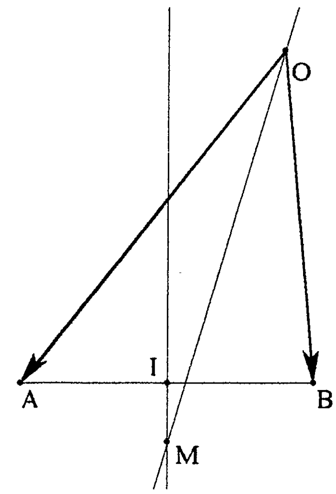
relation dont nous avons vu l'emploi dans certains exercices du manuel « Lebossé-Hémery », dans le cas particulier où les points A, B et C sont alignés.

La question de la localisation du point d'intersection d'une bissectrice d'un angle d'un triangle et de la médiatrice du côté opposé.

On considère un triangle OAB qui n'est pas isocèle en A. On pointe le plan en O et on travaille dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$. On pose a = OA et b = OB.

---

[10]Pour le retenir, on peut remarquer que l'on obtient tous les termes de la somme à partir du premier, en laissant M en première place, et en permutant circulairement les points A, B et C.



Le point M est sur la bissectrice de A : il existe donc un nombre réel t tel que
$\vec{m} = t\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}\right)$ (1).

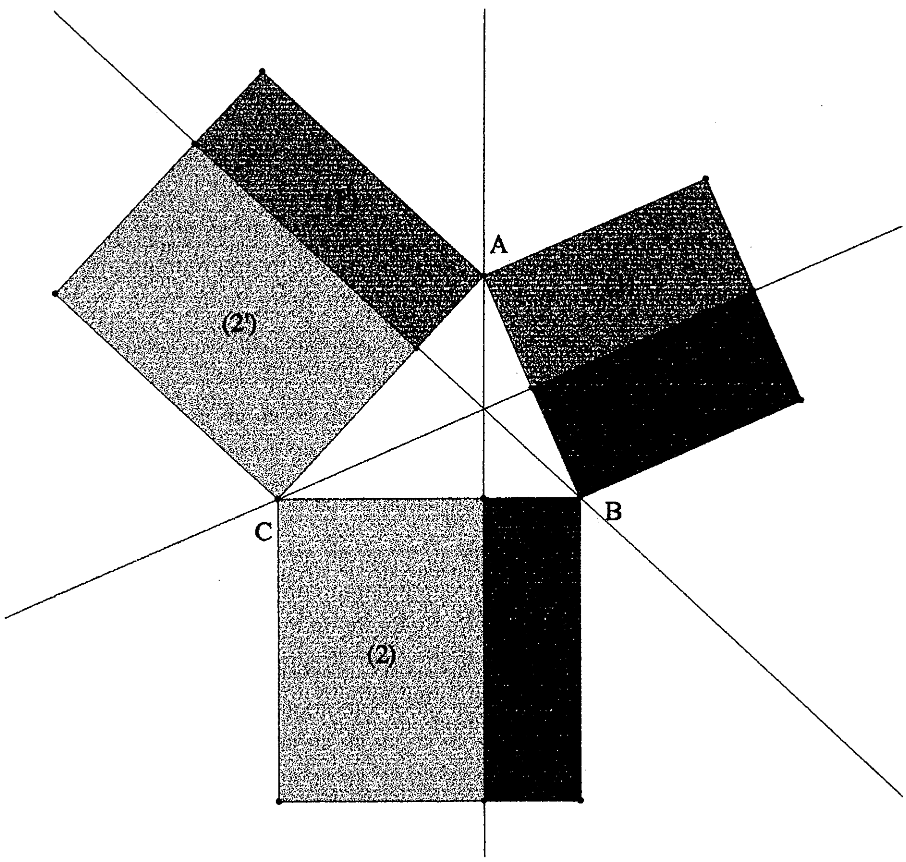
Il appartient à la médiatrice de [AB], ce qui équivaut à $\overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MB}^2$, ou encore à $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB} = 0$, ce qui se traduit, en termes de vecteurs-positions par :
$(\vec{a} - \vec{m} + \vec{b} - \vec{m}).(\vec{b} - \vec{a}) = 0$, égalité qui équivaut à $2\,\vec{m}.(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ (2)
Pour déterminer M, il convient de déterminer t à partir de (1) et (2).
Par substitution, on déduit :
$2t\left(\frac{\vec{a}}{a} + \frac{\vec{b}}{b}\right).(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$, ce qui équivaut à :
$2\,t\left(a - b + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.
Le coefficient de t mérite d'être transformé : il est égal à $\frac{2}{ab}(a^2b - ab^2 + (a - b)\,\vec{a}.\vec{b})$ ou encore $\frac{2}{ab}(a - b)(ab + \vec{a}.\vec{b})$. On en déduit la valeur de t ($ab + \vec{a}.\vec{b} > 0$, car $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires) :
$t = \frac{ab\,(a + b)}{2(\vec{a}.\vec{b} - ab)}$, et donc les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{a}, \vec{b})$:
$x = \frac{t}{a} = \frac{b\,(a + b)}{2(\vec{a}.\vec{b} + ab)}$; $y = \frac{t}{b} = \frac{a\,(a + b)}{2(\vec{a}.\vec{b} + ab)}$.
Pour démontrer que M est dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O, il suffit de démontrer : $x + y > 1$.
Or $x + y = \frac{(a + b)^2}{2(\vec{a}.\vec{b} + ab)}$. Il reste donc à démontrer que :
$(a + b)^2 > 2(\vec{a}.\vec{b} + ab)$ (car $\vec{a}.\vec{b} + ab > 0$), ce qui équivaut à :
$a^2 + b^2 - 2\,\vec{a}.\vec{b} > 0$, ou encore $(\vec{a} - \vec{b})^2 > 0$, ce qui équivaut à $\vec{a} \neq \vec{b}$, relation qui est vraie.

Cet exemple montre que le calcul vectoriel peut être utilisé pour démontrer des propriétés qui jusqu'alors, ne pouvaient qu'être admises, ou lues sur la figure : cet aspect du calcul vectoriel mériterait d'être davantage mis en évidence. On remarquera que l'exemple qui précède conjugue des techniques relatives à la détermination vectorielle d'un point d'intersection de deux droites (actuellement peu enseignées) et des techniques plus classiquement enseignées relatives au produit scalaire.

24 – Retour aux configurations du type « triangles avec carrés à l'extérieur » à l'aide du produit scalaire

Notre souci est ici d'articuler l'étude des configurations, pour laquelle le calcul vectoriel étendu grâce à l'opérateur "I" a montré une certaine efficacité, avec celle du produit scalaire, outil dont l'une des premières applications est une nouvelle démonstration du théorème de Pythagore, théorème dont la configuration « triangle avec des carrés construits à l'extérieur » est l'un des emblèmes graphiques les plus systématiquement rencontrés dans les classes de collège. En outre, il nous servira de transition pour notre prochain thème d'étude : l'interprétation des aires de parallélogrammes (et de triangles) dans le calcul vectoriel étendu à l'aide des deux outils « opérateur I » et « produit scalaire ».

• Considérons la configuration suivante :



dans laquelle ABC est un triangle ayant trois angles aigus. Il s'agit de démontrer, à l'aide de quelques produits scalaires, que les rectangles de même couleur ont la même aire, puis d'examiner ce qui se passe lorsque l'angle A est droit.

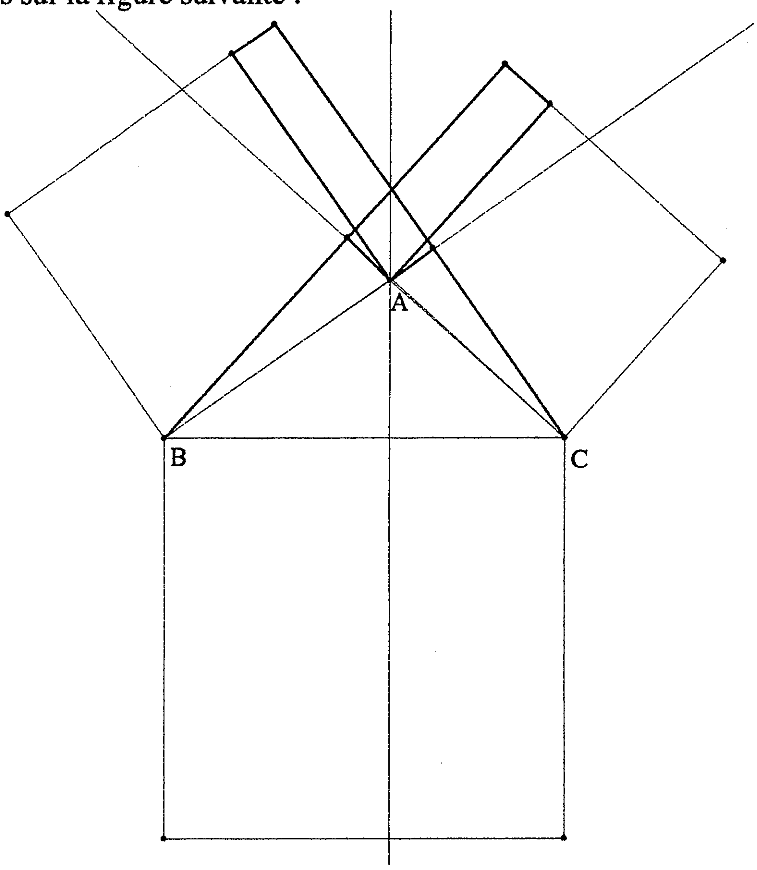
Cette configuration bien connue « montre » que :

$$(2) + (3) = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,(1)$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC},$$

relation que l'on peut écrire sous la forme :

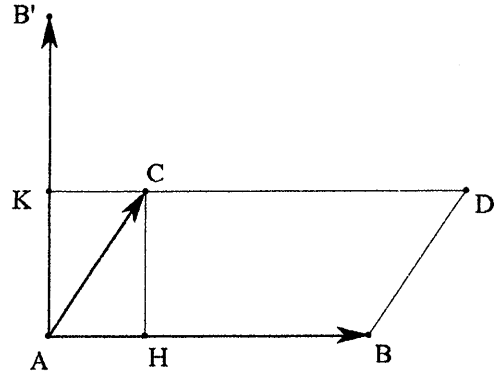
$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\,\vec{u}.\vec{v}$, en pointant le plan en A, et en posant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Mais cette formule est vraie quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Son interprétation en termes d'aires sur la figure suivante :



conduit à l'idée d'algébriser la notion d'aire.

• Dans la première des configurations qui précèdent, on constate que le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC}$ s'interprète en terme d'aire en considérant un rectangle construit sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut adapter cette idée pour interpréter l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme en terme de produit scalaire. En effet :



Aire (ABDC) = AB. CH = AB'. AK = $|\overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AC}$.
Ce dernier produit scalaire peut être négatif : par définition nous appellerons « mesure algébrique de l'aire du parallélogramme ABCD » le produit scalaire $(|\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AC}$.

Ceci permet de réintégrer les questions d'aires dans le modèle de la géométrie plane constitué par le calcul vectoriel étendu par l'opérateur "|" et par le produit scalaire. Nous ne détaillerons pas ici les types de problèmes qui peuvent être étudiés à ce sujet.

Nous signalerons seulement l'interprétation en terme d'aire algébrisée du déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormale que l'on peut en déduire. Plaçons nous dans le plan pointé en O, muni d'une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans cette base. Il est facile de démontrer que le produit scalaire $|\vec{u}.\vec{v}$ n'est autre que le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans cette base.

$$\det_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath})}(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}.\vec{v}$$

Ceci permet une interprétation géométrique très parlante de la colinéarité de deux vecteurs.

A désignant le point de coordonnées $(a, 0)$, B celui de coordonnées $(0, b)$, M le point de coordonnées (x, y), la mesure algébrique de l'aire du triangle MAB, égale à $ab\,(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1)$, donne alors un éclairage en terme d'aire du premier membre de l'équation de la droite (AB) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, rencontrée précédemment :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

25 – Modélisation des transformations dans le calcul vectoriel ainsi étendu

Comme nous l'avons vu dans le 21, l'une des isométries du plan les plus importantes – la symétrie orthogonale – est difficile à définir vectoriellement dans le calcul vectoriel seulement étendu à l'opérateur "|". La situation change complètement avec l'introduction du produit scalaire, qui permet de définir simplement les projections orthogonales en terme de vecteurs.

Les résultats sont classiques. Pourtant, nous avons déjà eu l'occasion de remarquer que leur introduction dans les actuels programmes de Première S a du mal à vivre.

Projection orthogonale sur une droite

Considérons une droite (AB) et un point M du plan. L'utilisation de l'opérateur "|" permet de décomposer, comme on le fait en Physique, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ sous forme d'une somme d'un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, et d'un vecteur colinéaire à $|\overrightarrow{AB}$ (la composante parallèle à (AB) et la composante normale à (AB)).

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\;|\overrightarrow{AB} \quad (1)$$

et le projeté orthogonal M' de M sur (AB) est tel que :

$$\overrightarrow{AM'} = x\,\overrightarrow{AB}.$$

Il convient donc de faire disparaître le terme en $|\overrightarrow{AB}$ dans (1), ce que permet la multiplication scalaire par $\overrightarrow{AB}$. On obtient :

$$\overrightarrow{AM}.\,\overrightarrow{AB} = x\;\overrightarrow{AB}^2\,,$$

d'où l'on déduit x , puis $\overrightarrow{AM'}$:

$$\overrightarrow{AM'} = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}^2}\;\overrightarrow{AB}.$$

On voit l'intérêt de disposer d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ unitaire : si on le désigne par $\vec{u}$, on obtient :

$$\overrightarrow{AM'} = (\overrightarrow{AM}.\vec{u})\;\vec{u}.$$

Remarque : distance d'un point à une droite

Le même procédé permet de déterminer la distance du point M à la droite (AB). Cette fois-ci c'est le projeté M" de M sur la perpendiculaire en A à la droite (AB) ou D(A;$\vec{u}$) qui nous intéresse. De $\overrightarrow{AM''} = (\overrightarrow{AM}.|\vec{u})\;|\vec{u}$, on déduit immédiatement :

$$d(M, D(A;\vec{u})) = |\;\overrightarrow{AM}.(|\vec{u})\;|,$$

formule simple, et facile à retenir.

Projection orthogonale d'un vecteur sur une droite

En particulier, si A est le point « origine », on obtient à partir des résultats qui précèdent les formules suivantes :

$$\vec{m}' = (\vec{m}.\vec{u})\,\vec{u}, \text{ et } \vec{m}'' = (\vec{m}.\mathrm{I}\vec{u})\,\mathrm{I}\vec{u},$$

donnant les composantes « parallèle à $\vec{u}$ et normale à $\vec{u}$ » du vecteur $\vec{m}$, ou en d'autres termes les coordonnées du vecteur $\vec{m}$ dans la base orthonormale directe $(\vec{u}, \mathrm{I}\vec{u})$ qui sont : $\vec{m}.\vec{u}$ et $\vec{m}.(\mathrm{I}\vec{u})$. On retrouve ainsi le résultat bien connu dans le cas où $(\vec{u}, \mathrm{I}\vec{u})$ est la base orthonormale directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas de norme 1, $(\vec{u}, \mathrm{I}\vec{u})$ est encore une base orthogonale : les coordonnés de $\vec{m}$ dans cette base se compliquent un peu :
– celle relative à $\vec{u}$ est un quotient de produits scalaires : $\dfrac{\vec{m}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}$;
– la deuxième s'écrit de la même manière en remplaçant $\vec{u}$ par $\mathrm{I}\vec{u}$.

Symétrie orthogonale par rapport à une droite

Son étude se ramène à la précédente, car si H est le projeté othogonal de M sur (AB) et M' son symétrique par rapport à (AB), on a :

$$\overrightarrow{AM'} + \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AH}.$$

Ainsi : $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}^2}\,\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$, ou encore $\overrightarrow{AM'} = 2(\overrightarrow{AM}.\vec{u})\,\vec{u} - \overrightarrow{AM}$, si $\vec{u}$ est un vecteur directeur unitaire de la droite, formules qui sont difficiles à retenir.
On pourra plus simplement considérer les projetés orthogonaux respectifs H et K de M sur (AB) et sur (AB') : de $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}$ on déduit $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AK}$, et chacun des termes se calcule à l'aide des résultats du paragraphe précédent.

26 – Nouveaux types de problèmes

Nous ne ferons que les évoquer brièvement. Compte tenu des derniers outils évoqués dans les paragraphes 24 et 25, on sait exprimer avec des vecteurs :
– des aires de polygones (en particulier triangles, et quadrilatères),
– des distances de points à une droite (donc des hauteurs de triangles, de trapèzes, des largeurs de bandes, ...),
– des projetés orthogonaux de vecteurs, de points, donc des coordonnées dans des bases ou repères orthogonaux ou orthonormaux,
– des images de points par une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Enfin, on sait traiter toutes les questions qui précèdent en géométrie analytique, le plan étant muni d'un repère orthonormal direct[11].

---

[11] Ce point de vue est adopté pour l'introduction des projections vectorielles orthogonales et symétries vectorielles orthogonales dans l'ouvrage suivant :
BANCHOFF T., WERNER J., 1993, *Linear Algebra Through Geometry*, Second Edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag.

C – Conclusion de la quatrième partie

Nous allons présenter ici sous forme synthétique les organisations mathématiques qui ont été sollicitées dans les parties A et B précédentes. Commençons par celles qui apparaissent dans des ouvrages de provenances diverses.

Types de problèmes	Ouvrages où ils sont pris en compte	Environnement et techniques de résolution	Technologie correspondante Ouvrages où elle est présente
$\mathcal{T}_1$ Modélisation vectorielle de figures de la géométrie affine.	Coffin, Fletcher, Pedoe, Larson, Lambacher et Schweizer	Plan pointé en un point quelconque, ou en un point de la figure, et vecteurs-positions.	Bijection entre l'ensemble des vecteurs et le plan pointé. Tous les ouvrages l'évoquent.
$\mathcal{T}_2$ Localisation du point d'intersection de deux droites (ou segments)	• Coffin • Brochure de l'IREM de Marseille • Lambacher et Schweizer	• Plan pointé et vecteurs-positions ; système de deux représentations paramétriques vectorielles, les vecteurs étant décomposés dans une base. • Notation $\overrightarrow{AB}$; méthode du double alignement (en utilisant une base adaptée à la figure). • Technique des circuits fermés de vecteurs.	• Représentations paramétriques vectorielles ; unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base du plan ou de l'espace. • Unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base du plan. • Indépendance linéaire dans le plan ou dans l'espace.
$\mathcal{T}_3$ Alignement de trois points	• Coffin, Chatellun, Pedoe • Lambacher et Schweizer • Brochures IREM actuelles	• Plan pointé et vecteurs-positions ; recherche d'une combinaison linéaire des trois vecteurs-positions, qui vérifie les deux conditions : – être nulle ; – la somme des coefficients est nulle. • Plan ou espace muni d'un repère ; emploi de la représentation paramétrique cartésienne de la droite passant par deux d'entre eux. • Notation $\overrightarrow{AB}$; décompositions de vecteurs à l'aide de vecteurs colorés ou de vecteurs déterminés à l'aide du niveau des points utilisés. Puis réécriture des décompositions dans une même base (le mot “base” n'est pas utilisé, car il n'est pas disponible) et utilisation du lien entre colinéarité de vecteurs et alignement de points.	CNS d'alignement ci-contre, généralisée en dimension *n*. (Fresnel) CNS d'alignement ci-contre (en exercice dans le Lelong-Ferrand).

Dans le tableau suivant, nous faisons le même travail en ce qui concerne les organisations relatives à la géométrie euclidienne plane. Pour des raisons de commodité nous désignerons par CVPB le calcul vectoriel portant sur les vecteurs-positions dans un plan pointé (ce calcul met en relation les vecteurs-positions et les vecteurs désignés à l'aide d'un bipoint, d'où l'utilisation de la lettre P, comme « position », et de la lettre B comme « bipoint », et CVB (B comme « bipoint ») le calcul vectoriel utilisant la notation $\overrightarrow{AB}$, sans faire intervenir les vecteurs-positions.

Types de problèmes	**Ouvrages où ils sont pris en compte**	**Dispositif et techniques de résolution**	**Technologie correspondante Ouvrages où elle est présente**
$\mathcal{T}_4$ Modélisation vectorielle de figures de la géométrie euclidienne.	Pedoe, Larson. Pedoe Larson	CVPB auquel on adjoint l'opérateur “|”. CVPB et produit scalaire CVB et produit scalaire	Opérateur “|”. (Pedoe – à la suite de Grassmann –, Larson) Produit scalaire
$\mathcal{T}_5$ Démontrer que deux segments sont perpendiculaires et ont même longueur	• Pedoe, Larson. • Ouvrages du secondaire, en France	• CVPB auquel on adjoint l'opérateur “|”. On montre que : $\mathrm{I}(\vec{b}-\vec{a}) = \pm(\vec{d}-\vec{c})$. • CVB et emploi d'un quart de tour vectoriel , les décompositions des vecteurs étant presque toujours fournies par l'énoncé.	• Linéarité de “|” • Linéarité d'un tel quart de tour vectoriel.
$\mathcal{T}_6$ Exprimer, à l'aide de vecteurs, des aires de polygones	• Marcolongo et Burali-Forti • Pedoe	• Calcul vectoriel dans l'espace, et opérateur *i*. • CVPB (ou CVB) auquel on adjoint l'opérateur “|” et le produit scalaire.	

Ensuite, nous avons fait des choix en ce qui concerne le dispositif de travail concernant les vecteurs, et en particulier pour les ostensifs qui leurs sont associés :

– deux ostensifs sont employés : la notation $\overrightarrow{AB}$ et la notation $\vec{m}$, désignant le vecteur-position du point M, dans le plan pointé en un point « origine » O.

– ces deux ostensifs sont mis en relation à l'aide de l'égalité fondamentale :

$$\overrightarrow{XY} = \vec{y} - \vec{x},$$

relation indépendante du point O choisi.

Sans ces ostensifs, certaines techniques de résolution de problèmes (appartenant aussi bien au domaine de la géométrie affine qu'à celui de la géométrie euclidienne) ne pourraient pas exister : ces techniques en sont indissociables.

Dans la partie B relative aux propositions d'organisations mathématiques pour l'enseignement au lycée, nous avons proposé une organisation mathématique plus fine que celles évoquées précédemment, dans la perspective d'un enseignement au niveau des actuelles classes de Seconde et Première en France, visant en particulier les deux types de problèmes qui nous servent de fil directeur tout au long de notre travail : les problèmes d'alignement et de concours d'une part, l'étude des configurations d'autre part. Apparaissent alors de nouveaux types de problèmes, dont la présence est indissociable de l'organisation didactique, en particulier pour les raisons suivantes déjà évoquées dans notre première partie :

– une technique engendre de nouveaux types de problèmes ;
– le processus d'étude engendre des besoins technologico-théoriques ;
– ces derniers conduisent à l'émergence de nouvelles techniques, et d'élargissements du champ de problèmes initial ...

Concernant l'organisation didactique, nous n'en abordons que quelques éléments, sans la prendre en charge de manière complète : nous signalons seulement certains moments de l'étude, pour en souligner l'importance dans le processus d'étude.

Pour mettre en évidence les relations entre les organisations mathématiques déjà existantes et celle que nous proposons, nous allons utiliser une présentation graphique. Nous commençons par la partie relative à la géométrie affine, et aux problèmes d'alignement et de concours.

$\mathcal{T}_1$

Modélisation vectorielle de figures de la géométrie affine.

T_1
Traduire vectoriellement l'appartenance d'un point M à une droite déterminée par deux points A et B, ou à la demi-droite d'origine A passant par B, ou au segment [AB].

T_2
Traduire vectoriellement le fait qu'un point M se trouve sur le segment [AB], à une fraction *p*/*q* de la distance AB à partir de A (ou de B).

T_3
Traduire en terme de position du point M sur le segment [AB] une relation vectorielle du type :

$\vec{AM} = \frac{p}{q}\vec{AB}$ ou du type :

$\vec{m} = (1 - \frac{p}{q})\vec{a} + \frac{p}{q}\vec{b}$.

T_3 bis
Traduire en terme de position du point M sur la droite (AB) ou demi-droite [AB) une relation vectorielle du type :

$\vec{AM} = k\,\vec{AB}$ ou du type :

$\vec{m} = (1 - k)\vec{a} + k\,\vec{b}$.

T_4
Traduire vectoriellement qu'un quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Ce premier groupe de types de problèmes permet d'identifier un premier type de question, la modélisation vectorielle de figures de la géométrie affine : droites, demi-droites, segments, parallélogramme. Il permet une première rencontre avec la technique d'emploi des vecteurs-positions, qui est utilisable dans chacun d'eux (voir les techniques τ_{i2}, relative à chacun des T_i).

Si nous désignons par τ la technique consistant à utiliser des vecteurs-positions, vient ensuite un moment de travail de cette technique.

Travail de la technique τ, préparant un premier moment technologique

T_5

Dans le plan pointé, – le point « origine » est précisé – exprimer tous les vecteurs-positions des points d'une figure en fonction de certains d'entre eux, qui sont précisés.

La figure est du type : polygone avec points localisés sur certains « côtés » par rapport aux extrémités de ces côtés.

T_5 bis

Effet du changement de point « origine » dans des problèmes du type précédent : on prend comme point « origine » l'un des points de la figure.

T_6

Pointer le plan, et choisir deux vecteurs non colinéaires de manière à pouvoir exprimer tous les vecteurs-positions des points de la figure en fonction de ces deux vecteurs.

θ_1

Premier moment technologique, facilité par une situation de reprise : bases, repères.

$\mathcal{T}_2$

Localisation du point d'intersection de deux droites (ou segments)

T_7

Déterminer vectoriellement le point d'intersection de deux droites (ou de deux segments), ces droites (ou segments) étant déterminés par deux points, que l'on sait repérer par leurs vecteurs-positions.

$\mathcal{T}_3$

Alignement de trois points

T_8

Démontrer vectoriellement l'alignement de trois points A, B et C.

T_9
Démontrer vectoriellement le parallélisme de deux droites (AB) et (CD).

La mise en place progressive des techniques τ_{821}, τ_{822}, τ_{823} et τ_{92} est à l'origine du deuxième moment technologique.

θ_2
Un deuxième moment technologique : relations vectorielles indépendantes du point « origine ».
Vers une autonomisation du modèle : les combinaisons linéaires de deux vecteurs-positions conduisent à en introduire un troisième, indépendant du choix du point « origine » : le barycentre.

Reprise de T_8
avec la technologie θ_2, qui génère de nouvelles techniques, rendant inutile le choix d'une base du plan, mais reposant encore sur le calcul vectoriel CVPB.

Retour à la géométrie analytique
Équation d'une droite coupant les deux axes du repère.

$\mathcal{T}_1$
Modélisation vectorielle de figures de la géométrie affine.

→

T_{10}
Traduire vectoriellement l'appartenance d'un point M au demi-plan de frontière (AB) auquel appartient le point C : relation du type $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{AC}$; ou encore, en pointant le plan en A, relation de la forme $\vec{m} = k\,\vec{b} + m\,\vec{c}$, $k \in \mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{R}^{*+}$.

Passons maintenant à l'organisation mathématique relative à la géométrie euclidienne plane. Le dispositif de travail mis en place est le calcul vectoriel CVPB utilisé précédemment, auquel on ajoute l'opérateur linéaire "|" qui fait subir à un vecteur un quart de tour direct. Il convient sans doute de rappeler que l'organisation didactique correspondante n'est que très partiellement ébauchée.

$\mathcal{T}_4$

Modélisation vectorielle de figures de la géométrie euclidienne.

T_{11}

Engendrer des configurations usuelles de la géométrie euclidienne plane à partir de certains de leurs éléments :

– Localisation du sommet principal C d'un **triangle rectangle isocèle** par rapport à la base principale [AB] ;
– Localisation du centre d'un **carré** par rapport à un de ses côtés [AB] ;
– Localisation du sommet principal C d'un **triangle isocèle** par rapport à sa base principale [AB] ;
– Localisation du sommet C d'un **triangle équilatéral** par rapport à la base [AB] ;
– Localisation du sommet de l'angle droit d'un **triangle rectangle** par rapport à son hypoténuse [AB] (ou localisation d'un point M d'un **demi-cercle** de diamètre [AB]) ;
– Localisation du pied H de la hauteur, et du sommet C sur cette hauteur, par rapport à la base [AB] d'un **triangle quelconque**.

T_{12}

Déterminer une représentation paramétrique vectorielle des droites remarquables d'un triangle, à partir de l'élément du triangle auquel elles sont attachées.

T_{13}

Déterminer vectoriellement une transformation ponctuelle, en donnant le vecteur-position de l'image d'un point en fonction du vecteur-image de ce point :

– translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
– homothétie de centre P et de rapport k. ;
– symétrie centrale de centre P ;
– quart de tour direct de centre P ;
– rotation de centre P d'angle de mesure α ;
– similitude directe de centre P, d'angle de mesure α, et de rapport k.

$\mathcal{T}_5$

Démontrer que deux segments sont perpendiculaires et ont même longueur.

T$_{14}$

Étude de configurations du type “Van Aubel”, où des figures semblables sont construites sur les côtés d'un polygone.

T$_{15}$

Problèmes du type **T**$_7$ relatifs à des droites mettant en jeu la géométrie euclidienne : médiatrices, bissectrices, ...

T$_{16}$

Étude de généralisations des configurations du type “Van Aubel”.

T$_{17}$

Démonstration vectorielle du concours des hauteurs d'un triangle.

En considérant des problèmes pour lesquelles la traduction de l'orthogonalité de deux droites (AB) et (CD) à l'aide d'une relation de la forme $\mathrm{I}(\vec{b} - \vec{a}) = k\ (\vec{c} - \vec{d})$ conduit à des calculs assez lourds, l'introduction du produit scalaire permet de disposer d'une nouvelle technique, dans laquelle aucun paramètre tel que k n'est utile.

θ_3

Un troisième moment technologique : introduction du produit scalaire.

La puissance de ce nouvel outil est mise en évidence à l'aide des problèmes précédents, dans le traitement desquels les techniques appartenant au calcul vectoriel CVPB étendu avec l'opérateur “I” atteignait leurs limites.

Le calcul vectoriel CVPB étendu avec l'opérateur “I” et avec le produit scalaire, que nous noterons (CVPB, I, p. s.), permet alors de traiter des problèmes relatifs à la séparation du plan en demi-plans, ce qui était jusqu'alors impossible.

Ensuite, le retour aux configurations du type « triangles avec des carrés à l'extérieur » permet de modéliser à l'aide du calcul vectoriel ainsi étendu les notions d'aires de polygone, et en particulier d'aire d'un parallélogramme et d'un triangle.

θ_4
Un quatrième moment technologique : la définition de la mesure algébrique de l'aire du parallélogramme ABCD comme étant le produit scalaire $(\vert\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AC}$.

Enfin, le produit scalaire permet de traiter vectoriellement les questions relatives aux projections et aux symétries orthogonales, ce qui permet de compléter l'étude de $\mathbf{T_{13}}$.

T_{13} **bis**
Déterminer vectoriellement : – une projection orthogonale sur une droite ; – une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Ce traitement des projections orthogonales permet alors d'aborder de nouveaux types de problèmes, tels que les calculs de distances d'un point à une droite, de calculs de hauteurs, en restant dans le dispositif de travail (CVPB, |, p. s.), ou en traduisant ces résultats en géométrie analytique.

Nous terminerons cette conclusion par quelques remarques relatives à l'organisation didactique.

Sur les énoncés des types de problèmes à mettre à l'étude

Si le professeur veut améliorer la visibilité pour l'élève du moment de modélisation vectorielle d'une figure, il est indispensable qu'il lui propose, au moins au début de l'étude, des figures non codées, sans la nomenclature usuelle concernant les points, droites, et segments qui la constituent. La nomenclature des figures usuellement utilisée au collège favorise son intégration dans le dispositif de travail CVB, mais peut constituer une gêne dans la perspective d'un travail avec CVPB. En effet, il est difficile dans les premiers temps de pointer le plan en un point auquel un nom tel que A, B, ... a déjà été donné (pour des raisons souvent arbitraires) ; il est préférable de pouvoir nommer ce point de façon à mettre clairement en évidence son statut de point « origine » : la lettre O est alors toute indiquée. Plus tard, on pourra s'affranchir de cette contrainte, et choisir comme point « origine » le point A, ce qui se traduira par la nullité du vecteur-position $\vec{a}$ du point A.

En d'autres termes, la manière de rédiger les énoncés de problèmes mis à l'étude est une question importante du point de vue de la modélisation, car cette rédaction contient souvent, de manière implicite, une première modélisation. Pour la question qui nous occupe, cette modélisation en terme de nom de points – dans l'ordre alphabétique – joue le rôle d'une modélisation pré-algébrique, qui devra souvent être mise de côté pour disposer d'une modélisation algébrique efficace : le meilleur moyen de faciliter le travail semble alors de ne pas introduire ce niveau pré-algébrique de modélisation, et de mettre les élèves directement en présence d'une figure non renseignée en termes de noms de points.

Les moments de travail de la technique

Même lorsque la technique en question est « classique et bien délimitée », comme celle permettant le passage de « $\overrightarrow{AM} = k\ \overrightarrow{AB}$ » à « $\vec{m} = (1-k)\vec{a} + k\ \vec{b}$ », il est inutile, voire nuisible, de vouloir l'algorithmiser précocement, à l'aide de recettes du type « si les vecteurs ont la même origine A, alors le coefficient k se retrouve devant le vecteur-position $\vec{b}$ de B, le coefficient de $\vec{a}$ étant alors le complément à 1. ». En effet, le passage par une étape intermédiaire telle que « $\vec{m} - \vec{a} = k\ (\vec{b} - \vec{a})$ » est indispensable à certains élèves, qui l'utilisent à des fins de contrôle pendant une durée qui peut être assez longue, avant d'accéder à l'algorithme décrit précédemment.

Corpus de problèmes et portée des techniques

Pour des techniques relatives à un même type de problèmes, telles que les techniques τ_{821}, τ_{822}, et τ_{823} relatives aux problèmes d'alignement, seul un travail fondé sur un corpus de problèmes assez vaste permet d'apprécier la portée relative de chacune d'elles : ainsi, τ_{821} est efficace quand on peut pointer le plan en l'un des points dont on veut montrer l'alignement ; il convient donc d'aménager des rencontres avec des énoncés dans lesquels cette condition n'est pas facile à remplir pour introduire τ_{822}, qui permet de s'affranchir de cette contrainte ; mais, en pratique, τ_{822} n'est réellement efficace que pour montrer l'appartenance d'un point à un segment qu'il divise dans un rapport « simple » ; en confrontant l'emploi de τ_{822} à des problèmes dans lequel le rapport en question n'est pas « simple », on fait la place pour la technique la plus élaborée, τ_{823}, qui s'avère être celle ayant la portée la plus grande, sans être très difficile à justifier.

Ainsi, la portée des techniques constituent une variable didactique importante, sur laquelle le professeur ne peut jouer que s'il a conçu (ou trouvé tout fait) un corpus de problèmes suffisamment vaste pour mettre en évidence la hiérarchisation des techniques selon leur portée.

Évaluation des techniques

Elle doit porter sur toutes les techniques qui ont été travaillées, et pas seulement sur certaines d'entre elles.

La tentation peut être en effet assez grande de n'évaluer que les techniques de plus haut niveau dans la hiérarchie relative à leur portée ; les inconvénients de ce mode d'évaluation, qui a été et est encore utilisé, sont bien connus :
– il pénalise les élèves qui sont autonomes dans l'emploi des techniques placées plus bas dans cette hiérarchie, sans maîtriser au moment de l'évaluation celles de plus haut niveau (ces dernières intégrant souvent une algébrisation plus poussée) ;
– il favorise les élèves qui, bons lecteurs de contrat didactique, font porter leur attention sur les dernières techniques étudiées, au détriment du processus d'étude qui a permis leur émergence, sans avoir nécessairement construit un rapport personnel très solide avec ces techniques, et les types de problèmes qui sont dans leur portée.

Une autre tentation, inverse de la précédente, peut consister à n'évaluer que les techniques les plus rudimentaires, l'emploi de techniques plus élaborées étant pris en charge par l'énoncé de la question, qui dicte à l'élève ce qu'il doit faire, ainsi que l'ordre dans lequel il doit le faire. Les inconvénients de cette façon d'évaluer sont également de mieux en mieux connus, compte tenu de la place qu'elle occupe dans l'enseignement tel qu'il est actuellement organisé :
– l'accent est mis sur les techniques rudimentaires, qui se voient dotées du statut de compétences minimales, donc exigibles, au détriment du processus d'étude des types de problèmes : ces techniques s'autonomisent par rapport à lui, les privant parfois de leur véritable raison d'être ;
– l'élève ayant fait l'effort de s'approprier les techniques les plus élaborées se voit privé par l'énoncé d'une occasion de montrer ses compétences, notamment en matière d'autonomie relative à la mise en œuvre d'une technique élaborée. L'année suivante, on ne manquera sans doute pas de lui reprocher de manquer de cette autonomie qu'il aurait aimé pouvoir manifester l'année précédente ...

Une meilleure solution consiste à proposer des sujets dans lesquels toutes les techniques travaillées sont sollicitées : les plus rudimentaires, mais également les plus élaborées, et pour ces dernières, sans guidage effectué par l'intermédiaire de l'énoncé. Pour les exercices nécessitant l'emploi de la technique la plus élaborée, les élèves n'en disposant pas mettront en œuvre des techniques plus difficiles à manier : pénalisés une première fois par un tel choix, il conviendra de ne pas les pénaliser une deuxième fois en considérant que leur production a une valeur nulle au cas où elles n'aboutiraient pas.

CONCLUSION

A – Un bilan avant de conclure

Le point de départ de ce travail se trouve dans l'évolution récente des programmes du Collège et du Lycée en France concernant la géométrie, et plus particulièrement la liaison « points-vecteurs ». Durant la période dite « des mathématiques modernes », l'accent est mis sur la construction d'un modèle mathématique de la droite et du plan dès la classe de Quatrième, débouchant sur la mise en évidence de l'ensemble des vecteurs du plan, muni de ses deux opérations : addition et multiplication externe à opérateurs dans **R** ; dès la classe de Seconde, un renversement se produit : on s'appuie sur la notion d'espace vectoriel sur **R** – dont l'ensemble des vecteurs du plan vu antérieurement n'est qu'un exemple parmi d'autres – pour modéliser le plan et l'espace ponctuels, en tant qu'espace affine attaché à un tel espace vectoriel. La puissance de cette construction axiomatique de la géométrie élémentaire est telle qu'elle a parfois été dénommée « la voie royale » de la géométrie ; elle installe un clivage entre les propriétés affines et les propriétés métriques. La « contre réforme » va faire disparaître cette construction axiomatique, et en particulier ce renversement de position « points-vecteurs », ainsi que le clivage « affine/métrique » ; le plan et l'espace ne sont pas définis de manière précise : seules certaines propriétés des points, des droites, et de leurs principales relations (distances, parallélisme, orthogonalité), ainsi que celles de quelques transformations géométriques sont explicitées, mais sans viser pour autant une axiomatique (on sait qu'une telle entreprise est délicate) ; les vecteurs sont définis à l'aide des objets de la géométrie plane ou de l'espace, y compris les distances, et ils sont présentés comme de nouveaux outils disponibles pour résoudre des problèmes. Parfois les programmes imposent eux-mêmes de telles applications : c'est le cas de l'utilisation des transformations vectorielles pour l'étude de configurations, thème qui va faire une courte apparition dans les programmes (rentrée 1989) avant de disparaître (à la rentrée 94)[1]. Parfois, l'initiative vient des auteurs de manuels : c'est le cas pour les problèmes d'alignement, au début du calcul vectoriel en classe de Seconde ; ces problèmes sont présentés comme des applications directes des propriétés de la multiplication externe, et de la colinéarité de deux vecteurs. L'enseignement et l'apprentissage des techniques de résolution de ce type de problèmes donnent lieu à de nombreuses difficultés[2], et font l'objet d'articles dans des revues professionnelles, dans lesquels les auteurs proposent les solutions qu'ils ont expérimentées[3].

---

[1] Voir page 292 et suivantes.
[2] Elles sont évoquées en page 10.
[3] Voir les pages 287 à 290.

1 – Rapport entre théorie et pratique dans l'étude du calcul vectoriel

Le passage de l'époque « des mathématiques modernes » à celle de la « contre-réforme » semble reposer sur un principe implicite, que l'on pourrait formuler ainsi :
si un environnement technicologico-théorique est suffisamment puissant pour permettre la construction de la géométrie élémentaire, alors il est naturellement générateur de techniques puissantes pour résoudre les problèmes classiques relevant de ce domaine.

Les techniques en question sont supposées exister potentiellement, leur mise en œuvre et les éventuelles mises au point auxquelles elles pourraient donner lieu (au niveau ($\mathscr{T}$, τ) de l'organisation mathématique) sont supposées à la portée de tout auteur de manuel et de tout professeur maîtrisant convenablement les niveaux (θ, Θ).

L'un des objets de cette thèse est de prouver le manque de pertinence de ce principe dans le cas particulier des débuts de l'enseignement du calcul vectoriel au lycée. Dans ce but, j'ai cherché à mettre en évidence, du point de vue historique et épistémologique, un déséquilibre entre :
– d'une part, l'important travail de constructions théoriques de la géométrie en liaison avec le calcul vectoriel (et son impact sur l'évolution des programmes d'enseignement) ;
– d'autre part, un travail beaucoup plus réduit concernant les aspects pratiques et techniques de l'emploi du calcul vectoriello-ponctuel dans les questions relevant de la géométrie élémentaire.

11– Point de vue théorique

De ce point de vue, et en particulier du point de vue des fondements de la géométrie, j'ai été amené à enquêter sur les motivations des inventeurs du calcul vectoriel (Leibniz, Grassmann, Gibbs, Peano, Weyl, ...) mais également sur quelques voies concurrentes (synthétiques et analytiques) de construction de la géométrie (Hilbert, Birkhoff, Artin, Blumenthal), ainsi que sur quelques tentatives pour articuler la voie vectorielle aux anciennes (Choquet, Miron – Branzei) destinées particulièrement à l'enseignement.

• *La critique du choix des axiomes fait par Euclide*
Cette critique est présente chez Leibniz[4], et chez Grassmann[5]. Ce dernier, qui réalise le programme que Leibniz s'était fixé sans pouvoir l'atteindre, ne développe cependant pas une axiomatique au sens de Hilbert ; sa construction, qui s'appuie sur la dialectique du formel et du réel, est plus proche de ce que Dieudonné appellera une « physique de

[4]Leibniz cite par exemple le rôle que la figure joue dans la démonstration de la proposition I des Éléments d'Euclide, relative à la constructibilité d'un triangle équilatéral à l'aide du compas : le fait que les deux cercles se coupent est lu sur le dessin, sans être démontré.
[5]Voir page 60.

l'espace » : ainsi, la notion de « segments parallèles et de même sens » (constructions égales et synchrones) est considérée comme définie et le seul « axiome » la concernant n'est autre que sa transitivité.

• *La critique de la géométrie analytique*
Elle est présente chez Leibniz[6], mais surtout chez les physiciens (Marcolongo, Coffin, Véronnet) qui veulent privilégier les grandeurs vectorielles plutôt que leurs composantes dans un repère n'ayant rien à voir avec les questions étudiées. Certains d'entre eux (Véronnet, 1933) intègrent les unités dans le calcul vectoriel qui porte sur les grandeurs elles-mêmes. Cette critique de la voie analytique est très présente dans les premiers ouvrages de calcul vectoriel du début du siècle ; ensuite, le calcul vectoriel n'est plus opposé à la géométrie analytique : il est au contraire vu comme un moyen de mieux enseigner la géométrie analytique, et de mieux l'apprendre.
En revanche, la nécessité du calcul vectoriel par rapport aux méthodes analytiques ne s'impose pas auprès des mathématiciens (Cayley), et devra attendre les années 1930 avant de devenir légitime.

• *La définition des espaces affines* par Hermann Weyl n'a pas été élaborée pour refonder la géométrie, mais pour unifier les théories mathématiques rendant compte des développements de la Physique, jusqu'à la théorie de la relativité générale d'Einstein. Néanmoins, le travail de Weyl ouvre la voie à une nouvelle construction de la géométrie élémentaire qui, par son caractère très algébrique, tranche par rapport aux présentations synthétiques, ne se réduit pas à la géométrie analytique, sans pour autant l'exclure. La notion d'espace vectoriel sur un corps est fondamentale dans cette construction. C'est cette construction que Dieudonné aménage dans son « Algèbre linéaire et géométrie élémentaire », ouvrage qui influencera les programmes de lycée et de classes préparatoires de l'époque des mathématiques modernes : il profite du fait q'un espace vectoriel est canoniquement muni d'une structure d'espace affine pour se limiter à la considération d'espaces vectoriels.
Cette construction nécessite un matériel de base très élaboré : un corps commutatif (**R** en général[7]), un espace vectoriel sur ce corps de dimension 2 ou 3, matériel en tous cas bien différent d'un ensemble de points et d'un ensemble de droites vérifiant certaines propriétés.

---

[6]Voir pages 40 - 41.
[7]Dieudonné choisit sur ce point des axiomes inspirés de ceux d'un corps réel clos, pour bien montrer que **R** n'est pas indispensable : le seul moment où **R** est incontournable est la question de la mesure des angles, question que Dieudonné traite en annexe, préférant dans le corps de l'ouvrage s'intéresser au fait que le groupe des angles a des sous-groupes finis de n'importe quel ordre.

• *La voie algébrique*

Conduite par Artin et également par Blumenthal, elle étudie les axiomes relatifs aux droites (parallélisme et incidence) qui sont nécessaires et suffisants pour obtenir un plan affine, ou pour trouver un corps k tel que les points du plan puissent être représentés par des coordonnées dans k et les droites par des équations du premier degré.

Pour les deux problèmes la réponse est la même, et souligne le rôle des axiomes de Desargues pour l'existence du corps de nombres, ainsi que le rôle de l'axiome de Pappus pour sa commutativité.

Artin emploie peu les vecteurs, préférant employer les translations, alors que Blumenthal introduit les vecteurs, pour simplifier son exposé.

• *Les voies concurrentes*

– Hilbert, comme Euclide, ne suppose connue aucune notion de nombre au début de sa construction : il élabore à cet effet un calcul segmentaire. Les raisonnements mettant en œuvre les axiomes d'ordre (relation « être entre », axiome de Pasch) sont difficiles, et difficilement transposables en vue d'un enseignement élémentaire.

– Birkhoff[8] admet l'existence de **R** dès le départ, ainsi qu'une notion affaiblie de distance. Soucieux de pouvoir construire à la fois la géométrie euclidienne et la géométrie hyperbolique, il introduit le plus tard possible l'axiome d'Euclide, de manière à développer au maximum la géométrie absolue.

– Brisac[9] réussit à fonder rigoureusement la géométrie de la classe de Terminale à l'aide d'axiomes relatifs aux déplacements de l'espace. Mais l'exposé est parfois délicat, notamment pour ce qui concerne les translations.

– Blumenthal[10] caractérise le plan affine euclidien en tant qu'espace métrique à l'aide d'un système d'axiomes.

• *Articulations entre les voies anciennes et la voie vectorielle*

– La première se trouve dans les travaux de Fréchet : dans « Les Espaces abstraits », il donne une définition géométrique des « champs de vecteurs abstraits »[11], qui correspondent à peu de choses près aux espaces affines. Il rencontre alors des questions au travers desquelles on reconnaît, à travers un vocabulaire parfois très proche, la notion d'équipollence, la définition de l'addition des vecteurs (et l'indépendance par rapport aux représentants choisis), la définition de la multiplication d'un vecteur par un nombre. Pour la transitivité de la relation d'équipollence, il renvoie le lecteur à une de ses publications dans les annales de la société mathématique polonaise.

---

[8]Voir pages 147 - 150.
[9]Voir pages 158 - 159.
[10]Voir page 144 -145.
[11]Voir page 140 - 141.

– Le travail le plus précis sur ce sujet est celui de Choquet[12], et c'est également celui dont l'influence sur les programmes d'enseignement a été la plus grande. Choquet propose en effet deux axiomatiques permettant de dégager la structure vectorielle du plan. La première s'inspire de la démarche de Birkhoff, mais la simplifie : d'une part, en remplaçant l'introduction de la relation « être entre » par celle d'une relation d'ordre total sur chacune des droites ; d'autre part, en introduisant très tôt l'axiome des parallèles, ce qui lui permet d'introduire en tant qu'axiome la conservation du milieu par une projection parallèlement à une droite (et d'obtenir ainsi un « plan de translation »). La deuxième fait jouer un rôle plus important à la notion de distance. La première de ces axiomatiques inspirera les programmes de collège de la période des mathématiques modernes, la seconde les programmes qui leur succéderont.
– Enfin, l'ouvrage récent de Miron et Brânzei[13], fait le point sur les grandes présentations axiomatiques modernes de la géométrie élémentaire. On y retrouve les auteurs précédemment évoqués, dont les travaux sont repris avec un point de vue de logicien (axiomatique minimale, catégoricité), sans perdre de vue les questions d'enseignement. L'introduction d'espaces « presque vectoriels » permet de mettre à jour le caractère non minimal du système d'axiomes usuel pour les espaces vectoriels, et d'expliquer le caractère un peu surprenant de l'axiome « Pour tout x, $1*x = x$ ».

L'étude qui précède montre l'abondance des travaux portant sur les articulations entre les fondements de la géométrie d'une part, et l'élaboration d'un calcul vectoriel d'autre part. On retrouve l'influence de ces travaux dans l'enseignement, notamment en ce qui concerne l'introduction des vecteurs (segments orientés, vecteurs liés et vecteurs libres ; vecteurs comme classes d'équipollence de bipoints ; vecteurs définis à partir des translations ...), question ayant déjà fait l'objet de plusieurs thèses, que je n'aborde pas. Je m'intéresse à la poursuite de l'étude du calcul vectoriel, au début du lycée : en supposant que les vecteurs ont été introduits comme le proposent les programmes actuels, ainsi que leur addition, leur soustraction, et la multiplication externe, mon étude se concentre sur les interventions du calcul vectoriel dans le domaine de la géométrie élémentaire.

12 – Du point de vue pratique et technique

De ce point de vue, contrairement à ce que nous venons de voir pour les aspects technologico-théoriques, les ouvrages de référence dans lesquels sont traités les aspects techniques de résolution de problèmes de géométrie élémentaire à l'aide du calcul vectoriel sont moins répertoriés, et l'enquête à laquelle je me suis livré a été plus difficile.

---

[12] Voir pages 160 - 163.
[13] Voir pages 164 - 169.

J'ai évidemment commencé mon enquête en m'intéressant aux inventeurs du calcul vectoriel moderne, et en particulier à Grassmann et Gibbs.

• D'abord, je me suis intéressé aux travaux de Grassmann sur ce point précis. Leur accès en est facilité par la récente traduction de Dominique Flament de l'Ausdehnunslehre de 1844. Les idées de base sont traduites par le choix d'expressions telles que « déviation d'un point A par rapport à un autre point R », « écart d'un élément à un autre », « déviation totale d'une série de points par rapport à un point R », « écart d'une association élémentaire à un élément », qui correspondent pour les deux premiers au vecteur $\overrightarrow{RA}$ et pour les deux derniers à des expressions telles que :

$$\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC}, \text{ et plus généralement } a\overrightarrow{RA} + b\overrightarrow{RB} + c\overrightarrow{RC}.$$

L'idée de départ consiste à pointer le plan ou l'espace en un point R et à considérer les écarts ou déviations d'un point ou d'un système de points pondérés par rapport à ce point R, puis de s'intéresser à des systèmes dont les déviations par rapport à R sont les mêmes. Des exemples simples sont alors traités[14]. C'est alors que l'indépendance du résultat par rapport au choix initial du point R apparaît, ce qui débouche sur la notion de grandeurs élémentaires égales, puis sur la théorie de ces grandeurs élémentaires, théorie qui permet d'étendre celle faite par Möebius à propos du barycentre au cas où la somme des masses est nulle[15].

Les applications traitées par Grassmann[16] concernent la statique (le barycentre comme « centre de forces parallèles », mais également une étude des corps flottants faisant intervenir une association de masse nulle, le vecteur constant qui lui est associé se voyant attribuer une signification physique), et le magnétisme (pour illustrer à nouveau les associations de poids total nul). Mais aucune application concernant la géométrie élémentaire n'est donnée.

• Gibbs, dans son article « On multiple algebra » (1869), évoque les intérêts respectifs de l'« analyse vectorielle » et de l'« analyse ponctuelle » pour les applications de l'algèbre « multiple » à la géométrie[17]. Il ne donne aucun exemple, mais développe des considérations générales sur la portée de chacune de ces branches ; il termine en évoquant l'utilisation du plan ou de l'espace pointé : « *Si on représente les points par des vecteurs tracés à partir d'une origine commune, et si on développe alors celles des relations entre de tels vecteurs représentant des points qui sont indépendantes de la position de l'origine, par ce simple processus on peut obtenir une grande partie de l'algèbre ponctuelle, et peut-être cette algèbre toute entière.* » Une méthode est ainsi dégagée pour traiter à l'aide des vecteurs les questions de géométrie ponctuelle.

---

[14]Voir pages 63 - 64.
[15]Voir pages 66 - 69.
[16]Voir page 70.
[17]Voir pages 86 - 88, et surtout cette dernière.

Ce programme de travail a-t-il par la suite été mené à bien ? Pour répondre à cette question, je me suis intéressé aux premiers traités de calcul vectoriel publiés en France. L'attention portée aux premiers traités se justifie par le fait que, d'une part, si ce programme de travail est conforme aux attentes de Gibbs, on en trouvera un début de réalisation dans ce type d'ouvrages, qui souhaitent valoriser le calcul vectoriel, en montrant ses multiples applications ; d'autre part, leur contenu a sans nul doute influencé les ouvrages qui ont suivi. Deux traités étaient, de ce point de vue, incontournables, car ils sont les premiers à paraître en langue française : « Éléments de calcul vectoriel » de Burali-Forti et Marcolongo et « Calcul vectoriel » de J.-G. Coffin ; dans les deux cas, il s'agit d'une traduction d'ouvrages : l'un à partir de l'italien (en 1910), l'autre à partir de l'anglo-américain (en 1914). Ces ouvrages ont en commun de se préoccuper à la fois de mathématiques (géométrie élémentaire et analyse vectorielle) et d'applications à la physique mathématique mais ils diffèrent considérablement par l'organisation mathématique qu'ils proposent, ce qui s'explique partiellement par les lectorats visés par chacun d'eux. Le premier veut être un ouvrage universitaire de référence. Les questions de langage (distinction entre vecteur et segment, débat sur une bonne utilisation des expressions « origine » et « extrémité » lorsqu'on parle de vecteurs) y sont abordées en détail. La théorie des formes de Grassmann de première espèce est présentée complètement, dans un chapitre intitulé « Calcul barycentrique ». Les seules applications de géométrie élémentaire qui sont présentées dans ce chapitre concernent les points remarquables dans un triangle, et la démonstration des résultats à l'aide de barycentres[18]. L'ouvrage de J.– G. Coffin, au contraire, déploie les premiers éléments du programme de travail suggéré par Gibbs, en quelques pages dont le contenu permet la rencontre de types de problèmes faciles à identifier, avec pour chacun d'eux une ou plusieurs techniques de résolution utilisant des vecteurs-positions, ces techniques étant montrées, commentées parfois du point de vue de leur portée, de leurs avantages et inconvénients[19]. Les types de problèmes abordés concernent la localisation du point d'intersection de deux droites chacune déterminées par deux points, ainsi que les problèmes d'alignement.

Il semble que ces deux ouvrages n'aient pas eu la même influence sur les responsables de l'enseignement et sur les pratiques professorales à l'égard du calcul vectoriel. Celle de l'ouvrage de Marcolongo et Burali-Forti est importante, à tel point que la lecture de certaines discussions terminologiques rappellent des débats qui ont eu un regain d'intérêt à l'époque des mathématiques modernes. Les applications à la géométrie affine élémentaire sont vues au travers de la notion de barycentre, et l'on retrouvera cette prédominance dans les programmes d'enseignement à partir des années 45, parfois même de manière anticipée dans certains manuels, qui traitent le barycentre pour alimenter en

[18]Voir pages 308 - 311.
[19]Voir pages 311 - 324.

exercices cette partie du cours, alors même que cette notion ne figure pas au programme. Après l'époque des mathématiques modernes, les programmes seront de nouveau sur ce point organisés autour de la notion de barycentre[20]. Quant à l'ouvrage de Coffin, les attaches de l'auteur avec la France ne suffisent pas à lui assurer une grande influence : essentiellement écrit à l'intention des étudiants en Physique, la partie concernant la géométrie élémentaire ne semble pas avoir fait en France beaucoup d'émules pour cette démarche originale, qui prend peu en charge les aspects technologico-théoriques pour se concentrer au contraire sur quelques types de problèmes et sur les techniques vectorielles de résolution, renvoyant le lecteur à d'autres ouvrages pour les aspects plus théoriques, ainsi que pour les démonstrations formelles.

Cet ouvrage, venu des États Unis d'Amérique, témoigne pourtant d'une pratique du calcul vectoriel très répandue et encore très vivante dans les pays anglo-saxons. Plusieurs ouvrages ou manuels en témoignent :
« Didactique » de J.T. Fletcher (Traduction française en 1966) ;
« Geometry, a comprehensive course » de Dan Pedoe (1970, réédité en 1988) ;
Manuels allemands de la collection Lambacher et Schweizer (1995 et 1996).
En revanche, les ouvrages et publications françaises reprenant de telles pratiques (reposant sur la manipulation de vecteurs-positions et sur l'utilisation de formes nulles de Grassmann) sont beaucoup plus rares.
– L'ouvrage de Lucien Chatellun (1952)[21], qui s'adresse à des étudiants et aux candidats aux concours de l'enseignement fait une place à l'étude des formes nulles de Grassmann faisant intervenir 3 ou 4 points. Mais cette étude sert de moyen pour démontrer les théorèmes de Ménélaüs et de Céva, qui sont ensuite utilisés dans les applications en géométrie élémentaire. Les seules applications véritables des formes nulles de Grassmann concernent des exercices difficiles posés à l'agrégation.
– Dans la publication de l'IREM de Bordeaux « L'enseignement des vecteurs, Quatrième, Troisième, Seconde » (1992)[22] , le plan pointé et les vecteurs-positions sont introduits, mais ils le sont surtout pour définir la multiplication d'un vecteur par un nombre, et pour démontrer les propriétés de cette opération. En revanche, ils ne sont pas utilisés dans des techniques de résolution d'exercices ou de problèmes.
– Dans deux ouvrages universitaires récents (« Les fondements de la géométrie » de J. Lelong-Ferrand (1985), et « Méthodes modernes en géométrie » de J. Fresnel (1996)) on retrouve une allusion aux formes de Grassmann et à leur emploi pour caractériser des points alignés. Mais dans le premier, les exercices sollicitant ces résultats sont très guidés

[20]Voir la conclusion relative à l'étude de l'évolution des programmes, pages 300 - 301, ainsi que l'étude plus détaillée relative à la place dans les programmes successifs des problèmes d'alignement (pages 273 - 283).
[21]Voir pages 325 - 327.
[22]Voir pages 339 - 344.

et aucune autonomie du lecteur au sujet de ces outils n'est attendue ; pour le deuxième, les énoncés en question servent à démontrer d'autres caractérisations de l'alignement de points ou du caractère lié d'une famille de points, mettant en œuvre des outils mathématiques tels que les coordonnées barycentriques ou les déterminants.

À l'issue de ce travail d'enquête sur l'utilisation du calcul vectoriel dans les questions élémentaires de géométrie affine, on voit apparaître deux univers dans la pratique du calcul vectoriello-ponctuel :
– un univers anglo-saxon, où l'on utilise effectivement le pointage du plan ou de l'espace, ainsi que les vecteurs-positions (les « écarts » ou les « déviations » de Grassmann), les propriétés géométriques en question étant caractérisées en termes de vecteurs-positions.
– un univers français de l'enseignement secondaire, où les vecteurs-positions sont indésirables, la notation $\overrightarrow{AB}$ et la relation de Chasles (sous forme additive) étant au cœur des techniques.

2 – Construction d'une organisation mathématique relative à la liaison points-vecteurs

La thèse que je voudrais prouver est la suivante : le caractère indésirable ou, en tous cas, l'usage presque inexistant des vecteurs-positions dans l'enseignement secondaire en France est la raison principale du déséquilibre entre la partie théorique (savoirs) et la partie pratique (savoir-faire) du traitement des questions de géométrie élémentaire à l'aide des vecteurs, et même la raison pour laquelle le manque de pertinence du principe énoncé plus haut n'est pas apparue clairement.

Pour étayer cette thèse, j'ai cherché à mettre au point une organisation mathématique dans laquelle on rentre par les types de problèmes, de manière à introduire des techniques utilisant des vecteurs-positions. Pour la construire, je me suis évidemment intéressé aux organisations mathématiques existantes dans les ouvrages ou manuels anglo-saxons évoqués précédemment, mais également à des publications IREM (en particulier « Les problèmes d'alignement et de concours en géométrie plane » de l'IREM de Marseille (1983)). L'étude des éditions successives de manuels de Seconde[23] met en évidence le souci des auteurs de proposer des problèmes d'alignement comme application immédiate des propriétés de la multiplication externe. Malgré les difficultés d'enseignement et d'apprentissage liées à ce type de question, difficultés dont témoignent à la fois l'article de Nicole Vogel « Quelques repères pour apprendre à démontrer avec la relation de Chasles » (Repères IREM n° 16) et la brochure « Faire des mathématiques en Seconde » (1997) coordonnée par Elisabeth Hébert, les auteurs de manuels continuent à

[23] Voir pages 283 - 286.

lui accorder une place importante (cependant, dans quelques rares dernières éditions, ces exercices ne sont proposés qu'après l'introduction de la notion de base du plan). C'est la raison pour laquelle je me suis efforcé d'inclure dans l'organisation mathématique proposée le traitement de ce type de problèmes. À ce sujet, j'ai mis en évidence le fait qu'un autre type de problèmes, souvent passé sous silence dans les manuels actuels, est difficilement contournable : il s'agit de la détermination vectorielle du point d'intersection de deux droites. Cette question est traitée dans la brochure de l'IREM de Marseille (sous le nom de « méthode du double alignement ») et dans le Lambacher et Schweizer (détermination d'un TV par le procédé du « circuit fermé de vecteurs »). Dans les deux cas, les auteurs font intervenir plus ou moins explicitement des représentations paramétriques vectorielles des droites en question, sans attirer l'attention du lecteur sur cet objet. Dans l'organisation que je propose, je me suis efforcé de lui donner une meilleure visibilité, en l'affichant comme technique de résolution de tâches de modélisation des figures usuelles de la géométrie affine. Par ailleurs, dans les réalisations actuelles des programmes, les techniques complexes, personnalisées (« pré-algébriques ») enseignées en classe de Seconde pour résoudre les problèmes d'alignement à l'aide du calcul vectoriel sont abandonnées en classe de Première, au profit de celles que permet l'introduction du barycentre. Dans l'organisation proposée, j'ai cherché à établir une continuité entre les techniques de démonstration d'alignement sans le barycentre et l'introduction de ce dernier. Enfin, les techniques de manipulation des barycentres qui résultent de cette présentation permettent de mettre en pratique la « linéarisation » des barycentres[24], ce qui facilite beaucoup le « calcul » barycentrique.

Malgré la disparition des programmes actuels du thème relatif à l'utilisation de transformations vectorielles pour l'étude de configurations, disparition dont j'ai étudié les causes[25], j'ai tenu à ne pas limiter l'organisation mathématique proposée à l'étude par des moyens vectoriels de configurations de la géométrie affine. Il serait en effet paradoxal que le clivage affine/métrique, qui a disparu dans les programmes actuels, perdure dans les techniques vectorielles d'étude des configurations, autorisant le traitement de celles qui relèvent de la géométrie affine, et interdisant celles qui relèvent de la géométrie métrique. J'ai procédé de la même manière que précédemment : j'ai cherché dans des ouvrages ou manuels (pour la plupart anglo-saxons) des notations et des techniques permettant de modéliser vectoriellement les figures simples de la géométrie euclidienne (carré, triangle isocèle, triangle rectangle, losange, ..., mais également les droites remarquables : médiatrice, bissectrice, hauteur, médiane) ainsi que les principales transformations

[24]Cette linéarisation n'est certes pas intrinsèque, car elle dépend du point « origine » que l'on fixe au départ. Sur le plan théorique, c'est précisément pour obtenir une interprétation vectorielle des barycentres que l'on plonge de manière canonique un espace affine dans un espace vectoriel. Une autre interprétation vectorielle des barycentres, plus complexe, est donnée dans le cours de mathématiques de J.M. Arnaudiès et H. Fraysse, tome 4, Algèbre bilinéaire et géométrie, Dunod Université (1990).
[25]Voir pages 292 - 299.

géométriques. Là encore, l'étude des travaux de Grassmann (notion d'unité complémentaire d'une unité donnée E, notée |E), et ceux de Burali-Forti et Marcolongo (opérateur i, introduit en plongeant le plan dans l'espace et en utilisant le produit vectoriel) montrent la possibilité de faire intervenir le quart de tour vectoriel direct à l'aide de notations commodes. Les ouvrages récents dans lesquels j'ai trouvé une mise en œuvre de l'opérateur "|" sont relativement rares, et sont tous de provenance américaine : « Geometry, a comprehensive course » de Dan Pedoe (Dover, 1970, deuxième édition 1988) ; « Problem–Solving Through Problems » de Loren C. Larson (Springer–Verlag, 1983, deuxième édition 1990).

D'autre part, je me suis appuyé sur les brochures et articles (peu nombreux) publiés en France au moment où ces questions figuraient au programme :

– la brochure « Mélanges géométriques » (1987, CRDP d'Orléans) de Michel Dofal ;

– la conférence d'ouverture de P.H. Terracher, dans les Actes du colloque Inter-Irem de Géométrie 1994.

Les techniques évoquées par ces deux auteurs nécessitent une grande expertise ou un très fort guidage par l'intermédiaire de l'énoncé. Les techniques que je propose, plus proches dans leur aspect manipulatoire de celles utilisant les nombres complexes, ne souffrent pas des mêmes défauts. Par rapport à l'emploi des nombres complexes, elles offrent l'avantage d'opérer directement sur les vecteurs–positions, et ne nécessitent aucun repère orthonormal direct. Elles permettent de démontrer, à l'aide du calcul vectoriel sur les vecteurs-positions étendu à l'aide de l'opérateur "|", la présence de telle figure remarquable dans une configuration, ou encore celle de deux segments perpendiculaires (ou de même longueur).

L'introduction du produit scalaire est légitimée par la portée insuffisante ou par la lourdeur des techniques précédentes.

Le calcul vectoriel obtenu en intégrant le produit scalaire permet de d'algébriser les aires et de définir vectoriellement les transformations géométriques qui n'avaient pas pu l'être antérieurement (projection, symétrie orthogonale).

Ce travail de construction d'une organisation mathématique permettant de faire du calcul vectoriel un moyen de modéliser les figures géométriques, et de les étudier en calculant sur les modèles ainsi fabriqués, vise à combler une lacune dans la transposition didactique en France relative aux interventions du calcul vectoriel dans la géométrie élémentaire : cette organisation devrait permettre de mieux tirer profit des acquis des élèves à ce sujet, de donner des moyens nouveaux et algébriques pour résoudre des problèmes de géométrie affine ou métrique. D'ailleurs, la considération de vecteurs-positions est évoquée comme un préalable par les auteurs des programmes actuels de classes préparatoires, dans le bandeau du titre « Géométrie affine réelle », dans les termes suivants : « Le programme se place dans le cadre des sous-espaces affines des espaces vectoriels et des applications affines d'un espace vectoriel dans un autre. *Afin de relier ce point de vue à celui adopté dans les classes antérieures*[26], il convient de donner brièvement la définition d'un espace affine V de direction un espace vectoriel E, et de signaler que le choix d'une origine permet d'identifier espace affine et espace vectoriel. Dans tout le programme, on effectue cette identification ». Ce commentaire, qui n'appelle aucune remarque si on en fait une lecture sur le plan théorique, semble considérer la manipulation des vecteurs-positions comme une pratique vivante dans les classes antérieures, sur laquelle on pourrait s'appuyer, ce qui n'est guère le cas dans la situation actuelle. L'organisation mathématique proposée devrait permettre d'installer au lycée, sur le plan des pratiques et des techniques, cette identification entre un espace affine pointé et un espace vectoriel.

[26]C'est moi qui souligne.

B – Conclusion générale

1 – Les raisons de l'œuvre « Calcul vectoriel »

En cette fin du XXe siècle, les vecteurs bénéficient d'une certaine visibilité culturelle ; une personne vivant dans notre civilisation peut rencontrer les vecteurs en lisant des magazines spécialisés, de micro-informatique notamment : d'abord par l'intermédiaire du qualificatif « vectoriel » dans des expressions comme « dessin vectoriel », ou « polices vectorielles », et même sous forme de substantif comme dans l'expression « logiciels de vectorisation ». Il ne fait guère de doute que les vecteurs doivent être sollicités à certains niveaux pour expliquer la signification de ces expressions, mais le lecteur de ces revues est rarement invité à explorer l'espace qui sépare ces techniques d'infographie du cours de mathématiques sur les vecteurs qu'il a pu suivre au collège et au lycée. Pourtant, une amorce est parfois tentée pour réduire cet espace : ainsi dans une revue très récente[1], on trouve la précision suivante, qui suffit à montrer l'importance des mathématiques dans les techniques de dessin sur ordinateur :
« Dans un format graphique " bitmap ", une image est définie et codée sous la forme d'une mosaïque de pixels. Dans une illustration vectorielle, le codage ne comprend plus les pixels mais se fait sous forme mathématique, en intégrant les coordonnées et les caractéristiques de chaque élément, objet, point de contrôle, segment de courbe, etc. ».
Cette évocation de formules mathématiques permettant de réduire la place en mémoire nécessaire pour enregistrer un dessin de façon à pouvoir ensuite le reproduire, et ceci à la taille voulue, invite à étudier les mathématiques en question, si l'on veut comprendre comment ces techniques informatiques peuvent fonctionner.

Les exemples de rencontre avec les vecteurs ne manquent pas, même dans les journaux télévisés : ainsi, un reportage sur une enquête de police nécessitant la mise en œuvre de reconnaissance d'empreintes digitales, montre un policier qui commente son travail sur une représentation d'une telle empreinte sur un écran d'ordinateur, et ses premiers gestes sur cette image consistent à y placer plusieurs vecteurs (le mot est employé par le policier) nécessaires pour pouvoir comparer rapidement et à distance les caractéristiques de l'empreinte avec celles d'un fichier national.

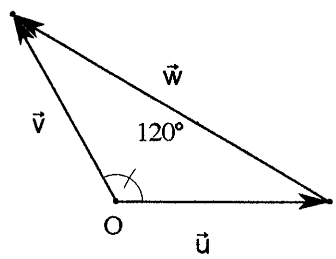
De même, un lecteur de revues de sciences et techniques, et parfois même de revues consacrées à l'automobile se verra confronté à une évocation des courbes ou surfaces de Bézier, (ou de Casteljau) au sujet desquelles on lui parlera de points de contrôle, points dont le déplacement suffira à produire une modification de la courbe ou de la surface, tout en préservant certaines de ses propriétés. Le lecteur retrouvera ces mêmes courbes dans la description des performances de très nombreux logiciels, dans

[1] Univers Macworld, Novembre 1998 ; p. 118.

des domaines très divers (logiciels de traitement d'images, de CAO-DAO, ...), et même dans l'explication des transformations subies par un texte sur écran d'ordinateur lorsqu'on change son style du style « droit » au style « italique »[2].

Ainsi, l'environnement technologique dans lequel nous vivons sollicite assez souvent les vecteurs, de manière indirecte. Il en est de même dans des sciences plus fondamentales, telles que la biologie. Ainsi, dans l'ouvrage « Matière à pensée »[3], Jean-Pierre Changeux évoque les travaux d'un biologiste relatifs au pointage de la main chez le singe. Le chercheur utilise des vecteurs pour fabriquer un modèle du codage neuronal de ce programme moteur ; à partir de l'enregistrement de l'activité de 241 neurones concernés par ce geste, il a associé à l'activité de chacun d'eux un vecteur de la manière suivante : la direction (et le sens) de ce vecteur est celle dans laquelle le singe pointe sa main lorsque l'activité du neurone en question est maximale ; sa longueur correspond à l'activité de ce neurone quand le singe pointe sa main dans une direction définie (cette activité dépend de la direction). Ainsi, pour une direction bien définie dans laquelle le singe pointe sa main, à chacun des 241 neurones est associé un vecteur dont la direction , le sens et la longueur sont parfaitement définis. Alors, si l'on fait la somme de ces 241 vecteurs, on obtient, avec moins de 10% d'erreur, la direction de pointage de la main du singe.

Si l'on veut se rapprocher de l'époque où les vecteurs ont été découverts, on peut faire allusion à leur utilisation en électricité. Le petit problème suivant permet d'illustrer les rapports entre vecteurs et courants d'une manière très évocatrice.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignant deux vecteurs de même norme, formant un angle de 120°, il s'agit de déterminer la norme de leur différence $\vec{w}$ en fonction de celle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis de calculer cette norme lorsque celle de $\vec{u}$ est égale à 127, puis égale à 220. On trouve facilement que la norme de $\vec{w}$ s'obtient en multipliant celle de $\vec{u}$ par $\sqrt{3}$. Les applications numériques donnent alors respectivement les valeurs approchées suivantes : 219,97 (environ 220) et 381,05 (environ 380). Même pour un utilisateur peu familier des techniques relatives à

---

[2]De manière plus complète, on pourra se référer à l'article *Géométrie de la CAO*, de J.C. Fiorot et P. Jeannin, dans les actes du colloque Inter-IREM de Géométrie de juin 1994, *Le dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, IREM de Lille. Chaque lettre est dessinée à l'aide de splines cubiques ; elle est enregistrée en mémoire sous forme d'un polygone de contrôle ; le passage des caractères droits aux caractères italiques peut se faire en transformant le polygone de contrôle de chaque lettre à l'aide d'une transvection.

[3]CHANGEUX Jean-Pierre, CONNES Alain, 1989, *Matière à pensée*, Éditions Odile Jacob, pp.136-139.

l'électricité, les nombres 220 et 380 évoquent les voltages des courants distribués en France. Ce petit problème peut servir à montrer que les vecteurs peuvent être utiles pour décrire des phénomènes relatifs aux courants alternatifs, qui apparaissent ainsi comme des grandeurs vectorielles : la différence entre deux courants de même amplitude (de même tension, dite simple) est un courant dont le voltage (tension dite composée) peut être plus grand ; si ces deux courants sont déphasés de 120°, alors le voltage est multiplié par $\sqrt{3}$. La suite de trois nombres « 127, 220, 380 » est telle que l'on passe d'un nombre au suivant en le multipliant par ce facteur, du moins approximativement. La question des générateurs et récepteurs triphasés (déphasés consécutivement de 120°) figure de manière explicite au programme de Physique appliquée des classes de Première STI[4] ; on en trouve un traitement vectoriello-ponctuel reposant sur la construction de Fresnel dans des ouvrages beaucoup plus anciens[5].

Les quelques exemples qui précèdent peuvent être utiles pour mettre en évidence le fait que le calcul vectoriel est sollicité actuellement dans de nombreuses activités prenant place dans des secteurs très divers. Ils ne peuvent cependant pas suffire à motiver l'étude des vecteurs telle qu'elle est envisagée dans les programmes pour l'enseignement de la géométrie plane. Ils souffrent en effet des mêmes défauts que les exemples donnés par Grassmann pour montrer l'intérêt de sa théorie des formes de première espèce par ses applications à la statique et au magnétisme : très vite, les objets propres à ces disciplines prennent le dessus, mettant en faiblesse un professeur de mathématiques dont la culture dans ces dernières est souvent trop fruste. Il convient donc de trouver les raisons internes aux mathématiques et, pour ce qui nous concerne, à la géométrie, légitimant l'étude des vecteurs.

L'étude épistémologique qui précède nous aide à cerner la raison principale, présente dans le projet de Leibniz que Grassmann réussira à concrétiser à l'aide de son calcul vectoriel. Leibniz cherche à créer une « analyse proprement géométrique, ou linéaire, qui nous exprime directement *situm* comme l'Algèbre exprime *magnetidudinem* », il veut pouvoir « représenter les figures, et même des machines et mouvements à l'aide de caractères », qu'il définit comme « des objets exprimant les relations entre d'autres objets, plus faciles à manier qu'elles ». Ainsi, il veut élargir l'emploi des lettres pour décrire les points d'une figure, de manière à les utiliser également pour symboliser les relations liant les points de cette figure, à l'aide de ce qu'il nomme une caractéristique (que nous appellerions aujourd'hui un système de formules algébriques), de manière à pouvoir en déduire les propriétés simplement « en combinant

---

[4]Voir par exemple le manuel de la collection Hachette, 1993.

[5]Voir par exemple l'ouvrage suivant :
ARTHUR J., 1939, *Cours de physique, tome II, Électricité (Électricité statique. Courant continu. Courant alternatif)*, Librairie de l'enseignement technique, Léon Eyrolles, Éditeur, Paris.

et en transposant des lettres ». Leibniz et Grassmann ont en outre en commun la volonté d'exprimer, à l'aide des caractères, les « vraies définitions de tout ce qui relève de la géométrie, et d'en poursuivre l'analyse jusqu'aux principes, c'est-à-dire jusqu'aux axiomes et aux postulats ». On peut donc dégager deux raisons fondamentales à leur projet commun :

– fonder d'une manière nouvelle la géométrie en tant que théorie mathématique (1) ;

– trouver des objets mathématiques et des opérations sur ces objets permettant de symboliser les relations géométriques présentes dans les figures ou dans les transformations géométriques, de manière à pouvoir en déduire les propriétés, par un simple calcul algébrique (2).

Nous avons vu dans notre deuxième partie que Leibniz a échoué dans la réalisation de son projet, et que Grassmann l'a partiellement réalisé, notamment en ce qui concerne (2). En revanche, son travail relatif à (1) a été mal reçu, à cause de ses conceptions relatives à l'articulation entre les mathématiques et la philosophie : il s'est trouvé notamment en décalage par rapport à la méthode axiomatique qui s'est développée à la fin du XIXe siècle et au début du XXe. Il a fallu attendre Hermann Weyl pour que (1) trouve une réalisation acceptée par la communauté des mathématiciens.

En vue d'un enseignement au niveau du Collège et du Lycée, la raison (2) mérite une attention particulière. Sa formulation mérite sans doute d'être retravaillée, de façon à pouvoir être, par exemple, communiquée aux parents d'élèves au cours d'une réunion de présentation du programme de mathématiques au niveau d'une classe, ou aux élèves eux-mêmes avant que l'étude du programme soit commencée. On peut alors en proposer la formulation suivante, visant à expliciter la raison principale de l'étude du calcul vectoriel au début du lycée :

– dans un premier temps, à propos d'une figure usuelle de la géométrie vue antérieurement : supposant connus certains de ses éléments, caractériser à l'aide de vecteurs, ses autres éléments. En d'autres termes, il s'agit de décrire à l'aide de vecteurs comment on peut engendrer (ou construire) une figure à partir de certains de ses éléments.

– dans un second temps, démontrer les propriétés d'une figure géométrique en utilisant un calcul algébrique d'un type nouveau : le calcul vectoriel.

2 – Construction d'une organisation mathématique adoptant cette raison comme motif pour étudier le calcul vectoriel

Dans notre première partie, nous avons évoqué deux manières très inefficaces que peut utiliser un élève pour étudier une œuvre : rester au niveau des questions ou tâches particulières (bachotage) sans même se rendre compte que l'on peut dégager des techniques concernant des types de tâches ou des types de problèmes, ces techniques étant elles-mêmes justifiées et rendues intelligibles par le niveau technologique de l'organisation ; attaquer la question par les technologies, en négligeant les niveaux des techniques et des types de tâches.

Dans notre quatrième partie, nous nous plaçons davantage du point de vue du professeur Y, et plus particulièrement au moment où ce dernier élabore l'organisation mathématique locale (relative à l'étude d'un thème). Les deux manières inefficaces pour un élève d'étudier une œuvre que nous venons d'évoquer renvoient à deux manières tout aussi imparfaites pour le professeur d'en organiser l'étude. La première (que nous appellerons O1 dans la suite), décrite en référence aux dispositifs actuels de l'enseignement en France, se caractérise par :

– l'abondance de mises en relation des élèves avec des couples de la forme (problème particulier, technique particulière associée) que nous noterons (P_i, τ_i), les critères permettant de distinguer les deux places du couple pouvant varier d'un couple à l'autre[6], ceci prenant place dans des dispositifs didactiques variés (activités, exercices d'application, ...) ;

– une relative rareté du travail des techniques, notamment en ce qui concerne leur portée ;

– une technologie très peu développée.

La deuxième (que nous appellerons O2 dans la suite), plus ancienne du point de vue des pratiques professionnelles, consiste au contraire à :

– partir du niveau technologique θ ;

– revenir à des spécimens de problèmes P_{ij}, souvent présentés comme des applications de θ, dont le professeur sait qu'ils sont faisables à l'aide de techniques τ_j qui sont contrôlées par θ.

– malgré les apparences, travailler assez peu les techniques, notamment leur portée.

L'organisation O3 que nous proposons pourrait se décrire succinctement de la manière suivante :

– le professeur indique au départ les raisons d'étudier l'œuvre (voir le paragraphe précédent) ;

– l'étude est consacrée à des types de problèmes légitimes par rapport à ces raisons ;

– elle accorde une place importante aux techniques, et notamment à leur travail, dans le but d'améliorer leur fiabilité d'une part, de cerner leur portée d'autre part ;

– le niveau technologique est introduit pour justifier, et rendre intelligible les techniques d'une part, créer de nouvelles techniques plus efficaces pour des types de problèmes anciens et engendrer de nouveaux types de problèmes d'autre part.

---

[6]Nous parlons ici du point de vue du professeur ; le même constat concernant la difficulté à séparer le problème de la manière de le traiter, à séparer la tâche de la technique selon laquelle on l'exécute, peut être fait en ce qui concerne l'élève, pour qui la distinction est au moins aussi grande.

Dans les organisations O1 et O2, il est difficile (notamment pour l'élève) de comprendre pourquoi il est légitime de s'intéresser aux types de problèmes proposés par le professeur : dans O1, comme nous l'avons déjà souligné précédemment, les types de problèmes de l'organisation mathématique n'apparaissent pas clairement au début de l'étude ; dans O2, même lorsque le professeur montre que la technique utilisée pour résoudre un type de problèmes proposé est une « application » de le technologie θ, cette justification vient a posteriori ; l'élève, trop souvent, reste sur l'impression qu'il faut du génie pour penser à utiliser cette technique.

En identifiant une technique au système {dispositif, gestes} évoqué dans notre première partie, l'organisation O2 tend à privilégier pour les techniques le dispositif, et notamment les ostensifs, qui ont déjà été utilisés au niveau technologique θ ; ceci suppose que ces mêmes ostensifs sont également bien adaptés aux gestes à accomplir dans les techniques. Dans l'organisation O1, nous avons déjà signalé qu'il est difficile de séparer les techniques des problèmes : cette séparation est encore plus délicate en ce qui concerne leur composante « dispositif ». En effet, les dispositifs des diverses techniques doivent avoir des éléments communs, qui devront être pris en compte au niveau technologique, niveau qui précisément n'est guère développé.

L'organisation O3 impose cependant d'avoir identifié au préalable
– des types de problèmes T_{ijk},
– des techniques τ_{jk},
– des technologies θ_k,
et d'avoir trouvé au moins un chemin dans cet espace à trois dimensions le long duquel le professeur va conduire l'étude proposée à l'élève.
C'est ce que nous avons tenté ici en ce qui concerne le calcul vectoriel au lycée, en prenant comme germes de types de problèmes les question suivantes, prises dans les programmes récents d'enseignement à ce niveau en France :
– les problèmes d'alignement et de concours,
– l'étude des configurations de la géométrie euclidienne plane ;
quant à l'organisation didactique correspondante, seuls quelques éléments la concernant ont été abordés, en mettant en lumière certains moments de l'étude.

Notre travail met en évidence l'importance, dans l'organisation mathématique, des techniques, et en particulier des dispositifs qu'elles supposent, notamment du point de vue des ostensifs. Ainsi, le choix des ostensifs relatifs aux vecteurs conditionne l'existence même de certaines techniques. Notre étude met en évidence les trois ostensifs suivants :
– la notation $\overrightarrow{AB}$;
– la notation du « vecteur libre » $\vec{u}$;

– la notation $\vec{m}$ du vecteur-position d'un point M relativement à un point « origine » O.
En France, au niveau de l'enseignement secondaire, seuls les deux premiers sont reconnus par l'institution. Ils suffisent pour traiter le niveau technologique, la notation $\vec{u}$ étant indispensable à ce niveau. Dans les pays anglo-saxons que nous avons considérés (Allemagne, Grande-Bretagne, États-Unis), le troisième est couramment utilisé ; il est une partie du dispositif de nombreuses techniques : il facilite ainsi la description de ces techniques, ce qui est important pour leur enseignement, en même temps qu'il constitue un outil de base de ces techniques. Sa place n'est cependant pas confinée au niveau des techniques, car il intervient naturellement dans la justification de ces dernières, c'est-à-dire au niveau technologique des organisations mathématiques.

3 – Transpositions didactiques du calcul vectoriel

En France

Comme nous l'avons vu dans notre troisième partie, l'introduction véritable du calcul vectoriel dans les programmes de l'enseignement secondaire en France date de 1945 : le barycentre et le produit scalaire en sont les concepts organisateurs, le plan et l'espace sont d'emblée euclidiens. L'introduction, au moment de la période dite « des mathématiques modernes », du clivage affine/métrique répond au souci de présenter un modèle mathématique du plan et de l'espace : les aspects technologico-théoriques sont donc dominants, les types de problèmes et les techniques relèvent essentiellement de la géométrie analytique ; les figures de la géométrie et l'effet sur ces dernières des transformations sont délaissées au profit de l'étude des droites, des plans, et des transformations du plan ou de l'espace (vectoriel, affine, vectoriel euclidien, affine euclidien). Le barycentre et le produit scalaire continuent à tenir une place importante dans l'organisation, le clivage affine/métrique faisant du premier un outil essentiel de la géométrie affine, et du second le fondement de tous les aspects métriques (distances, orthogonalité, angles). Les programmes de la « contre-réforme » font disparaître le clivage affine/métrique et vont réintroduire les figures et leurs transformations. Le calcul vectoriel, organisé comme avant la période des « mathématiques modernes » autour du barycentre et du produit scalaire, se voit alors confier une mission nouvelle : fournir un moyen d'étudier les configurations de la géométrie plane (affine, mais également métrique), moyen auquel on n'hésite guère à attribuer le qualificatif de « puissant ». Les choses se déroulent conformément à la culture et aux habitudes de l'institution tant que le barycentre est disponible pour traiter des problèmes d'alignement et de concours ; mais l'évolution des programmes et leur articulation avec ceux du collège amènent à retarder l'introduction de ce dernier : confiant dans la puissance du calcul vectoriel, les auteurs de manuels proposent cependant de résoudre des problèmes d'alignement dans un cadre technologique pauvre, réduit aux règles de calculs dans l'ensemble des vecteurs, et à la caractérisation de l'alignement en termes de colinéarité de vecteurs. Les grosses difficultés rencontrées par les élèves dans la mise en œuvre de telles démonstrations ne remet guère en cause l'idée que ces exercices constituent un bon départ pour enseigner le calcul vectoriel[7] : divers aménagements de dispositifs didactiques d'aide à l'apprentissage d'un tel emploi des vecteurs sont mis au point et publiés dans des revues ou brochures professionnelles.

L'aspect suivant des programmes de la « contre réforme » est particulièrement paradoxal : alors que le clivage affine/métrique est supprimé de droit, il n'en demeure pas moins très présent de fait : en effet, aucune technique n'est disponible pour traiter en termes de calcul vectoriel les questions de longueurs, et d'orthogonalité (si l'on excepte les techniques de géométrie analytique) avant l'introduction du produit scalaire. Par exemple, les figures usuelles de la géométrie euclidienne, rencontrées dès le début du collège demeurent hors d'atteinte d'un traitement à l'aide du calcul vectoriel tant que le produit scalaire n'a pas été introduit, c'est-à-dire avant la classe de Première. Ainsi, le calcul vectoriel s'avère moins efficace que la géométrie analytique en classe de Seconde ; en classe de Première et Terminale, l'introduction du barycentre amène des techniques particulières (théorème du barycentre partiel, notamment) qui s'émancipent par rapport aux techniques de calcul vectoriel.

Quant à l'utilisation des transformations vectorielles pour l'étude de configurations de la géométrie plane, l'absence de techniques unanimement partagées dans la communauté des professeurs et auteurs de manuels, conjuguée à la difficulté de la mise en œuvre de telles techniques a provoqué sa disparition des programmes très peu d'années après son introduction. Remarquons que ces techniques n'utilisent pas le produit scalaire, mais la place joué par ce dernier au niveau technologique de l'organisation a incité les auteurs de programmes à ne faire apparaître ce type de problèmes qu'en Terminale.

Il convient de souligner l'importance qu'a pu tenir pendant longtemps dans l'organisation mathématique les thèmes d'étude sollicitant à la fois le barycentre et le produit scalaire, du fait de leur richesse en exercices pouvant servir de support à une évaluation : l'exemple le plus emblématique à ce sujet est constitué par l'étude de la fonction scalaire de Leibniz, plus précisément la réduction et les lignes de niveau de $\sum_{i=0}^{i=n} \alpha_i MA_i^2$, thème qui vient de disparaître du programme de spécialité de Terminale S, et que l'on retrouve en TP dans le programme des classes MPSI.

[7]Le document du Ministère « Aide à l'évaluation Seconde générale et technologique, Mathématiques », Tome 1, janvier 1996, pages 20 et 24, propose des exercices mobilisant le calcul vectoriel ayant pour support des problèmes d'alignement.

Dans quelques pays anglo-saxons

Au lieu de mettre le calcul vectoriel au service de l'élaboration d'une théorie du barycentre, les organisations mathématiques que nous avons rencontrées dans des ouvrages de niveaux divers en provenance de ces pays mettent l'accent sur la bijection entre le plan (ou l'espace) pointé et l'ensemble des vecteurs : contrairement aux habitudes et à la culture françaises à ce sujet, cette bijection n'est pas seulement considérée au niveau technologique de l'organisation (à ce niveau, toutes les cultures s'accordent) mais également au niveau des techniques, et d'abord du point de vue du dispositif de ces techniques : les vecteurs-positions, qui cohabitent avec les vecteurs notés sous la forme $\overrightarrow{XY}$ par l'intermédiaire de la relation $\overrightarrow{XY} = \vec{y} - \vec{x}$, constituent l'outil essentiel mis en œuvre dans ces techniques ; la technologie est évidemment adaptée en conséquence et on y trouve des énoncés faisant allusion à ces vecteurs-positions. Ces énoncés sont évoqués dans certains ouvrages universitaires français, mais leur transposition dans l'enseignement secondaire n'a guère été tentée.

Ces dispositifs de travail différents, les gestes différents que l'on est amené à y opérer, en un mot ces techniques différentes, mais également les énoncés technologiques différents auxquels ces dernières conduisent, montrent la pertinence de la notion d'organisation mathématique, et même de praxéologie mathématique pour étudier l'organisation des programmes et pour relativiser les difficultés d'enseignement et d'apprentissage qu'ils peuvent provoquer. Notre travail montre que le calcul vectoriel tel qu'il est enseigné au début du lycée en France ne constitue pas un outil « puissant » pour l'étude de problèmes tels que les problèmes d'alignement et l'étude de configurations, essentiellement pour les raisons suivantes :

– la difficulté de la modélisation d'une situation géométrique en termes de vecteurs est sous estimée, du fait de l'apparente proximité entre la désignation des points par des lettres et la notation $\overrightarrow{XY}$ utilisée pour les vecteurs ; l'utilisation dans les manuels du verbe « traduire » pour identifier cette phase de modélisation est un indice de cette sous estimation ; en d'autres termes, le dispositif de travail pour vectorialiser les figures est trop pauvre ;

– les techniques utilisées sont complexes, personnalisées, et nécessitent souvent une utilisation explicite de la figure qui semble violer le contrat usuel à ce sujet ;

– la technologie est trop fruste pour pouvoir contrôler et justifier des techniques. L'adjonction aux notations $\overrightarrow{XY}$ de la notation du vecteur « libre » $\vec{u}$ est certes utile pour énoncer les résultats technologiques ; mais elle n'est d'aucun secours dans les questions qui nous occupent. Le dispositif dans lequel la technologie est élaborée est donc lui aussi trop pauvre.

Nos propositions

Notre travail a mis en évidence l'importance du dispositif de travail en tant qu'élément constitutif des techniques, et des technologies associées. Celui qui nous apparaît le plus adéquat au projet d'étude du calcul vectoriel, fondé sur les raisons explicitées au paragraphe 1 de cette conclusion, est le dispositif que nous avons noté CVPB, calcul vectoriel dans lequel cohabitent des vecteurs-positions et des vecteurs associés à des couples de points, notés $\overrightarrow{XY}$. Le caractère arbitraire du choix du point « origine », souvent considéré en France comme inconvénient grave de ce dispositif, est ici au contraire un moteur de l'étude : on s'efforce en effet, au cours de cette dernière, de démontrer que les relations que l'on utilise dans les techniques sont indépendantes du choix de ce point « origine ». C'est ainsi que l'on est amené à identifier le rôle de la somme des coefficients d'une combinaison linéaire de vecteurs-positions égale au vecteur nul, puis par la suite, à introduire coefficients et points supplémentaires (barycentres) pour obtenir de telles combinaisons linéaires lorsqu'elles font défaut.

L'intérêt du dispositif CVPB réside d'abord dans le fait qu'il peut être conservé pour étudier des questions relevant de la géométrie euclidienne ; il présente également l'avantage de pouvoir être complété par l'adjonction d'un outil plus faible que le produit scalaire, l'opérateur "ǀ", notation commode pour le quart de tour vectoriel direct, outil cependant suffisamment puissant pour pouvoir assurer une modélisation vectorielle des figures usuelles de la géométrie euclidienne vues antérieurement, et pour pouvoir démontrer des propriétés d'orthogonalité de droites, d'égalité de longueurs. Cet outil pourrait être introduit dès la classe de Seconde, les rotations (et en particulier les quarts de tour) ayant été étudiés en Troisième. La force de cet outil résulte du fait que le calcul vectoriel a lieu, pour utiliser le langage de la géométrie différentielle tel que Snapper et Troyer le recommandent, dans le seul plan vectoriel tangent au point « origine » choisi, au lieu de calculer dans des plans tangents en divers points, les vecteurs étant transportés d'un plan vectoriel tangent à l'autre par déplacement parallèle, c'est-à-dire ici par translation.

L'introduction du produit scalaire, légitimée par les limites des techniques relatives au dispositif (CVPB, "ǀ"), permet de mieux mettre en évidence son rôle au niveau technologique ainsi que dans des techniques nouvelles. La réactivation des configurations mettant en jeu des calculs d'aires permet de retourner l'emploi du produit scalaire vers une algébrisation de la notion d'aire, algébrisation dans laquelle l'opérateur "ǀ" joue un rôle indispensable : (CVPB, "ǀ", p.s.) apparaît comme un dispositif de travail suffisamment simple et complet pour développer le projet d'enseignement du calcul vectoriel que nous avons entrepris.

4 – Des questions qui restent à étudier

Le travail que nous avons accompli dans cette thèse concerne essentiellement les organisations mathématiques relatives à l'enseignement de la géométrie à l'aide du calcul vectoriel : nous avons étudié l'évolution de ces organisations dans le temps, et dans des institutions relatives à des pays différents, puis proposé une organisation, en commençant par identifier les raisons d'étudier aujourd'hui le calcul vectoriel à des fins géométriques, au début du lycée. Un premier travail reste à faire d'une part en ce qui concerne cette organisation mathématique elle-même, et notamment au sujet de ses articulations avec les organisations mathématiques relatives au même thème d'étude, mais à des niveaux d'enseignement différents : nous aborderons ces aspects dans une première partie (41). Mais, comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises dans ce qui précède, nous n'avons fait qu'effleurer la question des organisations didactiques associées au programme d'étude que nous avons décrit, en mettant seulement l'accent sur certains moments de l'étude en ce qui concerne la partie relevant de la géométrie affine, d'une manière encore beaucoup moins détaillée pour celle relevant de la géométrie euclidienne plane : nous évoquerons cette question dans la dernière partie (42).

41 – Questions complémentaires relatives aux organisations mathématiques

L'articulation avec les débuts de l'enseignement du calcul vectoriel

Nous n'avons pas abordé cette question, puisque notre travail suppose que l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un nombre ont déjà été introduites. On peut cependant retirer de l'étude que nous avons faite les points suivants :
– il semble raisonnable d'admettre, au niveau du collège, le caractère transitif de l'égalité vectorielle (ou de l'équipollence des bipoints), comme le font les programmes depuis les années 1980 : tout « échafaudage préalable », visant à la déduire de propriétés plus simples est nécessairement trop complexe sur le plan mathématique, et mobiliserait trop de temps d'enseignement.
– il semble possible (voir la brochure de l'IREM de Bordeaux) d'introduire le plan pointé et les vecteurs-positions après l'étude de l'addition vectorielle, et avant celle de la multiplication externe.

La cohabitation des vecteurs-positions $\vec{m}$ *et des vecteurs « libres »* $\vec{u}$

C'est une question que nous n'avons pas abordée, et que l'on est contraint de se poser : d'une part, cette désignation d'un vecteur a déjà été introduite auparavant ; d'autre part, on veut pouvoir utiliser les vecteurs « libres » pour énoncer les propriétés des opérations, et plus généralement dans les énoncés de niveau technologique. D'autre part, ces vecteurs sont également indispensables pour manipuler les notions de vecteurs directeurs d'une droite, d'un plan, ces derniers n'étant pas, en général, « localisés ».

La solution, utilisée d'ailleurs dans la plupart des ouvrages concernés, consiste, à propos d'un vecteur « libre » ŭ, à ne faire aucune allusion au point U dont ŭ serait le vecteur-position, ce qui n'empêche pas de faire intervenir ŭ dans les calculs.

L'articulation avec l'enseignement des applications géométriques des nombres complexes

Sauf dans quelques séries bien spécialisées, cet enseignement n'est actuellement organisé qu'au niveau de la classe de Terminale. Notre proposition d'organisation permet de faire intervenir plus tôt l'opérateur "|". Son lien très clair avec la multiplication par le nombre complexe i faciliterait la traduction en termes de nombres complexes de relations vectorielles ; mais l'avantage principal de notre proposition réside dans le fait qu'elle permet de travailler le passage des points aux vecteurs indépendamment de tout traitement analytique (y compris complexe). Le manque de travail sur ce passage dans l'enseignement actuel conduit souvent le professeur à guider le travail de l'élève, notamment par l'intermédiaire de l'énoncé, pour élaborer un modèle algébrique complexe de la situation géométrique étudiée.

D'autre part, il conviendrait de localiser, du point de vue mathématique, la frontière entre les types de problèmes relevant de techniques s'inscrivant dans le dispositif (CVPB, "|") et ceux relevant des applications géométriques des nombres complexes : ces derniers semblent être d'une efficacité beaucoup plus grande pour les questions mettant en œuvre des questions d'angles et de cocyclicité, questions pour lesquelles le calcul vectoriel (CVPB, "|") atteint très vite ses limites.

L'articulation avec les débuts de l'Algèbre linéaire

Les propositions d'organisations mathématiques que nous avons faites permettent une première mise en rapport des élèves avec certains objets importants de l'algèbre linéaire :
– les combinaisons linéaires,
– les bases, et notamment, l'unicité de la décomposition d'un vecteur ;
le travail porte sur des symboles (les vecteurs-positions) présentant un double aspect : l'aspect ponctuel, sans doute dominant dans l'étude des questions de géométrie ; l'aspect vectoriel, qui peu à peu s'autonomise : le calcul sur les combinaisons linéaires de tels vecteurs se fait sans référence aux points, à l'aide des règles de calcul dans un espace vectoriel. Le vecteur-position joue donc le rôle d'objet transitionnel de la géométrie vers l'algèbre linéaire.

On sait que l'usage des résultats de la géométrie pour l'enseignement de l'algèbre linéaire est souvent métaphorique[8], et que son efficacité n'est pas garantie. Le travail que nous avons fait permet d'éclairer quelques aspects de cette question.

Si l'on considère un espace vectoriel ($\mathbf{R}^n$, par exemple) muni de sa structure canonique d'espace affine, seules les droites affines passant par l'origine sont des droites vectorielles, seuls les plans passant par l'origine sont des plans vectoriels. Il y a donc des droites et des plans « en trop », si l'on veut utiliser cet espace affine pour imaginer l'espace vectoriel, unique objet d'attention en algèbre linéaire. Que faire de ces droites et plans qui sont en trop ? Le professeur répond rarement à cette question. Prenons par exemple une droite $\mathscr{D}$ ne passant pas par l'origine : elle est contenue dans un seul plan $\mathscr{P}$ passant par l'origine, qui est donc un plan vectoriel. Prenons trois points A, B et C, distincts de l'origine, dans ce plan $\mathscr{P}$: on sait que leurs vecteurs-positions $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires (langage de la géométrie vectorielle enseignée au lycée) ou encore qu'ils sont linéairement dépendants (langage de l'algèbre linéaire naguère enseigné au lycée, qui ne l'est plus depuis le milieu des années 80) : il existe un triplet de nombres réels (α, β, γ) non tous nuls tels que $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$. Cette propriété est encore vraie si les trois points A, B et C sont sur la droite $\mathscr{D}$, mais on sait que cette condition ne suffit pas. Pour la rendre nécessaire et suffisante, il convient de lui « conjoindre » la condition : $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Ainsi, la mise en relation des élèves avec la condition nécessaire et suffisante d'alignement de trois points portant sur leurs vecteurs-positions, permet de mieux leur faire comprendre ce que l'on garde et ce que l'on abandonne dans le passage des points, des droites et des plans de la géométrie élémentaire aux sous-espaces vectoriels de l'algèbre linéaire :

– on garde les droites passant par l'origine, qui permettent de définir, au terme d'un processus que nous ne détaillons pas :

– les familles $(\vec{a}, \vec{b})$ de deux vecteurs linéairement dépendants par la condition : il existe un couple de nombres réels (α, β) non tous les deux nuls tels que : $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} = \vec{0}$;

– les familles libres de deux vecteurs ;

– on garde les plans passant par l'origine, qui permettent de définir de même :

– les familles $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de trois vecteurs linéairement dépendants par la condition : il existe un triplet de nombres réels (α, β, γ) non tous les trois nuls tels que $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$;

– les familles libres de trois vecteurs ;

– on abandonne les droites ne passant pas par l'origine, et du même coup la caractérisation de l'appartenance de trois points A, B et C à une telle droite en termes de vecteurs-positions :

[8]Voir l'article de Jean-Luc Dorier, *À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Recherches en didactiques des mathématiques, volume 18/2, pp. 203-204, 1998.

il existe un couple de nombres réels (α, β, γ) non tous les trois nuls tels que : $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
Cette dernière propriété permet de caractériser en termes de vecteurs les ensembles auxquels on attache une grande importance en géométrie ponctuelle (sous-espaces affines de dimension 1) et qui disparaissent en tant que sous-espaces vectoriels en algèbre linéaire. Sans elle, le professeur se trouve privé d'un moyen de délimiter la portée de la métaphore qu'il utilise pour introduire l'algèbre linéaire à partir des objets de la géométrie.

Les combinaisons linéaires et les bases ne sont pas les seuls objets de l'algèbre linéaire auxquels nos propositions préparent. On peut citer également les notions suivantes :
– représentation paramétrique vectorielle d'une droite, d'un plan ;
– résolution de systèmes linéaires (dans lesquels les inconnues sont les paramètres intervenant dans des représentations paramétriques de droites ou de plans) pour étudier des questions d'incidence relatives aux droites et aux plans ;
On peut facilement y greffer, pour ce qui concerne la géométrie analytique, le passage dans les deux sens d'une représentation paramétrique cartésienne à une équation cartésienne (ou un système de telles équations). Ceci fournit un matériel suffisamment riche pour introduire la résolution des systèmes linéaires par la méthode de Gauss, voie souvent empruntée pour étudier les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$, comme le proposait les programmes de Terminale C de mars 1982.

Quant aux propositions plus particulièrement relatives à la géométrie euclidienne, elles permettent d'établir un premier rapport pour les élèves :
– avec quelques applications linéaires du plan vectoriel euclidien dans lui-même :
  – le quart de tour vectoriel "I", à l'aide duquel on peut définir les rotations et similitudes vectorielles ($\cos\alpha\ I + \sin\alpha\ I$, ...) ;
  – les projections et les symétries vectorielles orthogonales sur une droite passant par le point « origine » ;
– avec les déterminants d'ordre 2 en tant que mesures algébriques d'aires, ce qui permet d'illustrer géométriquement ses propriétés de bilinéarité.

42 – Organisations didactiques relatives au programme d'étude envisagé

La démarcation entre l'organisation mathématique et l'organisation didactique correspondante est claire tant que l'on n'aborde pas la question du programme d'étude plus fin que le professeur établit à partir du programme d'étude constitué par le programme officiel. En effet, ce programme plus fin met à jour des types de problèmes qui peuvent ne pas y être identifiés. Or c'est précisément ce programme plus fin que nous avons dressé dans les propositions faites au B de notre quatrième partie. Mais la meilleure visibilité donnée à quelques types de problèmes n'est qu'une toute petite partie du travail à faire pour mener à bien la production d'une ou plusieurs organisations didactiques s'appuyant sur les organisations mathématiques locales que nous avons élaborées.

C'est la raison pour laquelle la partie la plus importante des questions qui restent à étudier à la suite de notre travail concerne la mise au point d'ingénieries didactiques fines portant sur certains moments particulièrement importants de l'étude de telles organisations mathématiques locales, et leur expérimentation dans des classes, et avec les professeurs de ces classes. Ce travail relève d'un type d'études relativement balisé dans le territoire de la didactique des mathématiques, ce qui ne veut pas dire qu'il est facile à faire. Pour en donner une idée, nous considérerons deux exemples.

La question du repérage vectoriel d'un point sur une droite définie par deux points

La question, du point de vue mathématique, peut être évoquée en ces termes : il s'agit de caractériser, en termes de vecteurs, l'appartenance d'un point M à une droite (AB). L'équivalence des propriétés suivantes règle la question :

(1) $M \in (AB)$

(2) il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$

(3) il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

(4) il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{OM} = (1-k)\,\overrightarrow{OA} + k\,\overrightarrow{OB}$

(5) il existe un nombre réel k tel que $\vec{m} = (1-k)\,\vec{a} + k\,\vec{b}$.

Une des caractéristiques de notre proposition réside dans le fait de ne pas se limiter à l'équivalence de (1) et (2), les énoncés suivants faisant intervenir un point O, avant que, dans (5) l'introduction d'une nouvelle notation masque en apparence cette intervention.

Plusieurs mises en œuvre didactiques peuvent être envisagées pour aménager une rencontre entre les élèves et la question qui nous occupe, dans lesquelles les tâches coopératives entre le professeur et les élèves peuvent laisser à ces derniers une autonomie et une responsabilité plus ou moins grande. Par exemple, si l'on veut laisser une responsabilité assez grande à l'élève, on peut imaginer l'aménagement d'un milieu du type de celui de Cabri-géomètre, dans lequel les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ seraient déjà dessinés à l'écran, et dans lequel les seuls gestes autorisés aux élèves seraient d'accéder aux deux menus suivants :

– construction du vecteur $\overrightarrow{OZ}$ égal à la somme de deux vecteurs de la forme $\overrightarrow{OX}$ et $\overrightarrow{OY}$;

– construction du vecteur $\overrightarrow{OZ}$ égal au produit du vecteur $\overrightarrow{OX}$ par un nombre que l'on rentre au clavier.

Le but du travail confié aux élèves serait, à l'aide seulement des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ déjà dessinés à l'écran et des deux menus précédents, de construire des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ tels que les points M appartiennent à la droite (AB). La validation se ferait par l'intermédiaire du logiciel auquel les élèves pourraient demander de tester l'appartenance des points qu'ils auraient construits à la droite (AB).

Repérage vectoriel du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est donnée.

On suppose que les vecteurs-positions sont alors des outils auxquels les élèves sont habitués, et que l'opérateur "|" a été introduit. Cette figure joue un rôle important dans la modélisation vectorielle des figures de la géométrie euclidienne plane, toutes les autres en dérivant plus ou moins directement. On peut alors problématiser cette situation de la manière suivante : il s'agit pour l'élève d'établir une formule donnant le vecteur-position du sommet en fonction des vecteurs-positions des extrémités de l'hypoténuse, formule dans laquelle les seules opérations autorisées sont : l'addition et la soustraction de deux vecteurs-positions, la multiplication d'un tel vecteur par un nombre, et l'opérateur "|". On peut envisager un dispositif reposant sur des travaux de groupes avec une situation de communication : les formules produites sont échangées entre les groupes, qui doivent tester à l'aide d'une construction « papier-crayon » les formules produites. En cas d'échec, le groupe renvoie au groupe émetteur sa formule ainsi que la construction correspondante, afin que ce dernier propose une nouvelle formule. Au cas où le désaccord persisterait, on peut envisager l'utilisation d'un logiciel du type évoqué précédemment, un menu ayant été ajouté pour construire l'image d'un vecteur-position par l'opérateur "|" : l'emploi du logiciel permet de réduire le temps de construction, et permet de voir le résultat de l'application de sous-formules figurant dans la formule faisant l'objet du débat.

Ces deux exemples, qui n'en sont qu'au stade de l'idée, devraient faire l'objet d'une étude complète : analyse a priori, expérimentation, analyse a posteriori, ..., dans un cadre théorique à préciser. C'est à ce moment-là (et à ce moment-là seulement) qu'il peut être pertinent de faire référence à des travaux tels que ceux de Raymond Duval relatifs aux différentes sortes d'appréhension des figures[9].

La mise au point d'une telle organisation didactique pourrait être à l'origine à lui seul d'un autre travail de thèse.

---

[9]DUVAL R., 1994, *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères IREM, n° 17, Topiques éditions.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages de mathématiques et d'épistémologie

ACTES du COLLOQUE Inter-IREM de Géométrie 1994, *Le dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, IREM de Lille.

AKKAR Mohammed, AKKAR Marie-Thérèse, EL MOSSADEQ Abdel Illah, 1985, *Les mathématiques par les problèmes, Olympiades nationales et internationales, rallyes, concours, divertissements*, Sochepress, Casablanca.

ARNAUDIÈS J.M., FRAYSSE H., 1990, *Cours de mathématiques 4, Algèbre bilinéaire et géométrie, classes préparatoires, 1er cycle universitaire*, Dunod Université, Paris.

ARTIN E., 1967, *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris.

BANCHOFF Thomas, WERMER John, 1993, *Linear Algebra Through Geometry*, Second edition, Springer-Verlag.

BERGER M., 1979, *Géométrie (5 tomes), tome 1 : action de groupes, espaces affines et projectifs*, Cedic/Fernand Nathan, Paris.

BERGER M., BERRY J-P., PANSU P., SAINT-RAYMOND X., 1982, *Géométrie, problèmes de géométrie commentés et rédigés*, Cedic/Fernand Nathan, Paris.

BLUMENTHAL Leonard M., 1980, *A modern view of geometry*, Dover Publications, Inc., New York.

BLUMENTHAL Leonard, 1970, *Theory and applications of distance geometry*, Chelsea publishing company, Bronx, New York.(Première publication en 1953 chez Oxford University Press, Oxford).

BOI Luciano, 1995, *Le problème mathématique de l'espace, une quête de l'intelligible*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelone, Budapest, Hong Kong, Londres, Milan, Paris, Santa Clara, Singapour, Tokyo.

BOULIGAND G., 1919, *Cours de géométrie analytique*, avec une préface de E. Cartan, Librairie Vuibert, Paris.

BOULIGAND G., 1936, *Leçons de géométrie vectorielle, préliminaires à l'étude de la théorie d'Einstein*, deuxiième édition, Librairie Vuibert, Paris.

BOULIGAND G., 1946, *Cours de géométrie analytique*, avec une préface de E. Cartan, quatrième édition, Librairie Vuibert, Paris.

BOULIGAND G., RABATÉ G., 1945, *Initiation aux méthodes vectorielles et aux applications géométriques et dynamiques de l'analyse*, quatrième édition, Librairie Vuibert, Paris.

BRICARD Raoul, 1942, *Le calcul vectoriel*, Librairie Armand Colin, Paris.

BRISAC René, 1955, *Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne*, Gauthier-Villars, Paris.

BURALI-FORTI C., MARCOLONGO R., 1910, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, traduction française de S. Lattès, Librairie scientifique J. Hermann, Paris.

BURALI-FORTI C., MARCOLONGO R., 1912, *Transformations linéaires, tome 1*, traduction française de P. Baridon, Mattei & Cie Éditeurs, Pavie ; Librairie scientifique J. Hermann, Paris ; Bowes & Bowes, Cambridge.

CARTAN E., 1946, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, réédition J. Gabay, 1988.

CHATELET A., 1929, *La théorie des nombres positifs et négatifs dans l'enseignement du second degré*, Librairie de l'enseignement technique Léon Eyrolles, Paris.

CHÂTELLET Gilles, 1993, *Les enjeux du mobile, Mathématique, physique, philosophie*, collection "Des travaux", Éditions du Seuil, Paris.

CHATELLUN Lucien, 1952, *Calcul vectoriel, Tome 1 : Algèbre, algèbre linéaire, applications*, Gautier-Villars, Paris.

CHOQUET G. , 1964, *L'enseignement de la géométrie*, éditions Hermann, Paris.

COFFIN J.-G., 1914, *Calcul vectoriel avec applications aux mathématiques et à la physique*, traduction française par Alex Véronnet, Gauthier-Villars, Paris.

COUSIN-FAUCONNET Annie, 1995, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, Paris, collection "Forrmation des enseignants".

COXETER, 1989, *Introduction to Geometry*, second edition, John Wiley & Sons, New York, Brisbane, Toronto, Singapore.

CROWE Michael J., 1967, *A history of vector analysis, The evolution of the idea of a vectorial system*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, London.

DELACHET A., 1979, *Le calcul vectoriel*, Collection "Que sais-je", sixième édition, PUF, Paris.

DIEUDONNÉ J., 1966, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, troisième édition, collection "Enseignement des sciences", Hermann, Paris.

DIEUDONNÉ J., 1986, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*, Hermann, Paris.

DOFAL M., 1987, *Mélanges géométriques*, CRDP, 55, rue N.D. de Recouvrance, 45 012 Orléans Cédex 1.

DRIVAS V., ROSENTHAL L., SEMEZIS Y., 1987, *La pratique des tenseurs*, Editions Eyrolles, Paris.

FLAMENT D., 1994, *Hermann Günther Grassmann, La science de la grandeur extensive, La Lineale Ausdehnungslehre*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris.

FLETCHER T. J., 1966, *L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui*, une didactique nouvelle pour l'enseignement du second degré, traduit de l'anglais par F. Dubail, D. Duclos, M. Glaymann, M. Hagege, C. Mourgues, M. Mourgues, O.C.D.L, Paris.

FRÉCHET Maurice, 1928, *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Gauthier-Villars, Paris, réédition J. Gabay 1989.

FRESNEL J., 1996, *Méthodes modernes en géométrie*, collection Formation des enseignants et formation continue, Hermann, Paris.

GIBBS J. Willard, 1961, *The scientific papers of J. Willard Gibbs*, Volume II, Dynamics, Vector Analysis and Multiple Algebra, Electromagnetic Theory of Light, Miscellaneous Papers, Dover Publications Inc., New York.

HADAMARD J., 1947, *Leçons de géométrie élémentaire, Tome 1 : géométrie plane*, 13e édition (La première édition date de 1898), Librairie Armand Colin, Paris, réimpression Éditions Jacques Gabay, 1988.

HAY G.E., 1953, *Vector and Tensor Analysis*, Dover Publications, New York.

HILBERT David, 1971, *Les fondements de la géométrie*, édition critique avec introduction et compléments préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris.

IREM de Strasbourg, 1975, *Le livre du problème , volume 5, calcul barycentrique*, Cedic, Paris.

JÄNICH Klaus, 1994, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Londres, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelone, Budapest.

KING James R., SCHNATTSCHNEIDER Doris (dir.), 1997, *Geometry turned on !, dynamic software in learning, teaching, and research*, The Mathematical Association of America.

KLEIN F., 1974, *Le programme d'Erlangen, considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Gauthier-Villars éditeur, Paris/Bruxelles/Montréal, réédition J. Gabay, 1991.

KNARR N., 1995, *Tranlation planes*, Springer-Verlag, collection “Lectures Notes in Mathematics”.

KUNTZMANN J., 1976, *Évolution et étude critique des enseignements de mathématique*, Cedic, Paris.

LARSON Loren C., 1990, *Problem-Solving Through Problems, Collection “Problem Books in Mathematics”*, deuxième édition corrigée, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Londres, Paris, Tokyo, Hong Kong.

LEHMANN Daniel, SACRÉ Carlos, 1982, *Géométrie et topologie des surfaces*, PUF, Paris.

LEHMANN Éric, 1984, *Mathématiques pour l'étudiant de 1ère année, tome 1 : algèbre et géométrie*, collection Dia Université, Belin, Paris.

LEIBNIZ G.W. , 1995, *la caractéristique géométrique*, texte établi, introduit et annoté par Javier ECHEVERRIA, traduit, annoté et préfacé par Marc PARMENTIER, Librairie philosophique J.Vrin, Paris.

LELONG-FERRAND J., 1985, *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris.

LICHNÉROWICZ A., 1948, *Éléments de calcul tensoriel*, Armand Colin, réimpression, J. Gabay, 1987.

MARTIN George E., 1996, *The foundations of geometry and the non-euclidean plane*, copyright Springer-Verlag 1975, collection Undergraduate Texts in Mathematics, troisième édition corrigée 1996 ; publié pour la première fois en 1932.

MILLMAN Richard S., PARKER George D., 1991, *Geometry, a metric approach with models*, deuxième édition, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Londres, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelone.

MIRON R. et BRÂNZEI D., 1995, *Backgrouds of arithmetic and geometry, an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

MOLK J. (DIR.), *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK, et pour ce qui concerne la mécanique sous la direction scientifique de Paul APPELL, deuxième volume, Tome IV, Mécanique générale, (réédition J. Gabay, 1991).

MOLK J. (DIR.), *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK, premier volume, Tome I, Arithmétique, (réédition J. Gabay, 1992).

NOMIZU Katsumi, SASAKI Takeshi, 1994, *Affine differential geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

PAPY G., 1971, *Nombres et vectoriel plan réels*, collection Frédérique, Tome 5, Éditions Eyrolles, Paris, et Presses Universitaires de Bruxelles.

PEDOE Dan, 1988, *Geometry, a comprehensive course*, Dover Publications, New York.

ROUCHÉ E., de COMBEROUSSE C., 1900, *Traité de géométrie*, septième édition, revue et augmentée, réédition J. Gabay, 1997.

RUTHERFORD D. E., 1954, *Vector methods applied to differentiel geométry, mechanics, and potentiel theory*, huitième édition, Oliver and Boyd, Edinburgh and London.

SAMUEL P., 1986, *Géométrie projective*, PUF, Paris.

SINACEUR Hourya, 1991, *Corps et Modèles*, collection Mathesis, Librairie philosophique Vrin, Paris.

SNAPPER E., TROYER R. J., 1971, *metric affine geometry*, Dover Publications, Inc., New York.

STOKER J.J., 1989, *Differential geometry*, Wiley-Interscience, New York, Londres, Sydney, Toronto.

THOMPSON A.C., 1996, *Minkowski geometry*, Cambridge University Press.

TISSERON Claude, 1994, *Géométries affine, projective, et euclidienne*, collection Formation des enseignants et formation continue, Hermann, Paris.

van der WAERDEN B. L., 1991, *Algebra*, Volume 1, Springer-Verlag. (traduction en anglais de la septième édition, qui date de 1966).

VÉRONNET Alex, 1933, *Le calcul vectoriel, cours d'algèbre de mathématiques spéciales et de mathématiques générales*, Gauthier-Villars, Paris.

WEYL H., 1922, Espace, temps, matière, Librairie Blanchard, Paris.

Ouvrages relatifs aux programmes d'enseignement de mathématiques en France

BELHOSTE B., 1995, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, Textes officiels, Tome 1 : 1789/1914*, INRP Économica. Plus particulièrement les textes suivants :
24 et 25 mars 1865 : programmes modifiés de l'enseignement scientifique des lycées, pp. 391-407.
26 janvier 1853 : programme de la classe de mathématiques spéciales, pp. 301-320.
27 juillet 1905 : instructions relatives à l'enseignement des mathématiques dans les lycées et collèges de garçons, pp. 671-677.
27 juillet 1905 : modifications des programmes de mathématiques dans les lycées et collèges de garçons, pp. 658-671.
31 mai 1902 : programmes de sciences et de comptabilité des classes secondaires dans les lycées et collèges de garçons, pp. 576-620.

Horaires et programmes de l'enseignement du second degré, 29e édition, 1967, Vuibert.

Instructions du 2 septembre 1925, Librairie Vuibert, Paris.

Instructions du 30 septembre 1938 relative à l'application des arrêtés du 30 août 1937 et du 11 avril 1938 fixant les programmes de l'enseignement du second degré, troisième édition, Librairie Vuibert, Paris.

Ministère de l'Éducation, 1971, *Mathématiques , classes du second cycle, Horaires, programmes, instructions*, Institut National de Recherche et de Documentation Pédagogiques.

Ministère de l'Éducation, 1975, *Mathématiques , classes du premier cycle, Horaires, programmes, instructions*, Institut National de Recherche et de Documentation Pédagogiques.

Ministère de l'Éducation, 1980 (réimpression), *Mathématiques , classes des collèges 6e, 5e, 4e, 3e, Horaires, objectifs, programmes, instructions*, Centre National de Documentation Pédagogique.

Ministère de l'Éducation, 1982, *Mathématiques , classes de seconde, première et terminale, Horaires, objectifs, programmes, instructions*, Centre National de Documentation Pédagogique.

Ministère de l'Éducation, 1989, *Mathématiques , classes des collèges 6e, 5e, 4e, 3e, Horaires, objectifs, programmes, instructions*, Centre National de Documentation Pédagogique.

Ministère de l'Éducation, 1989 (réédition), *Mathématiques , classes de seconde, première et terminale, Horaires, objectifs, programmes, instructions*, Centre National de Documentation Pédagogique.

Ministère de l'Éducation, 1991 (précédente édition : 1989), *Mathématiques supérieures et mathématiques Spéciales M, M' et P, P'*, collection : Horaires / Objectifs / Programmes / Instructions, Centre National de Documentation Pédagogique.

Ministère de l'Éducation, 1994, *Mathématiques , classes de seconde, classes de premières et terminales séries ES, L, S, Horaires, objectifs, programmes, instructions*, Centre National de Documentation Pédagogique.

Nouveaux horaires et programmes de l'enseignement du second degré, 1948-1949, Vuibert, Paris.

Nouveaux horaires et programmes de l'enseignement secondaire, 1942, Vuibert, Paris.

Ouvrages et articles de didactique des mathématiques auxquels il est fait référence dans notre travail

ACTES du COLLOQUE Inter-IREM de Géométrie 1994, *Le dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, IREM de Lille.

AMALBERTI R., ARNAL J-P., BENIAMINO J.C., MARION J., OVAERT J.L., PROUDHON D., VERNET J-M., 1983, *Les problèmes d'alignement, de parallélisme et de concours en géométrie plane*, G.R.E.G., IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Yves, 1984, *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique*, Petit x, n°5, Spécial calcul algébrique, IREM de Grenoble, pp 51-94.

CHEVALLARD Yves, 1989, *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation*, Petit x, n°19, IREM de Grenoble, pp 43-72.

CHEVALLARD Yves, 1990, *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques* , Petit x, n°23, IREM de Grenoble, pp 5-38.

CHEVALLARD Yves, 1991, *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné, avec un exemple de transposition didactique par Yves Chevallard et Marie-Alberte Johsua*, deuxième édition augmentée, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1991-1992, *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*, Séminaire Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique, Université Joseph Fourier, n° 122, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1995, *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*, Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques de 1995,pp. 83 - 122, (édition coordonnée par Robert Noirfalise, IREM de Clermont-Ferrand , et Marie-Jeanne Perrin-Glorian, IUFM d'Arras et Équipe DIDIREM Paris VII.

CHEVALLARD Yves, 1997, *Familière et problématique, la figure du professeur*, Recherches en didactique des mathématiques, Volume 17/3, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble, pp. 17 - 54.

COLOMB J. (dir.), 1993, *Les enseignements en Troisème et Seconde, ruptures et continuités*, INRP, Paris.

COUSIN-FAUCONNET Annie, 1995, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, Paris, collection "Forrmation des enseignants".

DOFAL M., 1987, *Mélanges géométriques*, CRDP, 55, rue N.D. de Recouvrance, 45 012 Orléans Cédex 1.

DORIER Jean-Luc (coord.), 1997, *L'enseignement de l'Algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

DORIER Jean-Luc, 1998, *À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire*, Recherches en didactiques des mathématiques, volume 18/2, pp. 203-204, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

DUVAL R., 1994, *Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères IREM, n° 17, Topiques éditions.

FRÉMONT J.L., HÉBERT H., LANDEROUIN N., MACÉ A., PRIGENT S., 1997, *Faire des mathématiques en seconde, fichier-élève à l'usage des professeurs*, CNDP Haute-Normandie.

GASCON J., 1995, *Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée"*, Petit x, n° 37, IREM de Grenoble, pp 43-63.

GOUTEYRON A., BOUSCASSE J.-M., CHAUMET M.-C., COLMEZ F., DAMEY P., PINET B., PUYOU J., ROBERT Y., (1992), L'Enseignement des vecteurs, IREM de Bordeaux.

IREM de Strasbourg, 1975, *Le livre du problème , volume 5, calcul barycentrique*, Cedic, Paris.

KING James R., SCHNATTSCHNEIDER Doris (dir.), 1997, *Geometry turned on !, dynamic software in learning, teaching, and research*, The Mathematical Association of America.

VOGEL Nicole, 1994, *Quelques repères pour apprendre à démontrer avec la relation de Chasles*, Repères-IREM, n° 16, pp.83 - 109.

Autres références de didactique des mathématiques portant sur le même thème ou sur un thème voisin

ALVES-DIAS M., 1998, *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.* Thèse de doctorat, Paris : Université de Paris 7, 504 p.

AUGÉ ROY Sylvette, 1993, *Vecteurs : Us et coutumes*, Mémoire professionnel soutenu à l'IUFM d'Orléans-Tours.

LÊ THI Hoài Châu, 1997, *Étude didactique et épistémologique sur l'enseignement du vecteur dans deux institutions : la classe de dixième au Viêt-nam et la classe de seconde en France*, Thèse préparée au sein des équipes de : Didactique des Mathématiques, Laboratoire Leibniz - IMAG, Formation de Troisième Cycle, École Normale Supérieure de VINH.

HACHE Christophe, ROBERT Aline, 1997, *Un essai d'analyse de pratiques effectives en classe de seconde, ou comment un enseignant fait « fréquenter » les mathématiques à ses élèves pendant la classe,* Recherches en didactiques des mathématiques, volume 17/3, pp. 103-150, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

Ouvrages divers

CHANGEUX Jean-Pierre, CONNES Alain, 1989, *Matière à pensée*, Éditions Odile Jacob, Paris.

Manuels scolaires de mathématiques

ARTIGUES C., BELLECAVE Y., BELLEMIN J.M., FERACHOGLOU R., TERRACHER P.H., 1992, *Math Term C et E, Algèbre et géométrie*, éditions Hachette, Paris.

AUDIRAC, BONVALET, RICHERME, 1985, *Mathématiques 2de*, éditions Magnard, Paris.

BARRA R., JOBERT C., MALAVAL J., PENSEC J-J., TRICOIRE A., 1989, *Mathématiques Terminale CE, tome 2*, éditions Nathan, Paris.

BELLECAVE, DUCOS, MÉNARDO, PÉA, 1981, *Thèmes mathématiques*, Nathan, Paris.

BIANCAMARIA P., DEHAME E., 1972, *Mathématique, classe de Troisième*, collection QUEYSANNE-REVUZ, Fernand Nathan, Paris.

BIANCAMARIA P., DEHAME E., KERAMSI G., 1971, *Mathématique, classe de Quatrième*, collection QUEYSANNE-REVUZ, Fernand Nathan, Paris.

BONTEMPS G. (dir.), HAYE G., NOUET M., SERRA E., VENARD J., 1992, *Mathématiques, Algèbre-Géométrie, Classes de Terminales C et E*, éditions Bordas, Paris.

DECRETON J.M., PORET B., 1982, *Mathématiques, classe de seconde*, éditions Gamma, Paris Tournai et Montréal.

DECRETON, PORET, 1978, *Mathématiques, Tome 2 : géométrie, classe de seconde*, éditions Gamma, Paris Tournai et Montréal.

DOFAL M. (dir.), BOUVIER J.P., CHADENAS J., DAUDIN P., LEROY A., OLIVIER Y., PRESSIAT A., 1992,*Math Terminales CE, géométrie*, éditions Belin, Paris.

GAUTIER C., ROYER P., THIERCÉ C., 1989, *Mathématiques Terminale C et E, Algèbre et géométrie*, éditions Hachette, Paris.

GOURION M., QUEYSANNE M., 1977, Mathématique 2e CT, tome 2, collection QUEYSANNE-REVUZ, Fernand Nathan, Paris.

GUININ D., JOPPIN B., 1992, *Mathématiques Classes de Terminales C et E, Algèbre-Géométrie*, éditions Bréal, Paris.

HAUTCŒUR S., BLOND G., *Mathématiques Terminale C\E, Algèbre-Géométrie*, éditions Belin, 1989, Paris.

KERAMSI G., QUEYSANNE M., 1970, Mathématique 2e CT, série rouge, nouvelle collection QUEYSANNE-REVUZ, Fernand Nathan, Paris.

LEBOSSÉ C., HÉMERY C., 1939, *Algèbre, arithmétique et Géométrie, classe de quatrième, deuxième année des E.P.S. et des Cours Complémentaires*, programmes du 14 avril 1938, Librairie Fernand Nathan, Paris.

LEBOSSÉ C., HÉMERY C., 1962, *Géométrie, classe de première A', C, M et M', programme 1961*, Librairie Fernand Nathan.

LEBOSSÉ C., HÉMERY C., 1963, *Géométrie, classe de Mathématiques, programme de 1945*, Librairie Fernand Nathan, Paris.

LESPINARD V., PERNET R., 1966, *Géométrie, classe de première C, programme du 8 juin 1966*, Librairie André Desvigne, Lyon.

LESPINARD V., PERNET R., 1967, *Géométrie, classe de terminale C, programme du 8 juin 1966*, Librairie André Desvigne, Lyon.

PORTÉ D., AUDIGIER M.N., BONNEFOND G., DAVIAUD D., PORTÉ D., QUITTÉ C., SCHUWER C., 1988, *Mathématiques Terminale C\E, Géométrie Algèbre*, éditions Didier, Paris.

SCHMID A. et SCHWEIZER W. (dir.), 1995,par BÜRKER M., KOLLER D., SCHEID H., SCHMID A. et avec la collaboration de GERLACH H., *LS Analytische geometrie, Leitstungskurs, classe de terminale, matière principale)*, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig.

SCHMID A. et SCHWEIZER W. (dir.), 1996,par BÜRKER M., JONCZYK S., SCHEID H., SCHMID A. et avec la collaboration de GERLACH H., *LS Analytische geometrie, grunkurs, (classe de terminale, matière de base obligatoire)*, Ernst Klett Schulbuchverlag, Stuttgart, Düsseldorf, Berlin, Leipzig.

SCHMID A. et WEIDIG I. (dir.) 1996, par LIND D., MÜLLER A., RIEMER W., SCHERMULY H., WEIDIG I., ZIMMERMANN P., *LS 9 (classe de Seconde)*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig, édition pour le land de Nordrhein–Westfalen.

SCHMID A. et WEIDIG I. (dir.) 1996, par LIND D., MÜLLER A., RIEMER W., SCHERMULY H., WEIDIG I., ZIMMERMANN P., *LS 10 (classe de Première)*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig, édition pour le land de Nordrhein–Westfalen.

Annexe 1

Détail du titre V du programme de la classe de Première scientifique S ou E (*arrêté du 9 mars 1982*).

V - Géométrie plane

Le professeur procédera à un rappel rapide (sans démonstrationn) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel et d'une application linéaire, un premier exemple d'application linéaire étant la projection vectorielle.

Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme ; il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espaces vectoriels que les ensembles de vecteur de la droite, du plan (§V), de l'espace (§VI).

L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points.

a) Colinéarité de deux vecteurs ; vecteurs directeurs d'une droite. Bases ; repères.

b) Exemples de transformations, définies par des procédés variés.

Exemples de composition de transformations, de décomposition d'une transformation ; exemples de groupes de transformations.

c) Groupe des isométries du plan conservant un point donné ; décomposition d'une telle isométrie en un produit de symétries axiales ; partition en deux classes ; rotations.

Application linéaire associée à une isométrie admettant un point fixe.

d) Orientation du plan.

e) Applications du produit scalaire :

Fonctions $M \rightarrow \alpha\, MA^2 + \beta\, MB^2$; théorème de la médiane.

Formule $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; formules d'addition ; formules de multiplication par 2.

Relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

f) Autres relations métriques dans le triangle : $S = 1/2\, bc \sin A$;

$a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$.

Thèmes (à titre indicatif) :

Problèmes d'alignement et de concours ; rôle du calcul barycentrique dans ces problèmes.

Problèmes de constructions : rôle des diverses méthodes (analyse des propriétés d'une configuration, recours à une transformation, emploi de l'outil algébrique, ...).

Problèmes de lieux géométriques.

Problèmes de trajets de longueur minimale et de trajets de durée minimale : billard, réflexion, réfraction, ...

VI - Géométrie dans l'espace

a) Vecteurs de l'espace : extension de la définition et des opérations étudiées dans le plan.

Droite définie par un point et un vecteur ; plan défini par un point et deux vecteurs.

Bases ; repères.

b) Extension du produit scalaire à l'espace.

Orthogonalité de deux vecteurs ; traduction vectorielle de l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan.

Plans perpendiculaires : définition, caractérisation.

Projection orthogonale d'un angle droit.

c) Bases orthonormales ; repères orthonormaux ; expression du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

Fonctions $M \to \vec{k}.\overrightarrow{OM}$; équations cartésiennes d'un plan ; distance d'un point à un plan.

d) Orientation de l'espace ; bases orthonormales directes ; repères orthonormaux directs.

Produit vectoriel [notations $\vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$].

Produit mixte.

Coordonnées du produit vectoriel et expression du produit mixte dans une base orthonormale directe.

e) Sphère ; section plane ; plan tangent.

Thème obligatoire dans la section E, facultatif dans les autres :

Représentation, à l'aide des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires, de polyèdres tels que tétraèdres réguiers, cubes, prismes, pyramides.

[...]

Exemples de détermination de sections planes de polyèdres.

Autres thèmes (à titre indicatif).

Utilisation de transformations simples de l'espace, telles que les translations et homothéties, pour la résolution de problèmes de constructions.

Exemples de distance de deux parties de l'espace ; problèmes simples d'équidistance.

Repérage d'un point sur une sphère.

Annexe 2

Détail du programme de la classe de Seconde (*arrêté du 25 avril 1990, B.O. du 17 mai 1990*), en ce qui concerne les vecteurs.

a) Opérations sur les vecteurs	
– Représentation géométrique d'un vecteur $\vec{u}$; interprétation géométrique de l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$. Norme d'un vecteur.	La notation $\vec{u}$ et le vecteur nul n'ont pas été introduites au collège.
– Addition des vecteurs, opposé d'un vecteur ; relation de Chasles ; représentation géométrique des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $- \vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{v}$. Pour une translation, relation $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. – Multiplication d'un vecteur par un nombre, représentation géométrique de $\lambda\, \vec{u}$. Vecteurs colinéaires.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les relations entre le parallélogramme, la translation, l'égalité et l'addition des vecteurs, entre l'opposé et la symétrie centrale. Le fait que la relation $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ caractérise les translations est hors programme. Les élèves doivent savoir utiliser la colinéarité pour caractériser le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points, l'appartenance à une droite définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur.
– Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, du centre de gravité d'un triangle.	La notion générale de barycentre est hors programme.
– Configuration de Thalès : si $\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k\ \overrightarrow{A'B'}$. Réciproque dans le cas particulier où A' = A.	Dans le cas du triangle, on fera le lien avec l'énoncé vu en classe de troisième. Le lien avec les projections n'est pas un objectif du programme.
– Homothétie (définie par $\overrightarrow{OM'} = k\ \overrightarrow{OM}$; relation $\overrightarrow{M'N'} = k\ \overrightarrow{MN}$, application au triangle.	Pour introduire l'homothétie, on s'appuie sur des situations portant sur des agrandissements et des réductions, dont l'étude a été engagée en classe de troisième. L'étude de l'unicité du centre est hors programme. Il en est de même pour le fait que la relation $\overrightarrow{M'N'} = k\ \overrightarrow{MN}$, caractérise les homothéties.

b) Bases, repères – Repères d'une droite du plan ; abscisse d'un point, mesure algébrique.	La mesure algébrique $\overline{AB}$ d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une notation commode. En-dehors de la relation de Chasles, aucun usage de cette notion n'est au programme.
– Bases, repères du plan ; coordonnées d'un vecteur dans une base, d'un point dans un repère, coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$, de $\lambda\ \vec{u}$. Condition de colinéarité de deux vecteurs.	On indiquera à ce propos l'effet d'une projection sur une égalité vectorielle : si A, B, C, D satisfont à la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors leurs images A', B', C', D' satisfont à la relation $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
Un repère étant fixé, équation cartésienne $ux + vy + w = 0$ d'une droite.	On reliera la notion de coefficient directeur à celle de vecteur directeur ; pour l'équation cartésienne d'une droite, on fera le lien avec les formes $y = ax + b$ et $x = b$ vues au collège. En vue de l'étude des inéquations à deux inconnues, les élèves doivent connaître le régionnement du plan défini par une droite.
c) Orthogonalité, mesure des angles orientés[1] – Vecteurs orthogonaux. Bases orthonormales ; repères orthonormaux (ou orthonormés). Dans un repère orthonormal, expression de la distance et de la norme ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites.	Le produit scalaire est hors programme, ainsi que l'étude des propriétés de la norme. On fera le lien avec la condition d'orthogonalité de deux droites portant sur les coefficients directeurs vue en troisième.

[1] Nous ne faisons figurer ici que ce qui concerne l'orthogonalité.

Annexe 3

Détail du titre 1 du programme de la classe de Première S (*arrêté du 27 mars 1991, B.O. spécial du 2 mai 1991*).

a) Vecteurs et configurations dans le plan	
Barycentre de deux points pondérés: Étude de $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$; réduction dans le cas où $\alpha + \beta \neq 0$. Caractérisation du barycentre par $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Extension à un système de trois ou quatre points.	Les élèves doivent savoir que le barycentre de deux points appartient à la droite définie par ces deux points ; la réciproque est hors programme. L'emploi de barycentres en géométrie ne porte que sur des **exemples numériques**, où le calcul vectoriel permet, de façon très simple, d'**associer des points** pour obtenir des propriétés d'alignement ou de concours ; tout énoncé général concernant l'associativité de la barycentration est hors programme. **On ne multipliera pas les exercices de recherche et de construction de barycentres**.
Produit scalaire ; expressions du produit scalaire : $2\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u} + \vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}\rVert^2 - \lVert\vec{v}\rVert^2$; $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$; $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overline{OA}.\overline{OH}$; $\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert\,\lVert\vec{v}\rVert \cos\theta$.	La notion de forme bilinéaire symétrique est hors programme. Le texte ci-contre suggère une démarche pour l'introduction du produit scalaire : on s'appuie sur la caractérisation (vue en Seconde) de l'orthogonalité de deux vecteurs par $\lVert\vec{u} + \vec{v}\rVert^2 = \lVert\vec{u}\rVert^2 + \lVert\vec{v}\rVert^2$, ou encore par $xx' + yy' = 0$, ce qui amène aux deux premières expressions du produit scalaire indiquées ci-contre. Le professeur peut adopter un autre choix. Quel que soit ce choix, les quatre expressions doivent être mises en valeur et exploitées sur **quelques** exemples simples.
Propriétés du produit scalaire : symétrie, linéarité.	On habituera les élèves à traduire vectoriellement des propriétés géométriques portant

La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe Δ muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ est $(\vec{u}.\vec{v})\vec{u}$. En particulier, les coordonnées x et y de $\vec{v}$ dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ sont $x = \vec{i}.\vec{v}$ et $y = \vec{j}.\vec{v}$.	sur des distances et des angles à l'aide du produit scalaire, et, inversement, interpréter géométriquement des résultats vectoriels. Ainsi, les propriétés du losange et du triangle isocèle sont à relier au fait que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux ; de même les théorèmes de la médiane sont à relier au calcul de la somme et de la différence de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et de $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.
Caractérisation d'une droite par $\vec{k}.\overrightarrow{AM} = 0$.	Les élèves doivent savoir déterminer un vecteur normal à une droite donnée par une équation.
Équation d'un cercle de centre et de rayon donnés.	Les élèves doivent savoir déterminer le centre et le rayon d'un cercle donné par son équation cartésienne.
b) Vecteurs et configurations de l'espace	
Extension à l'espace du calcul vectoriel (admise).	Aucune construction théorique du calcul vectoriel dans l'espace n'est au programme ; toute reconstruction des propriétés d'incidence à partir du calcul vectoriel est exclue. L'étude de la translation et de l'homothétie n'est pas un objectif du programme.
Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires. Bases, repères ; coordonnées d'un vecteur, d'un point. Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et $\lambda\vec{u}$.	Les élèves doivent savoir utiliser ces notions pour caractériser le parallélisme de droites et de plans, l'appartenance d'un point à une droite ou à un plan. La notion de représentation paramétrique d'une droite d'équation cartésienne d'un plan sont hors programme.
Extension à l'espace de la notion de barycentre.	Tout exposé général est exclu ; le but est d'exploiter cette notion pour étudier quelques configurations simples (tétraèdre, cube...).
Norme d'un vecteur, vecteur orthogonaux. Bases orthonormales ; repères orthonormaux. Expression de la distance et de la norme ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs.	Le produit scalaire dans l'espace est hors programme.

Annexe 4

Les programmes de Troisième (arrêté du 15 septembre 1998 - B.O. hors série n° 10 du 15 octobre 1998)

Détail du titre 4 "Vecteurs et translations" :

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Vecteurs et translations Écriture vectorielle	Connaître et utiliser l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ pour exprimer que la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.	Cette rubrique prend en compte les acquis du cycle central sur les parallélogrammes et sur la translation. Elle est orientée vers la reconnaissance, dans les couples (A,A'), (B,B'), (C,C'), ..., de points homologues par une même translation, d'un même objet nommé vecteur. On écrira $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \dots$ L'un des objectifs est que les élèves se représentent intuitivement un vecteur à partir d'une direction, d'un sens et d'une longueur.
	Lier cette écriture vectorielle au parallélogramme ABDC éventuellement aplati. En particulier, utiliser la caractérisation à l'aide des milieux.	On mettra en évidence la caractérisation d'une égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ à l'aide de milieux de [AD] et [BC] : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors les segments [AD] et [BC] ont même milieu. Si les segments [AD] et [BC] ont même milieu, alors on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Composition de deux translations ; somme de deux vecteurs	• Utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ et la relier à la composée de deux translations. • Construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme.	Des activités de construction conduiront à l'idée que la composée de deux translations est une translation. À partir de ce résultat, à établir ou à admettre, on définira la somme de deux vecteurs. On introduira le vecteur nul $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ ainsi que l'opposé d'un vecteur ; aucune compétence n'est exigible des élèves sur l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ ni, plus généralement, sur la soustraction vectorielle .
Coordonnées d'un vecteur dans le plan muni d'un repère	• Lire sur un graphique les coordonnées d'un vecteur. • Représenter, dans le plan muni d'un repère, un vecteur dont on donne les coordonnées. • Calculer les coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités de l'un quelconque de ses représentants. • Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.	Les coordonnées d'un vecteur seront introduites à partir de la composition de deux translations selon les axes.
Composition de deux symétries centrales	Savoir que l'image d'une figure par deux symétries centrales successives de centres différents est aussi l'image de cette figure par une translation. Connaître le vecteur de la translation composée de deux symétries centrales.	Des activités de construction permettront de conjecturer le résultat. de composition de deux symétries centrales. La démonstration sera l'occasion de revoir la configuration des milieux dans un triangle. On pourra utiliser, pour sa commodité, la notation $2\,\overrightarrow{AB}$ pour désigner $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$. Tout commentaire sur le produit d'un vecteur par un entier est hors programme ainsi que la notation "o" pour désigner la composée.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

Le but de ce travail est d'abord de mettre en évidence le manque d'outils et de techniques vectoriels véritablement efficaces pour traiter les questions de géométrie au lycée en France, d'en analyser ensuite les raisons et enfin de proposer sur ce thème des éléments d'ingénierie curriculaire, du point de vue de l'organisation mathématique et de l'organisation didactique.
La partie 1 expose les outils d'analyse, tirés de la théorie anthropologique du didactique proposée par Yves Chevallard, et en particulier la notion d'organisation mathématique : (types de problèmes, techniques, technologie, théorie).
La partie II est d'abord consacrée à l'histoire du calcul vectoriel et à l'émergence des espaces vectoriels (les premières traductions en français d'ouvrages de calcul vectoriel font l'objet d'une attention particulière), puis à l'émergence des espaces affines. Enfin, revenant à la géométrie élémentaire, la succession au cours du siècle des principales constructions théoriques de la géométrie est retracée, en précisant la place et le rôle occupés par les vecteurs dans chacune d'elles. Cette étude montre l'abondance des travaux portant sur l'articulation entre les fondements de la géométrie d'une part et l'élaboration théorique d'un calcul vectoriel d'autre part ; certains de ces travaux ont largement influencé l'évolution des programmes d'enseignement.
La partie III s'intéresse précisément à la place des vecteurs dans les programmes d'enseignement en France au cours de ce siècle. Le titre A fournit une base documentaire complète à ce sujet ; le titre B est principalement consacré à l'analyse didactique du traitement vectoriel, dans le cadre des programmes successifs, de deux types de problèmes : les problèmes d'alignement et de concours, et l'étude d'une configuration à l'aide d'une transformation vectorielle. L'enquête est conduite sur les territoires suivants : textes des programmes, manuels scolaires, revues ou brochures professionnelles.
La dernière partie dresse dans son titre A un inventaire et une comparaison des organisations mathématiques intégrant les deux types de problèmes précédents, qui ont été publiés dans des traités ou manuels, en France et dans quelques pays anglo-saxons (États-Unis, Allemagne, Angleterre). Cette partie fait apparaître deux univers dans la pratique du calcul vectoriello-ponctuel : un univers anglo-saxon, où l'on utilise effectivement le pointage du plan ou de l'espace, ainsi que les vecteurs-positions ; un univers français de l'enseignement secondaire, où les vecteurs- posifions sont indésirables, la notation AB et la relation de Chasles étant au cœur des techniques. Le titre B propose des organisations mathématiques pour le début du lycée, nouvelles en France, intégrant ces types de problèmes et introduisant les vecteurs-positions.

MOTS CLES

géométrie - vecteurs – vecteurs/positions - alignement - transformation vectorielle modélisation - transposition didactique - organisation mathématique - praxéologie mathématique - organisation didactique - ostensifs - moments didactiques

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Mai 1999
ISBN : 2-86612-186-4